

Государственный комитет СССР
по народному образованию

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

Кафедра строительной механики

539.3/.6(07)

И425

В. А. Игрин, В. Н. Широков

ЭПОРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Одобрено учебно-методической комиссией
инженерно-строительного факультета

Южно-Уральский гос. университет НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

1338

Челябинск
1968

УДК 539.3/.6(07)

В.А.Икрик, В.Н.Широков. Эпюры внутренних силовых факторов:
Учебное пособие для самостоятельной работы. - Челябинск: ЧПИ,
1988. - 69 с.

Приведены основные понятия. Описаны метод сечений для опре-
деления внутренних силовых факторов и способы построения эпюр.

Ориентировано на самостоятельное изучение темы. Содержит
необходимый теоретический материал, поясняющие примеры и задачи
для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов строительных специальностей,
изучающих курс сопротивления материалов.

Ил. 102, список лит. - 5 назв.

Рецензенты: В.С.Каганцев, В.Ф.Шур.



Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола, 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.	
НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТАТИКИ Т. ЕРДОГО ТЭЛА	5
I.1. Нагрузки и их количественные характеристики	5
I.2. Стержень и его геометрические представители в расчетной схеме	6
I.3. Соединения и опоры	7
I.4. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы	8
I.5. Метод сечений	10
I.6. Примеры определения внутренних силовых факторов	10
I.7. Задачи для самостоятельного решения	14
2. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ	15
2.1. Продольные силы	16
2.2. Крутящие моменты	18
2.3. Внутренние силовые факторы в балках	20
2.4. Некоторые закономерности очертания эпюр внутренних сило- вых факторов в балках	29
2.5. Эпюры внутренних силовых факторов в плоских системах ...	31
2.6. Эпюры внутренних силовых факторов в общем случае	36
3. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ УСКОРЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ	39
3.1. Следствия метода сечений	40
3.2. Эпюры продольных сил	43
3.3. Эпюры крутящих моментов	45
3.4. Следствия дифференциальных зависимостей между внешней нагрузкой и внутренними силовыми факторами в балках	46
3.5. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в балках	50
3.6. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в плоских системах	54
3.7. Эпюры внутренних силовых факторов в общем случае	62
4. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	
4.1. Ответы к задачам первой главы	65
4.2. Ответы к задачам второй главы	65
4.3. Ответы к задачам третьей главы	67
ЛИТЕРАТУРА	69

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего пособия - помочь студентам строительных специальностей в овладении практическими навыками определения внутренних силовых факторов и построения их эпюр. Этой целью и ориентацией на самостоятельную работу определены структура пособия и методика изложения. Основными источниками при подборе материала послужили издания ранее авторами работы [1, 2]; использованы также учебники по теоретической механике [3], сопротивлению материалов [4] и строительной механике [5].

Пособие состоит из трех глав. В первой из них введены основные понятия и даны необходимые сведения из статики твердого тела. Вторая и третья главы посвящены описанию приемов построения эпюр внутренних силовых факторов. Во второй главе приведены минимально необходимые сведения, опирающиеся на методы статики и, главным образом, элементарной алгебры. Это облегчает понимание материала, но требует большого объема записей, графических и вычислительных действий. В третьей главе для построения эпюр привлечены необходимые положения математического анализа. В результате удастся снизить трудоемкость решения задач за счет использования более сложного математического аппарата. При желании ограничиться лишь минимально необходимым объемом читатель может опустить третью главу.

В пособие включено большое количество примеров, одна группа которых поясняет основной теоретический материал, другая направлена на самостоятельное закрепление практических навыков. Примеры подобраны так, чтобы охватить не только основные принципы расчета, но и отразить отдельные частности и соответствующие им рациональные пути решения задач. Ориентируясь на развитие практических навыков, авторы воздержались от включения в пособие контрольных вопросов, ограничившись лишь примерами для самостоятельного решения.

Пособие адресовано в первую очередь студентам строительных специальностей, изучающим курс сопротивления материалов; в то же время авторы надеются на то, что оно может оказаться полезным и в курсе строительной механики.

Авторы выражают благодарность проф. В.И.Соломину за полезные советы и пожелания.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В расчете обычно фигурирует расчетная схема — упрощенный, схематизированный и идеализированный реальный объект. Элементами расчетной схемы стержневой конструкции являются внешние силы, стержни и связи. Остановимся на этих понятиях.

1.1. Нагрузки и их количественные характеристики

Внешние силы — силы действия на рассматриваемое тело тел, мысленно отброшенных. Внешние силы подразделяются на объемные и поверхностные. Объемные силы распределены по объему тела и приложены к каждой частице. К таким силам относятся собственный вес, силы инерции, электромагнитные силы и т.п. Поверхностные силы приложены к участкам поверхности, по которым рассматриваемый объект контактирует с окружающими телами.

При выборе расчетной схемы из-за отсутствия полной информации о распределении сил нагрузку обычно схематизируют. Будем различать четыре вида поверхностных сил.

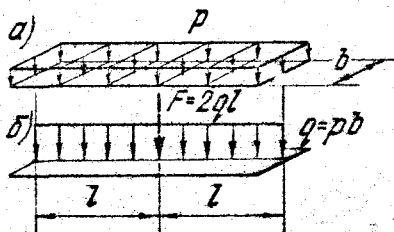


Рис. 1.1

Силы, распределенные по поверхности (рис. 1.1а). Количественной характеристикой их является интенсивность p — сила, приходящаяся на единицу площади. Размерности интенсивности — Н/м^2 (Па) и т.п.

Силы, распределенные по линии, — результат приведения нагрузки первого вида в плоскости (рис. 1.1б). Ее интенсивность q — сила, приходящаяся на единицу длины. Размерности q — Н/м и подобные ей.

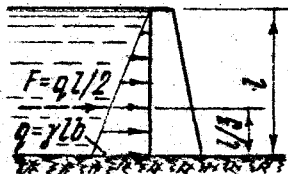


Рис. 1.2

Характер изменения интенсивности по длине обычно показывают в виде графика (эпюры). На рис. 1.1б показана эпюра равномерно распределенной нагрузки, на рис. 1.2 — линейно переменной (гидростатической) нагрузки с интенсивностью

в основании $q = \gamma l b$ (γ - объемный вес жидкости, b - линейный размер в направлении, перпендикулярном рисунку). Равнодействующая распределенной по линии нагрузки равна площади эпилры и проходит через центр тяжести этой эпилры (рис. 1.1б, 1.2).

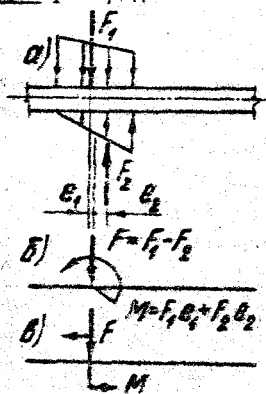


Рис. 1.3

Сосредоточенные силы. Если размеры поверхности, по которой распределена нагрузка, малы по сравнению с размерами тела, то считают, что нагрузка приложена в точне в виде сосредоточенной силы. Размерности сосредоточенной силы - Н и «аналогичные ему.

Сосредоточенные моменты. В том случае, когда плечо пары сил мало по сравнению с размерами тела, действие пары сил может быть заменено сосредоточенным моментом. Размерности момента - Нм и т.п.

Примеры замены распределенных по длине нагрузок сосредоточенной силой и сосредоточенным моментом приведены на рис. 1.3а-в.

1.2. Стержень и его геометрические представители - в расчетной схеме

С т е р ж е н ь (брус) - тело, один размер которого (длина) значительно больше поперечных размеров (рис. 1.4). Ось стержня - это геометрическое место центров тяжести поперечных сечений.

Геометрическими характеристиками стержня являются форма, размеры и ориентация поперечных сечений, а также длина и очерта-ние оси. В зависимости от них различают стержни постоянного (рис. 1.4а, б, в) и переменного (рис. 1.4г) сечений, прямые (рис. 1.4а, в, г) и кривые (рис. 1.4б), выделяют естественно закрученные стержни (рис. 1.4в).

С поперечным сечением будем связывать главную координатную систему, которую образуют главные центральные оси сечения η и перпендикулярная им ось z . Особо выделим частные формы, когда стержень имеет одну (рис. 1.4б) или две (рис. 1.4 а, г) главных плоскости.

При изображении расчетной схемы в виде плоской конструкции будем указывать лишь оси стержней и, если особо не оговаривает-

ся, подразумевать, что плоскость чертежа является главной плоскостью стержней.

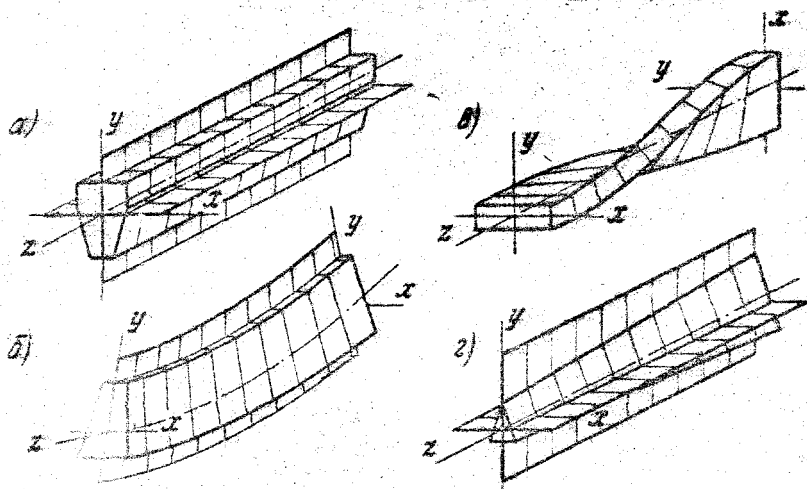


Рис. 1.4.

1.3. Соединения и опоры

Стержни, входящие в расчетную схему, соединены между собой. Места соединений будем называть узлами. На рис. 1.5 приведены примеры узлов.

Жесткий узел изображен на рис. 1.5а. При таком соединении концы элементов, сходящихся в узле, лишены возможности взаимного линейного и углового смещения.

В шарнирном узле (рис. 1.5б-г) возможен взаимный поворот соединенных концов элементов, но исключены взаимные линейные смещения. Следует различать шарниры врезные (рис. 1.5в) и примыкающие (рис. 1.5г).

На рис. 1.5д изображено соединение, препятствующее взаимному повороту и вертикальному смещению концов, но допускающее го-

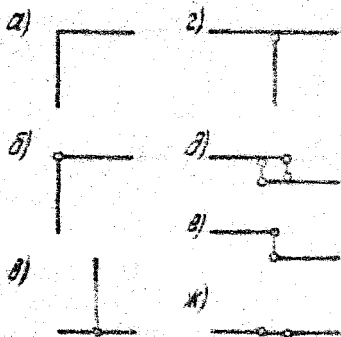


Рис. 1.5

горизонтальное перемещение. Рис. 1.5е, ж иллюстрирует соединения, накладывающие по одному кинематическому ограничению - исключаящие либо вертикальное (рис. 1.5е), либо горизонтальное (рис. 1.5ж) взаимное перемещение.

Связи, расположенные на границе рассматриваемого объекта с окружающими телами, называются опорными, или опорами. Некоторые типы опор (в различных вариантах) изображены на рис. 1.6.

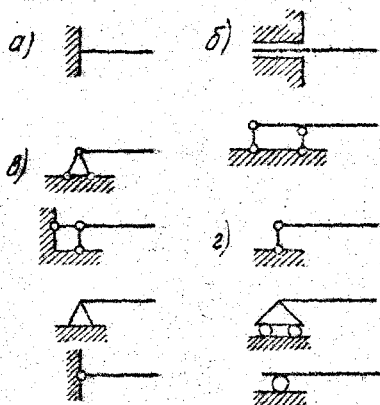


Рис. 1.6

Абсолютная заделка (зашемление) исключает все перемещения конца стержня (рис. 1.6а).

Скользкая заделка (рис. 1.6б) допускает лишь перемещение вдоль стержня.

Шарнирно неподвижная опора (рис. 1.6в) исключает линейные перемещения, но не препятствует повороту.

Шарнирно подвижная опора (рис. 1.6г) ограничивает лишь одно линейное перемещение.

Приведенные варианты изображения соединений и опор не охватывают

всех возможных способов их имитации в расчетных схемах. Применяются и другие графические приемы. При этом важно изображать связи так, чтобы было ясно, какие перемещения соединением исключаются, какие допускаются беспрепятственно.

Виды усилий, передаваемых в соединениях стержней и опорах, определяются накладываемыми кинематическими ограничениями - исключаемому линейному перемещению соответствует совпадающая с ним по направлению сила, угловому - момент.

1.4. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы

Внутренние силы - силы взаимодействия между различными частями одного и того же тела. Эти силы представляют первостепенный интерес в сопротивлении материалов, поскольку характеризуют нагруженность стержня.

Рассмотрим освобожденный от связей стержень, который под действием заданной системы внешних сил находится в равновесии

(рис. I.7). При этом под внешними подразумеваются как активные силы, так и реакции опор. Рассечем стержень поперечной плоскостью на две части и отбросим одну из них, например правую. Рассмотрим левую часть (рис. I.8). Ее равновесие обусловлено не только внешними силами, расположенными слева от сечения, но и силами действия отсеченной правой части.

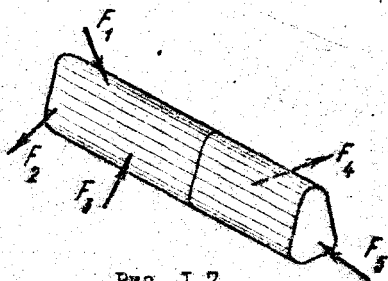


Рис. I.7

Силы взаимодействия между двумя частями стержня распределены по сечению и представляет пространственную систему сил. Она может быть приведена к главному вектору и главному моменту, приложенным в центре тяжести поперечного сечения. В сопротивлении материалов главный вектор и главный момент обычно разлагают по осям главной координатной системы. Проекции главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, на главные координатные оси называются внутренними силовыми факторами в данном сечении.

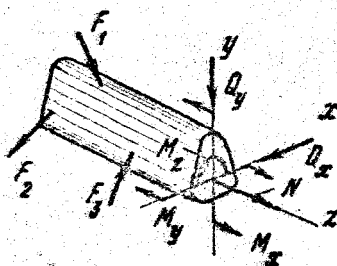


Рис. I.8

В общем случае в поперечном сечении может быть шесть внутренних силовых факторов. Обозначать и называть их будем так.

N - продольная (нормальная) сила - проекция главного вектора на продольную ось z ;

Q_x и Q_y - поперечные (перерезывающие) силы - проекции главного вектора на главные центральные оси поперечного сечения;

M_z - крутящий момент - проекция главного момента на ось z ;

M_x и M_y - изгибающие моменты - проекции главного момента на главные центральные оси поперечного сечения.

Внутренние силовые факторы являются обобщенными статическими эквивалентами сил взаимодействия между двумя частями стержня.

Выбранный способ разложения главного вектора и главного момента позволяет выделить их составляющие, связанные с конкретными видами нагружения сечения — растяжением (или сжатием), срезом, кручением и изгибом.

1.5. Метод сечений

Определение величин и направлений внутренних силовых факторов производится из условий равновесия части стержня. Такой метод носит название метода сечений. Он позволяет перевести внутренние силовые факторы в разряд внешних сил и, подчинив условиям равновесия, определить их величины и направления. В соответствии с этим выполняет следующие действия.

- 1) Разрезают стержень поперечной плоскостью в том месте, где требуется найти внутренние силовые факторы.
- 2) Отбрасывают одну часть стержня.
- 3) Действие отброшенной части на оставшуюся заменяют силами — внутренними силовыми факторами.
- 4) Составляют уравнения равновесия оставшейся части стержня и из них находят величины и направления внутренних силовых факторов.

Операции, составляющие сущность метода сечений, достаточно просты. Однако, поскольку условия равновесия распространяются лишь на внешние силы, для успешного применения метода требуется не только свободное обращение с аппаратом статики, но и умение ясно различать силы внешние и внутренние.

Не должен вводить в заблуждение термин "внутренние силовые факторы". Это не значит, что они всегда выступают в роли внутренних сил. Так, для стержня, изображенного на рис. 1.7, они являются внутренними, для части же стержня, показанной на рис. 1.8, их следует рассматривать как силы внешние.

1.6. Примеры определения внутренних силовых факторов

Для иллюстраций метода сечений рассмотрим примеры.

Пример 1.1. Определить внутренние силовые факторы в сечении I стержня, изображенного на рис. 1.9а.

Применим метод сечений.

Разрежем стержень поперечной плоскостью I.

Отбросим одну часть стержня. Отбрасывать можно, вообще говоря, любую часть. Однако в данном случае следует отбросить правый отрезок стержня, поскольку он несвободен.

Действие правой части стержня на левую заменим силами. Так как линии действия сил совпадают с осью стержня, в сечении I возникнет лишь продольная сила (рис. I.9б).

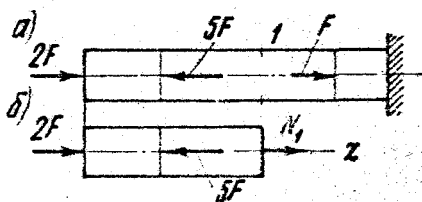


Рис. I.9

Направим ее вправо.

Составим уравнение равновесия $\sum Z = 0$: $2F - 5F + N_1 = 0$. Отсюда следует $N_1 = 3F$. Направление силы N_1 , показанное на рис. I.9б, верное.

Пример I.2. Найти продольную силу в сечении I стержня, показанного на рис. I.10а.

Разрежем стержень сечением I.

Отбросим левую часть.

Приложим к оставленной правой части растягивающую силу N_1 (рис. I.10б).

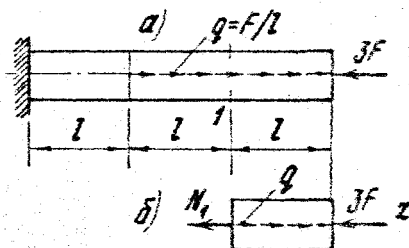


Рис. I.10

Правая часть находится в равновесии под действием трех внешних сил: $3F$, распределенной нагрузки и силы N_1 . Из условия $\sum Z = N_1 - ql + 3F = 0$ ^{*}, учитывая равенство $q = F/l$, находим $N_1 = -2F$. Знак минус свидетельствует о том, что действительное направление силы N_1 обратно показанному на рис. I.10б.

Пример I.3. Определить величину и направление крутящего момента в сечении I стержня, подверженного сосредоточенным и распределенным моментам, действующим вокруг оси Z (рис. I.11а).

Выполнив первые три операции метода сечений, приходим к рис. I.11б. Из условия $\sum M_z = 2M - ml + M_1 = 0$ следует $M_1 = 3M - 2M = M$. Момент M_1 , направлен, как показано на рис. I.11б.

^{*} При составлении уравнений равновесия не будем вводить правила знаков проекций сил, связанные с направлением координатных осей. Проекции разных направлений будем включать в уравнения с разными знаками. Так же будем поступать при суммировании моментов.

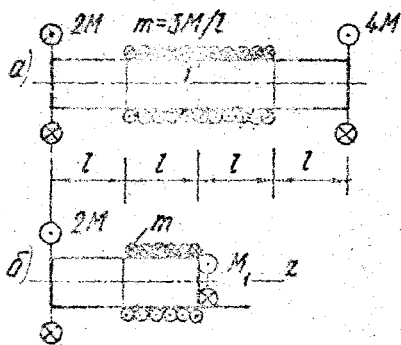


Рис. I.11

Пример I.4. Определить величину и направление поперечной силы и изгибающего момента в сечении I балки, показанной на рис. I.12а.

Разрезаем балку сечением I, отбросив левую часть и приложив силу Q_1 и момент M_1 (рис. I.12б), записываем условия равновесия: $\sum Y = Q_1 - 2F = 0$, $Q_1 = 2F$; $\sum M_0 = M_1 + 2Fl - Fl = 0$, $M_1 = -Fl$.

Направление силы Q_1 совпадает с действительным; момент M_1 направлен в сторону, обратную показанной на рис. I.12б.

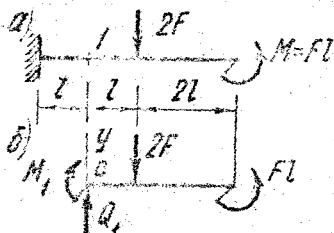


Рис. I.12

Пример I.5. Найти величину и направление поперечной силы и изгибающего момента в сечении I балки, изображенной на рис. I.13а.

Если разрезать балку сечением I, в ней не выделится свободная часть.

Опорные стороны будут удерживать оба отрезка балки. Прежде чем определять внутренние силовые факторы, нужно освободить балку от связей, заменить их действие силами и найти опорные реакции².

Расчленим равновесие балки, освобожденной от опор (рис. I.13б). Поочередно приравнявая нулю суммы моментов сил, приложенных к балке, относительно точек a и b , находим:

$$\sum M_a = q \cdot 4l \cdot 2l - Y_b \cdot 5l = 0, Y_b = 1,6ql;$$

$$\sum M_b = q \cdot 4l \cdot 3l - Y_a \cdot 5l = 0, Y_a = 2,4ql.$$

Из $\sum Z = 0$ следует $Z_a = 0$.

Проверим вертикальные опорные реакции^{2*}: $\sum Y = 2,4ql - ql + 1,6ql = 0$. Реакции найдены верно.

² Для решения этой задачи можно определить реакцию лишь одной опоры. Определив реакции обеих опор, получаем возможность производить проверки выполняемых действий.

^{2*} С этой целью обычно составляют уравнение равновесия, не использованное при определении реакций, и проверяют, выполняется ли оно.

Теперь разрежем балку сечением I, отбросим правую часть и левую опору. Заменяем действие отброшенных частей силами (рис. I.13в), составим и решим уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 2,4ql - q \cdot 3l + Q_1 = 0, \quad Q_1 = 0,6ql;$$

$$\Sigma M_c = 2,4ql \cdot 3l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - M_1 = 0, \quad M_1 = 2,7ql^2.$$

Выбранные направления Q_1 и M_1 совпадают с действительными.

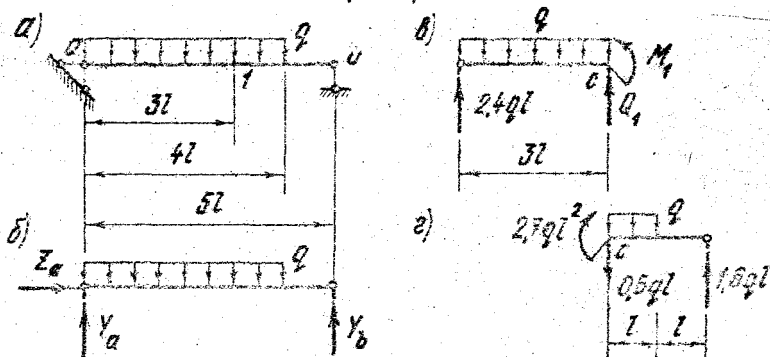


Рис. I.13

Проверим правильность определения внутренних силовых факторов. Для этого рассмотрим правую часть балки (рис. I.13г). Условия равновесия - $\Sigma Y = 0,6ql + ql - 1,6ql = 0$, $\Sigma M_c = 2,7ql^2 + ql^2/2 - 1,6ql \cdot 2l = 0$ - выполняются. Сила Q_1 и момент M_1 найдены верно.

Пример I.6. Найти внутренние силовые факторы в сечении I плоской рамы (рис. I.14а).

Разрезаем раму, отбрасываем правую часть, заменяем ее действие силами N_1 , Q_1 и M_1 , составляем и решаем уравнения равновесия (рис. I.14б):

$$\Sigma Z = N_1 + q \cdot 2l = 0, \quad N_1 = -2ql;$$

$$\Sigma Y = Q_1 + ql = 0, \quad Q_1 = -ql;$$

$$\Sigma M_c = M_1 + q \cdot 2l \cdot l - ql \cdot l = 0, \quad M_1 = -ql^2.$$

Выбранные направления N_1 , Q_1 и M_1 оказались ошибочными. Действительные направления обратны показанным на рис. I.14б.

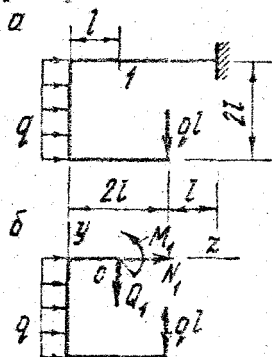


Рис. I.14

Пример 1.7. Определить внутренние силовые факторы в сечении I пространственной рамы, показанной на рис. 1.15а.

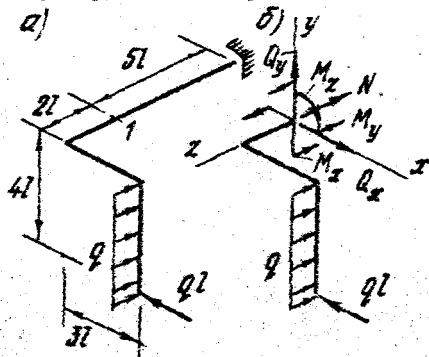


Рис. 1.15

Часть рамы, рассматриваемая в равновесии, изображена на рис. 1.15б. Уравнения равновесия и их решения:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= ql - Q_x = 0, & Q_x &= ql; \\ \Sigma Y &= Q_y = 0; \\ \Sigma Z &= N + q \cdot 4l = 0, & N &= -4ql; \\ \Sigma M_x &= M_x + q \cdot 4l \cdot 2l = 0, & M_x &= -8ql^2; \\ \Sigma M_y &= M_y + q \cdot 4l \cdot 3l - ql \cdot 2l = 0, & M_y &= -10ql^2; \\ \Sigma M_z &= M_z + ql \cdot 4l = 0, & M_z &= -4ql^2. \end{aligned}$$

Отрицательные знаки в полученных результатах указывают на ошибочность выбранных направлений соответствующих внутренних силовых факторов.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Найти продольную силу в сечении I стержня, показанного на рис. 1.16.

Задача 1.2. Определить величину и направление крутящего момента в сечении I (рис. 1.17).

Задача 1.3. Определить внутренние силовые факторы в сечении I балки, показанной на рис. 1.18.

Задача 1.4. Определить внутренние силовые факторы в сечении I плоской рамы, изображенной на рис. 1.19.

Задача 1.5. Определить внутренние силовые факторы в сечении I пространственной рамы, изображенной на рис. 1.20.

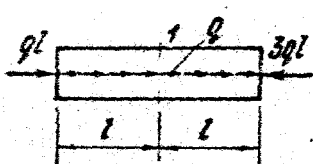


Рис. 1.16

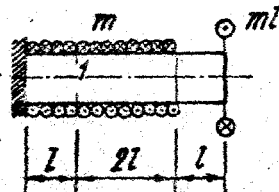


Рис. 1.17

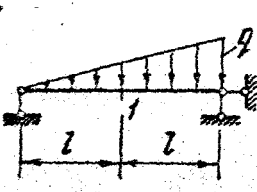


Рис. 1.18

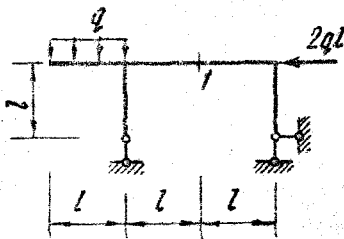


Рис. 1.19

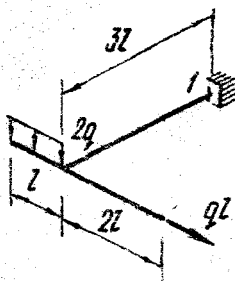


Рис. 1.20

2. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

При расчете конструкций часто прибегают к построению графиков, показывающих, как изменяются внутренние силовые факторы в зависимости от положения сечения. Такие графики называют **э п ю р а м и**.

В отличие от обычных графиков изображение эпюр сопровождается некоторыми особенностями. Отметим характерные из них:

а) нулевая линия эпюры обычно повторяет очертание оси стержня (или стержневой системы);

б) ординаты эпюры откладываются перпендикулярно оси в местах расположения соответствующих сечений;

в) обозначения координатных осей, в которых строится эпюра, как правило, опускается;

г) ординаты эпюры откладываются в соответствии с правилом знаков для внутреннего силового фактора;

д) при необходимости на эпюру наносят штриховку и ставят знак.

Для построения эпюры могут быть использованы разные приемы построения графиков. На начальном этапе освоения этой темы воспользуемся простейшим способом, опирающимся на понятие внутреннего силового фактора, правило знаков для него, метод сечений и аппарат элементарной алгебры. В процессе решения задач будем придерживаться такой последовательности действий:

1) Определение опорных реакций, необходимых для построения эпюры*.

*См. сноску на с. 16.

сти растягивающей силой $N(z)$ (рис. 2.46). Из условия равновесия следует: $N(z) - \gamma Az - F = 0$, $N(z) = F + \gamma Az$. Сила N линейно переменна. При $z = 0$ $N(0) = F$; при $z = l$ $N(l) = F + \gamma Al$.

Эпюра продольной силы изображена на рис. 2.4в.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.1. Построить эпюру продольной силы в стержне, показанном на рис. 2.5.

Задача 2.2. Построить эпюру продольной силы в круговом конусе от собственного веса (рис. 2.6; γ - объемный вес материала).

Задача 2.3. Построить эпюру продольной силы в стержне с учетом собственного веса (рис. 2.7).

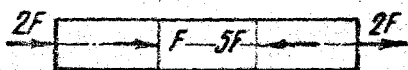


Рис. 2.5

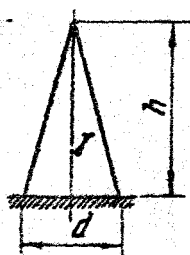


Рис. 2.6

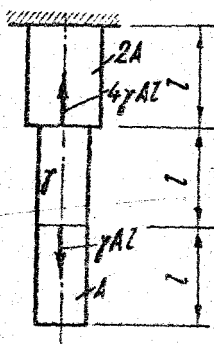


Рис. 2.7

2.2. Крутящие моменты

С построением эпюр крутящих моментов познакомимся на простейших схемах, когда стержень нагружен внешними моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных продольной оси (рис. 2.8). При таких нагрузках в поперечных сечениях возникает только крутящие моменты.

Правило знаков для крутящих моментов.

Внутренний крутящий момент будем считать положительным, если он направлен против хода часовой стрелки (рис. 2.9а), и отрицательным, если - по ходу часовой стрелки (рис. 2.9б). При определении зна-

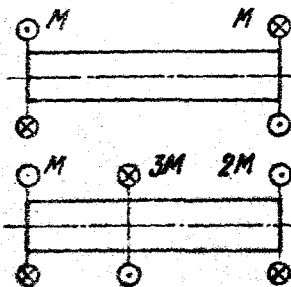


Рис. 2.8

ка крутящего момента следует смотреть на сечение со стороны отброшенной части стержня.

Перейдем к примерам.

Пример 2.3. Построить эпюру крутящего момента для стержня, показанного на рис. 2.10а.

2.10а.

На стержне два участка.

Левый участок (рис. 2.10б, $0 < z < 3l$).

Применяя метод сечений, разрезаем стержень поперечной плоскостью I, отбрасываем правую часть и заменяем ее действие

крутящим моментом, полагая, что он положителен ^{*} Из условия равновесия устанавливаем: $M + M(z) = 0$, $M(z) = -M$.

Правый участок (рис. 2.10в; $3l < z < 5l$).

Для этого участка $M - 3M + M(z) = 0$, $M(z) = 2M$.

Эпюра крутящего момента изображена на рис. 2.10г.

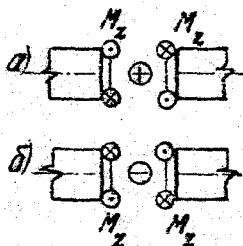


Рис. 2.9

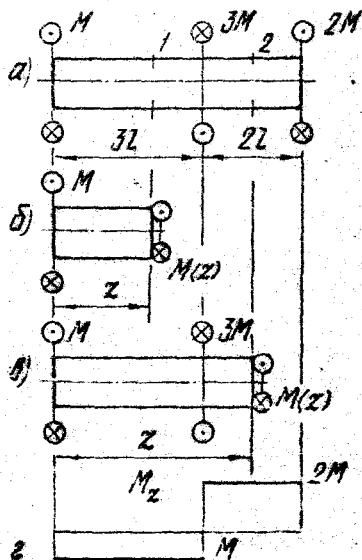


Рис. 2.10

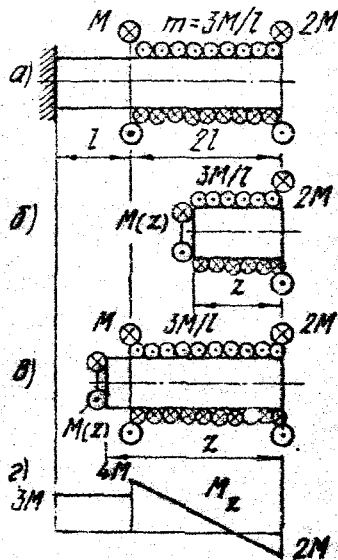


Рис. 2.11

* Здесь также будем задаваться положительным направлением крутящего момента, чтобы не усложнять процедуру определения его знака после решения уравнения равновесия.

Пример 2.4. Построить эпюру крутящего момента для стержня, показанного на рис. 2.11а.

На стержне два участка.

Правый участок (рис. 2.11б; $0 < z < 2l$).

Действуя согласно методу сечений, устанавливаем: $M(z) - 3Mz/l + 2M = 0$, $M(z) = 3Mz/l - 2M$. Момент линейно переменный; $M(0) = -2M$, $M(2l) = 4M$.

Левый участок (рис. 2.11в; $2l < z < 3l$).

$M(z) + M - 3Mz/l + 2M = 0$, $M(z) = 3M$.

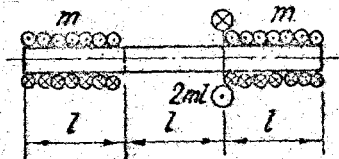


Рис. 2.12

Эпюра крутящего момента изображена на рис. 2.11г.

Задача 2.4. Построить эпюру крутящего момента для стержня, изображенного на рис. 2.12. Задачу решить самостоятельно.

2.3. Внутренние силовые факторы в балках

Балкой будем называть стержень, работающий на изгиб. Ограничимся рассмотрением балок, у которых имеются главные плоскости (рис. 1.4а, г).

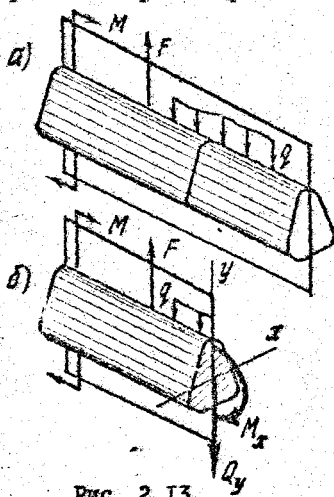


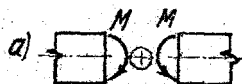
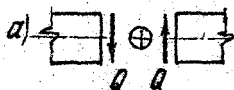
Рис. 2.13

Кроме того, из всего многообразия внешних нагрузок рассмотрим также, которые лежат в одной из главных плоскостей и не содержат продольных сил (рис. 2.13а). Тогда из шести возможных внутренних силовых факторов в сечении балки отличными от нуля могут быть только два - поперечная сила и изгибающий момент, лежащие в плоскости нагружения (рис. 2.13б). Отсутствие в сечении одноименных внутренних силовых факторов позволяет отказаться от индексов, определяющих плоскость действия поперечной силы и изгибающего момента.

Введем правила знаков.

Поперечную силу будем считать положительной, если на левую часть балки она действует вниз, а на правую - вверх (рис. 2.14а).

Если же на левую часть балки поперечная сила действует вверх, а на правую - вниз, она отрицательна (рис. 2.14б).



Изгибающий момент будем считать положительным, если он растягивает верхние волокна балки (рис. 2.15а), и отрицательным, если у балки растянуты нижние волокна (рис. 2.15б) *.

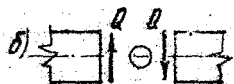


Рис. 2.14

Рис. 2.15

2.15а), и отрицательным, если у балки растянуты нижние волокна (рис. 2.15б) *.

Перейдем к примерам.

Пример 2.5. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, показанной на рис. 2.16а.

На балке один участок. Рассечем балку поперечной плоскостью произвольного положения. Отбросим правую часть. Действие правой части на левую заменим поперечной силой и изгибающим моментом. Допустим, что они положительны - поперечная сила действует справа вниз, момент растягивает верхние волокна (рис. 2.16б).

Из условий равновесия левой части балки следует: $\sum Y = F + Q(z) = 0$, $Q(z) = -F$, поперечная сила постоянна; эпюра изображена на рис. 2.16в.

Из условий равновесия левой части балки следует: $\sum M_c = Fz - M(z) = 0$, момент линейно переменен, $M(0) = 0$, $M(l) = Fl$. Эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 2.16г.

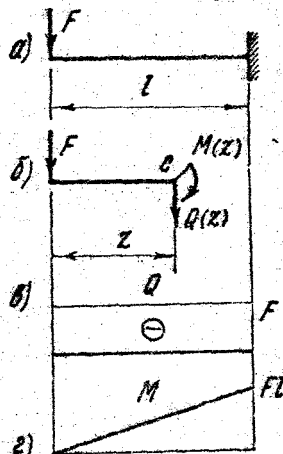


Рис. 2.16

Пример 2.6. Построить эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 2.17а.

На балке один участок. Рассмотрим равновесие правой части

* В учебной литературе по сопротивлению материалов (для студентов строительных специальностей) и строительной механике обычно используют обратное правило знаков: положительным принимает момент, растягивающий нижние волокна. При этом, строя эпюры, положительные ординаты откладывают вниз. Введенное в настоящем пособии правило исключает отмеченную аномалию, не изменяя очертаия эпюр.

балки (рис. 2.17б). При этом действие отброшенной левой части заменим положительными поперечной силой (слева вверх) и моментом (растянуты верхние волокна).

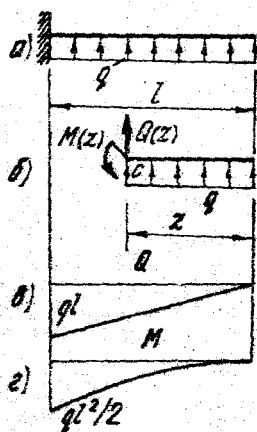


Рис. 2.17

Проектируя силы на вертикальную ось, получаем: $\sum Y = Q(z) + qz = 0$, $Q(z) = -qz$. Поперечная сила отрицательна, линейно переменна; $Q(0) = 0$, $Q(l) = -ql$. Эпюра Q показана на рис. 2.17в.

Приравнявая нулю сумму моментов сил, приложенных к рассматриваемой части балки относительно точки c , находим: $\sum M_c = M(z) + qzz/2 = 0$, $M(z) = -qz^2/2$. Изгибающий момент растягивает нижние волокна (отрицателен), изменяется по квадратной параболе. $M(0) = 0$, $M(l) = -ql^2/2$.

Двух значений изгибающего момента недостаточно для построения квадратной параболы. Чтобы провести ее, можно найти значение момента в третьей точке, например при $z = l/2$. Однако примем во внимание то, что на квадратной параболе имеется точка экстремума.

Найдем место, где изгибающий момент принимает экстремальное значение: $dM/dz = -qz = 0$, отсюда $z = 0$. Этого теперь достаточно, чтобы построить эпюру M . Она изображена на рис. 2.17г.

Пример 2.7. Построить эпюры внутренних силовых факторов в балке, показанной на рис. 2.18а.

Наличие связей на концах балки не позволяет одним сечением выделить из нее свободную часть. Необходимо определить опорные реакции (по крайней мере, одну*).

Освободим балку от опорных связей и приложим силы реакций, как показано на рис. 2.18б. Из условий равновесия следует: $\sum \bar{Z} = -Z_b = 0$; $\sum M_a = ql^2/2 - Y_b l = 0$, $Y_b = ql/2$; $\sum M_b = Y_a l - ql^2/2 = 0$, $Y_a = ql/2$. Проверка опорных реакций: $\sum Y = ql/2 - ql + ql/2 = 0$. Реакции найдены верно.

Рассечем балку, освобожденную от опор, поперечным сечением произвольного положения, отбросим правую часть, действие ее на

* Для построения эпюр в данном случае достаточно найти реакцию одной опоры. Определив реакции обеих опор, получаем возможность проверок правильности решений.

левый отрезок заменим положительно направленными Q и M (рис. 2.18в).

Равновесие рассматриваемого отрезка означает, что $\Sigma Y = ql/2 - qz - Q(z) = 0$, т.е. $Q(z) = ql/2 - qz$ - линейная функция с $Q(0) = ql/2$ и $Q(l) = -ql/2$. Проверка $Q(l) = -ql/2 = -Y_b$ сходится. Эпюра поперечной силы изображена на рис. 2.18г.

Второе условие равновесия $\Sigma M_c = qlz/2 - qzz/2 + M(z) = 0$ дает $M(z) = qz^2/2 - qlz/2$ - квадратная парабола с $M(0) = 0$ и $M(l) = 0$.

Третью точку для построения квадратной параболы возьмем в месте экстремума изгибающего момента: $dM/dz = qz - ql/2 = 0$, откуда $z = l/2$ и $M(l/2) = -ql^2/8$. Эпюра изгибающего момента изображена на рис. 2.18д.

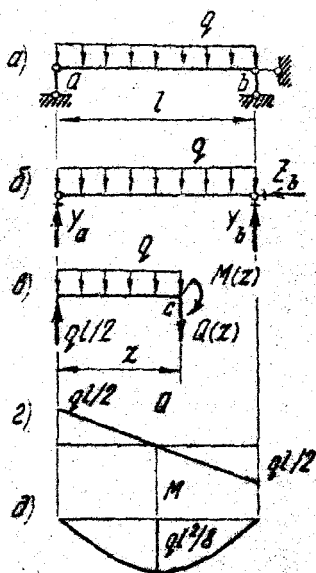


Рис. 2.18

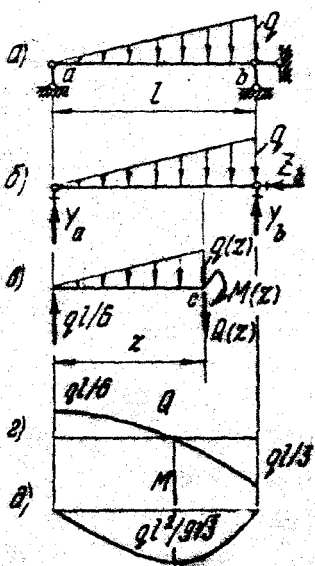


Рис. 2.19

Пример 2.8. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента в свободно опертой балке от распределенной нагрузки линейно переменной интенсивности с максимальным значением q (рис. 2.19а).

В этом примере также нужно найти хотя бы одну опорную реак-

цию. Определим левую. Освободив балку от опор и заменив их действие силами (рис. 2.19б), запишем уравнение $\sum M_b = Y_a \cdot l - 0,5 q \cdot l \cdot l/3 = 0$, что дает $Y_a = q l / 6$.

Теперь разрежем балку сечением произвольного положения и рассмотрим равновесие левой ее части (рис. 2.19в). Интенсивность нагрузки на правом краю рассматриваемого отрезка может быть найдена из подобия треугольников (рис. 2.19б, в): $q/l = q(x)/x$, откуда $q(x) = qx/l$.

Составим и решим уравнения равновесия. $\sum Y = q l / 6 - 0,5 q(x) z - Q(z) = 0$. Подставляя сюда выражение $q(x)$, получаем $Q(z) = q l / 6 - 0,5 q z^2 / l$ - квадратная парабола. $Q(0) = q l / 6$, $Q(l) = -q l / 3$; $dQ/dz = -q z / l = 0$, откуда место экстремума $z = 0$.

Эпюра Q , построенная по этим данным, изображена на рис. 2.19г.

Второе уравнение равновесия - $\sum M_c = q l z / 6 - 0,5 q(x) z z / 3 + M(z) = 0$. Учитывая зависимость $q(x)$ от z , получаем $M(z) = q z^3 / 6l - q z l / 6$ - кубическая парабола с $M(0) = 0$ и $M(l) = 0$.

Исследуем выражение момента на экстремум $dM/dz = q z^2 / 2l - q l / 6 = 0$. Корни этого уравнения $z = l/\sqrt{3}$ и $z = -l/\sqrt{3}$. Отбрасывая отрицательный корень, находим $M(l/\sqrt{3}) = -q l^2 / (9\sqrt{3})$. По полученным данным строим эпюру изгибающего момента (рис. 2.19д)*.

Приемы, проиллюстрированные на балках, имеющих один участок, применяются для построения эпюр в балках с несколькими участками. Продолжим иллюстрации.

Пример 2.9. Построить эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 2.20а.

На балке три участка. На правом участке можно строить эпюры без предварительного определения опорных реакций, поскольку расчленением консоли часть ее становится свободным телом. На левом же и среднем участках такое невозможно. Чтобы не разрывать процесс определения внутренних силовых факторов, найдем вначале реакции опор.

Из условий равновесия балки, освобожденной от опор (рис. 2.20б), следует:

$$\sum Z = Z_a = 0;$$

* Кубическая парабола построена по четырем данным: трем точкам с учетом того, что при $z = l/\sqrt{3}$ момент достигает экстремума.

$$\Sigma M_a = q \cdot 2l \cdot l - ql^2 - Y_b \cdot 3l + ql \cdot 4l = 0, Y_b = 5ql/3;$$

$$\Sigma M_b = Y_a \cdot 3l -$$

$$- q \cdot 2l \cdot 2l - ql^2 + ql \cdot l =$$

$$= 0, Y_a = 4ql/3.$$

Проверка опорных реакций: $\Sigma Y =$
 $= 4ql/3 - q \cdot 2l +$
 $+ 5ql/3 - ql = 0.$

Переходим к построению эпюр.

Левый участок (рис. 2.20в; $0 < z_1 < 2l$).

$$\Sigma Y = 4ql/3 - qz_1 -$$

$$- Q(z_1) = 0; Q(z_1) =$$

$$= 4ql/3 - qz_1; Q(0) =$$

$$= 4ql/3; Q(2l) =$$

$$= -2ql/3.$$

$$\Sigma M_{c_1} = 4qlz_1/3 - qz_1 \cdot z_1/2 + M(z_1) = 0,$$

$$M(z_1) = qz_1^2/2 - 4qlz_1$$

$z_1/3$ - квадратная парабола. Место экстремума $dM(z_1)/dz_1 =$
 $= qz_1 - 4ql/3 = 0,$

$$z_1 = 4l/3. \text{ Значения}$$

момента: $M(0) = 0,$
 $M(4l/3) = -8ql^2/9,$
 $M(2l) = -2ql^2/3.$

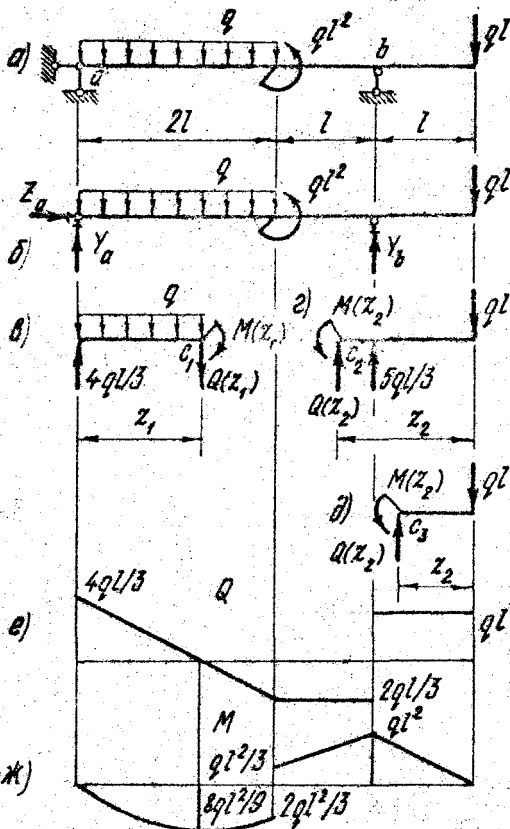


Рис. 2.20

Средний участок (рис. 2.20г; $l < z_2 < 2l$).

Рассмотрим равновесие правой части балки. Из условия уравновешенности сил следует $\Sigma Y = Q(z_2) + 5ql/3 - ql = 0, Q(z_2) =$
 $= -2ql/3.$ Поперечная сила постоянна.

Приравнявая нулю сумму моментов сил, получаем: $\Sigma M_{c_2} = M(z_2) +$
 $+ 5ql(z_2 - l)/3 - qlz_2 = 0; M(z_2) = -2qlz_2/3 + 5ql^2/3.$ Линейная функция с $M(l) = ql^2, M(2l) = ql^2/3.$

Правый участок (рис. 2.20д; $0 \leq x_2 \leq l$).

Внутренние силовые факторы найдем из условий равновесия.

$$\sum Y = Q(x_2) - ql = 0, \quad Q(x_2) = ql - \text{постоянная.}$$

$$\sum M_{c_3} = M(x_2) - qlx_2 = 0, \quad M(x_2) = qlx_2 - \text{линейная функция с}$$

$$M(0) = 0 \text{ и } M(l) = ql^2.$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 2.20е, ж.

Пример 2.10. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента в балке, показанной на рис. 2.21а.

Особенность рассматриваемой балки является, с одной стороны, то, что число опорных реакций (одна в опоре a и три в заделке)

больше числа возможных для нее уравнений равновесия (трех), и, с другой, наличие шарнира в точке b . Эта специфика отражается лишь на процессе определения реакций опор, не внося каких-либо особенностей в последующее решение задачи.

Поскольку для определения внутренних силовых факторов в сечениях, расположенных правее точки a , нужно знать реакции хотя бы одной из опор, найдем усилия в опоре a .

Расчленим балку в шарнире b и отбросим опору a . Рассмотрим равновесие части, изображенной на рис. 2.21б. Приравнивая нулю сумму моментов сил относительно шарнира b , получаем:

$$\sum M_b = ql \cdot 3l/2 - Y_a \cdot l = 0;$$

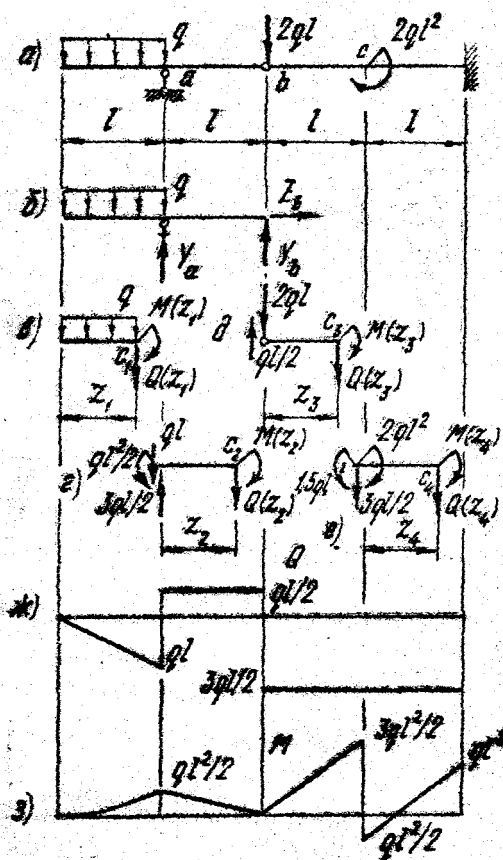
$$Y_a = 3ql/2.$$


Рис. 2.21

Приступим к определению внутренних силовых факторов.

На балке четыре участка*.

Первый участок (рис. 2.2Iв; $0 < z_1 < l$).

$\Sigma Y = qz_1 + Q(z_1) = 0$, $Q(z_1) = -qz_1$ - линейно переменная функция с $Q(0) = 0$ и $Q(l) = -ql$.

$\Sigma M_{c_1} = qz_1 z_1 / 2 - M(z_1) = 0$, $M(z_1) = qz_1^2 / 2$ - квадратная парабола: $M(0) = 0$, $M(l) = ql^2 / 2$; $dM(z_1) / dz_1 = qz_1 = 0$, $z_1 = 0$. Этого достаточно для построения эпюры M на рассматриваемом участке.

Второй участок.

Чтобы сдержать количество слагаемых, фигурирующих в уравнениях равновесия, отрезок балки выделим двумя сечениями: одно слева от опоры Q и бесконечно близко к ней, другое - в произвольном месте участка (рис. 2.2Iг; $0 < z_2 < l$).

В левом сечении действуют найденные ранее $M = ql^2 / 2$ и $Q = ql$, направленные согласно правилам знаков, как показано на рис. 2.2Iг. Другие силы, действующие на рассматриваемый отрезок балки, также изображены на рисунке. Теперь

$\Sigma Y = ql - 3ql / 2 + Q(z_2) = 0$, $Q(z_2) = ql / 2$ - постоянна.

$\Sigma M_{c_2} = ql^2 / 2 + qlz_2 - 3qlz_2 / 2 - M(z_2) = 0$, $M(z_2) = ql^2 / 2 - qlz_2 / 2$ - линейная функция с $M(0) = ql^2 / 2$ и $M(l) = 0$.

Третий участок.

Выделим отрезок балки двумя сечениями: одним левее точки b и бесконечно близко к ней, где действует положительная поперечная сила $ql / 2$, и другим произвольного положения с неизвестными $Q(z_3)$ и $M(z_3)$ (рис. 2.2Id; $0 < z_3 < l$). В точке b рассматриваемого отрезка действует также сила $2ql$. Далее,

$\Sigma Y = ql / 2 - 2ql - Q(z_3) = 0$, $Q(z_3) = -3ql / 2$.

$\Sigma M_{c_3} = qlz_3 / 2 - 2qlz_3 + M(z_3) = 0$, $M(z_3) = 3qlz_3 / 2$ с $M(0) = 0$ и $M(l) = 3ql^2 / 2$.

Четвертый участок.

Поступим аналогично - выделим отрезок балки сечением, проведенным слева от точки C и бесконечно близко к ней, и сечением произвольного положения (рис. 2.2Iе; $0 < z_4 < l$). Приложим все си-

* При построении эпюры поперечной силы можно рассматривать три участка, т.к. сосредоточенный момент не влияет на равнодействующую суммируемых сил.

лы, внешне по отношению к этому отрезку балки. Из условий равновесия находим

$$\Sigma Y = 3ql/2 + Q(z_4) = 0, \quad Q(z_4) = -3ql/2.$$

$$\Sigma M_{z_4} = 3ql^2/2 + 3qlz_4/2 - 2ql^2 - M(z_4) = 0, \quad M(z_4) = -ql^2/2 + 3qlz_4/2; \quad M(0) = -ql^2/2, \quad M(l) = ql^2.$$

Эпюры Q и M изображены на рис. 2.21 ж, з.

Задачи для самостоятельного решения.

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балках, показанных на рис. 2.22 - 2.28.

Задача 2.5 - рис. 2.22. Задача 2.6 - рис. 2.23. Задача 2.7 - рис. 2.24. Задача 2.8 - рис. 2.25. Задача 2.9 - рис. 2.26. Задача 2.10 - рис. 2.27. Задача 2.11 - рис. 2.28.

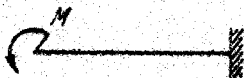


Рис. 2.22

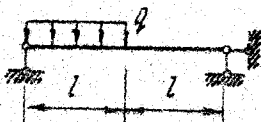


Рис. 2.23

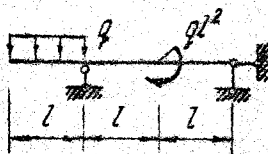


Рис. 2.24

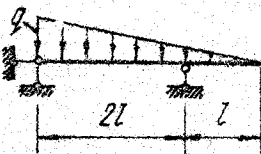


Рис. 2.25

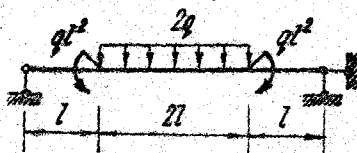


Рис. 2.26

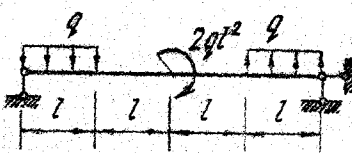


Рис. 2.27

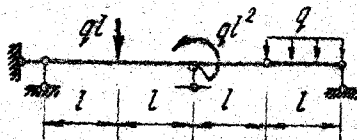


Рис. 2.28

2.4. Некоторые закономерности очертания эпюр внутренних силовых факторов в балках

Примеры 2.5–2.10 проиллюстрировали применение метода сечений к определению величин и направлений поперечных сил и изгибающих моментов в балках и построение эпюр на основе введенных правил знаков. Результаты решения примеров позволяют установить некоторые закономерности, наблюдающиеся в эпюрах, связь очертаний эпюр с видом нагрузки и между собой.*

2.4.1. Участок, свободный от распределенной нагрузки (рис. 2.16а, 2.20а, 2.21а).

Поперечная сила на таком участке постоянна (рис. 2.16б; 2.20г, д; 2.21г, д, е). Объясняется это тем, что равнодействующая внешних сил, приложенных с рассматриваемой стороны от сечения, не зависит от положения сечения.

Изгибающий момент в пределах участка изменяется по линейному закону, поскольку линейно зависят от x плечи внешних сил относительно рассматриваемого сечения.

2.4.2. Участок балки, подверженный равномерно распределенной нагрузке (рис. 2.17а, 2.18а, 2.20а, 2.21а).

Поперечная сила линейно переменна. Это происходит потому, что пропорционально x изменяется равнодействующая внешних сил, приложенных к рассматриваемой свободной части балки (рис. 2.17в, 2.18г, 2.20е, 2.21ж).

Изгибающий момент описывается квадратной параболой. Причиной этого является линейная зависимость от x и равнодействующих, фигурирующих в условиях равновесия, и их плеч.

2.4.3. Участок балки, подверженный распределенной нагрузке с линейно переменной интенсивностью (рис. 2.19а).

Поперечная сила в пределах такого участка описывается квадратной параболой. Происходит это потому, что интенсивность нагрузки в месте сечения линейно зависит от x , а равнодействующая распределенной нагрузки, приложенной к рассматриваемому отрезку балки, равна площади эпюры (содержит произведение длины на высоту).

* В следующей главе будут приведены доказательства закономерностей очертания эпюр. Здесь же пойдём по пути констатации и обобщения фактов.

Изгибающий момент, в выражение которого входит произведение квадратично зависящей от x силы на плечо, пропорциональное x , описывается кубической параболой.

2.4.4. Участок, подверженный распределенной нагрузке с произвольно изменяющейся интенсивностью.

Принятое правило знаков для Q обуславливает зависимость изменения поперечной силы от направления нагрузки: по мере движения сечения вправо поперечная сила возрастает, если нагрузка направлена вверх (рис. 2.17в), и убывает, если - вниз (рис. 2.18г, 2.20е, 2.21ж).

Изгибающий момент описывается нелинейной функцией. При этом кривая на эпюре изгибающих моментов обращена выпуклостью в сторону действия нагрузки.

2.4.5. Место приложения сосредоточенной силы (рис. 2.20а, 2.21а).

В месте приложения сосредоточенной силы поперечная сила изменяется скачком (рис. 2.20е, 2.21ж). Величина скачка равна величине внешней силы. Действительно, из условия равновесия бесконечно короткого отрезка балки, к которому приложена внешняя сила (рис. 2.29а), следует $Q_k + F - Q_{k+1} = 0$,

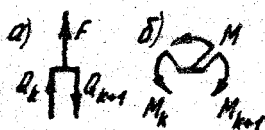


Рис. 2.29

т.е. $Q_{k+1} = Q_k + F$.

2.4.6. Место приложения сосредоточенного момента (рис. 2.20а, 2.21а).

В месте приложения сосредоточенного момента изгибающий момент изменяется скачком. Величина скачка равна величине внешнего момента. Это следует из условия равновесия (рис. 2.29б):

$M_k + M - M_{k+1} = 0$, откуда $M_{k+1} = M_k + M$.

Отмеченные закономерности очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов позволяют, с одной стороны, использовать их для проверки правильности решения задач, с другой, при определенном навыке уменьшать объем вычислительных и графических действий, выбирая наиболее короткий путь построения эпюр Q и M .

Приведенный перечень закономерностей не является исчерпывающим. В следующей главе будут даны дополнения к нему.

2.5. Эпюры внутренних силовых факторов в плоских системах

Плоской системой будем называть стержневую конструкцию, имеющую общую главную плоскость (рис. 2.30).

Ограничимся случаем, когда внешняя нагрузка лежит в главной плоскости. Поскольку внешние силы образуют плоскую произвольную систему сил, отличными от нуля в поперечных сечениях стержней могут быть три внутренних силовых фактора - продольная, поперечная силы и изгибающий момент.

Для построения эпюр в плоских системах достаточно тех правил знаков, которые были введены выше. Однако из-за геометрической специфики плоских систем к правилам знаков требуются дополнительные рекомендации.

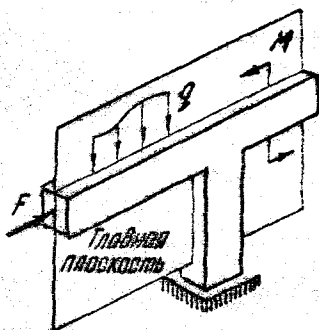


Рис. 2.30

При определении знака поперечной силы в вертикальных и наклонных стержнях следует повернуть рисунок так, чтобы рассматриваемый стержень стал горизонтальным. При этом не имеет значения, в какую сторону повернуть рисунок - по или против хода часовой стрелки.

При построении эпюр изгибающих моментов ординаты следует откладывать со стороны растянутых волокон стержня.*

Перейдем к примерам.

Пример 2.II. Построить эпюры внутренних силовых факторов в плоской раме, изображенной на рис. 2.31а.

* Если опираться на правило знаков, сформулированное для балок, знак момента будет зависеть от того, в какую сторону повернут рисунок - по или против хода часовой стрелки. Очертание же эпюры в обоих случаях будет одинаковым. Во избежание такой неоднозначности и введена иная (равнозначная прежней) рекомендация. Естественно, при этом знак на эпюре изгибающих моментов ставить не следует. Сформулированным правилом построения эпюр изгибающих моментов можно пользоваться и в балках.

Способ закрепления рамы освобождает от необходимости определения опорных реакций.

На раме два участка.

Горизонтальный участок (рис. 2.31б; $0 < z < 3l$).

Проведем сечение, отбросим правую часть, заменив ее действие внутренними силовыми факторами положительного направления.

Составим и решим уравнения равновесия.

$$\sum Z = N_z(z) = 0.$$

$\sum Y = qz + Q_z(z) = 0$, $Q_z(z) = -qz$; поперечная сила линейно переменна, $Q_z(0) = 0$, $Q_z(3l) = -3ql$.

$\sum M_{C_1} = qz \cdot z/2 - M_z(z) = 0$, $M_z(z) = qz^2/2$; изгибающий момент описывается квадратной параболой с $M_z(0) = 0$, $M_z(3l) = 4,5ql^2$, экстремум ($dM_z(z)/dz = qz = 0$) при $z = 0$.

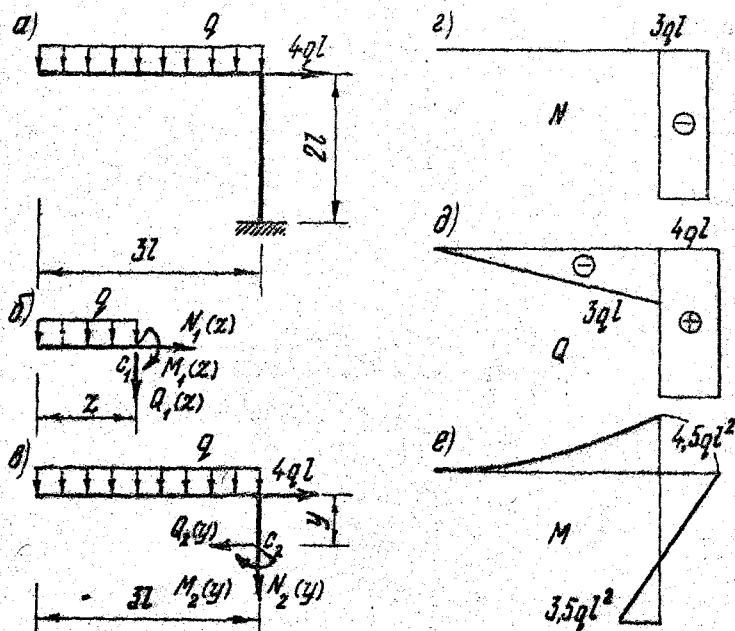


Рис. 2.31

Вертикальный участок (рис. 2.31в; $0 < y < 2l$).

Рассечем вертикальный стержень поперечной плоскостью и от-

бросим нижнюю его часть. Заменяя действие отброшенной части, продольную силу примем растягивающей, поперечную силу направленной влево (положительной, в чем нетрудно убедиться, повернув рисунок на 90°); допустим, что изгибающий момент растягивает правые волокна.

Из условий равновесия находим:

$$\sum Y = q_3 l + N_2(y) = 0, N_2(y) = -3ql;$$

$$\sum Z = 4ql - Q_2(y) = 0, Q_2(y) = 4ql;$$

$$\sum M_c = q_3 l^2 / 2 - 4ql y - M_2(y) = 0, M_2(y) = 4,5ql^2 - 4qly - \text{линейная функция с } M_2(0) = 4,5ql^2 \text{ (растянуты правые волокна) и } M_2(2l) = -3,5ql^2 \text{ (растянуты левые волокна).}$$

Эпюры N , Q и M изображены на рис. 2.31г, д, е.

Пример 2.12. Построить эпюры внутренних силовых факторов в плоской раме (рис. 2.32а).

Для определения внутренних силовых факторов потребуется найти опорные реакции. Освободим раму от опор, зададимся направлением реакций (рис. 2.32б), составим и решим уравнения равновесия.

$$\sum M_b = Z_a l + 3ql \cdot 2l + ql \cdot l / 2 - 2ql^2 = 0, Z_a = -4,5ql.$$

$$\sum Z = Z_a + 3ql + Z_b = 0, Z_b = 1,5ql.$$

$$\sum Y = ql - Y_b = 0, Y_b = ql.$$

Рама, освобожденная от опор, с внешними силами, действующими на нее, показана на рис. 2.32в.

Перейдем к построению эпюр.

На раме пять участков. Свободные части рамы, отсеченные поперечными плоскостями и рассматриваемые в равновесии, изображены на рис. 2.32г-з. На этих же рисунках указаны предполагаемые направления определяемых внутренних силовых факторов (силы N и Q предполагаются положительными). Составим уравнения равновесия и определим усилия.

Участок ac (рис. 2.32г; $0 < y_1 < l$).

$$\sum Z = Q_1(y_1) - 4,5ql = 0, Q_1(y_1) = 4,5ql;$$

$$\sum Y = N_1(y_1) = 0;$$

$$\sum M_c = M_1(y_1) - 4,5ql y_1 = 0, M_1(y_1) = 4,5ql y_1 - \text{линейная функция; } M_1(0) = 0, M_1(l) = 4,5ql^2, \text{ растянуты правые волокна.}$$

Участок cd (рис. 2.32д; $0 \leq z_2 \leq 2l$).

$$\sum Z = 4,5ql - 3ql - N_2(z_2) = 0, N_2(z_2) = 1,5ql;$$

$$\sum Y = Q_2(z_2) = 0;$$

$$\sum M_{C_2} = 4,5qlz_2 + M_2(z_2) = 0, M_2(z_2) = -4,5ql^2, \text{ растянуты вниз -}$$

ние воложна.

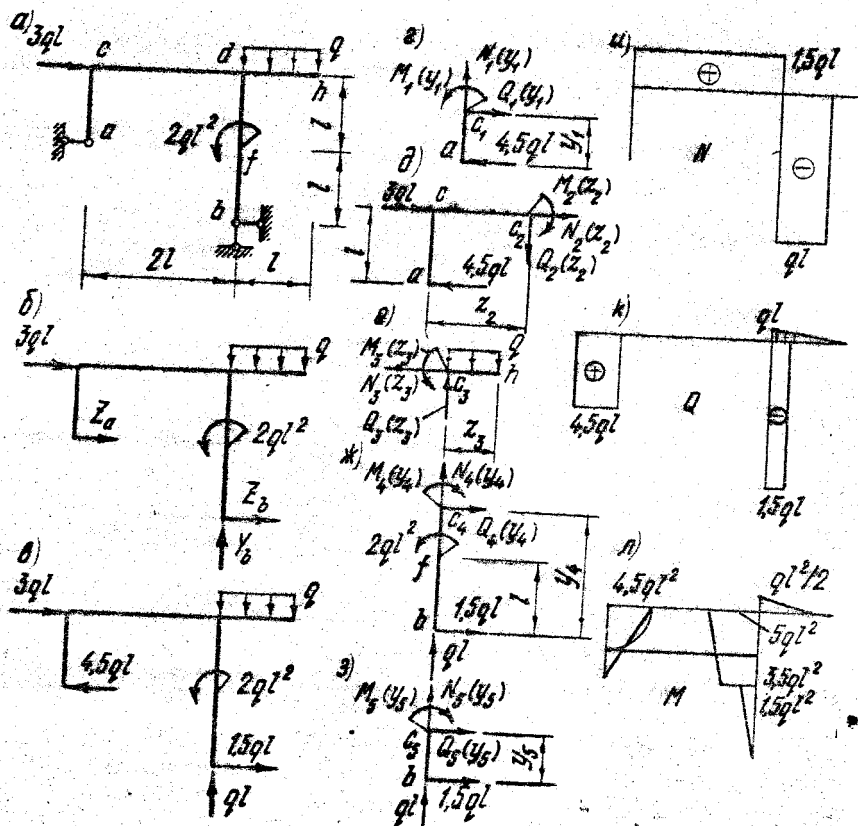


Рис. 2.32

Участок dh (рис. 2.32е; $0 \leq z_3 \leq l$).

$$\sum Z = N_3(z_3) = 0;$$

$$\sum Y = Q_3(z_3) - qz_3 = 0, Q_3(z_3) = qz_3 - \text{линейная функция с}$$

$$Q_3(0) = 0 \text{ и } Q_3(l) = ql;$$

$\Sigma M_{C_3} = M_3(z_3) - qz_3 \cdot z_3/2 = 0$, $M_3(z_3) = qz_3^2/2$ - квадратная парабола; $M_3(0) = 0$, $M_3(l) = ql^2/2$, $dM_3(z_3)/dz_3 = qz_3 = 0$, $z_3 = 0$. Растянуты верхние волокна.

Участок af (рис. 2.32ж; $l - y_4 < 2l$).

$$\Sigma Y = N_4(y_4) + ql = 0, N_4(y_4) = -ql.$$

$$\Sigma Z = Q_4(y_4) + 1,5ql = 0, Q_4(y_4) = -1,5ql.$$

$$\Sigma M_{C_4} = M_4(y_4) - 2ql^2 - 1,5ql y_4 = 0, M_4(y_4) = 2ql^2 + 1,5ql y_4$$

$$M_4(l) = 3,5ql^2, M_4(2l) = 5ql^2. \text{ Растянуты левые волокна.}$$

Участок bf (рис. 2.32в; $0 < y_5 < l$).

$$\Sigma Y = N_5(y_5) + ql = 0, N_5(y_5) = -ql.$$

$$\Sigma Z = Q_5(y_5) + 1,5ql = 0, Q_5(y_5) = -1,5ql.$$

$\Sigma M_{C_5} = M_5(y_5) - 1,5ql y_5 = 0$, $M_5(y_5) = 1,5ql y_5$ - линейная функция с $M_5(0) = 0$ и $M_5(l) = 1,5ql^2$. Растянуты левые волокна.

Эпюры внутренних силовых факторов приведены на рис. 2.32ж-д.

Пример 2.13. Для консольного стержня, очерченного по дуге окружности (рис. 2.33а), построить эпюры внутренних силовых факторов.

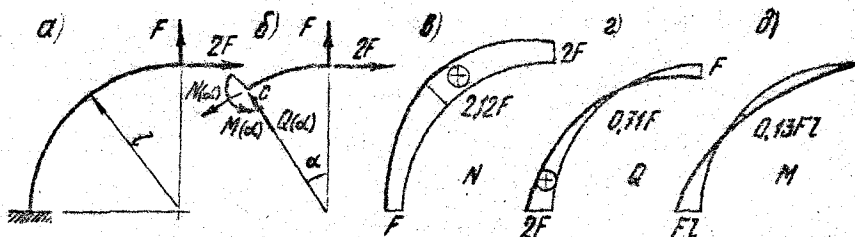


Рис. 2.33

Применяя метод сечений, рассмотрим равновесие отрезка стержня (рис. 2.33б; $0 < \alpha < 90^\circ$).

Спроектируем силы, приложенные к отрезку, на направление N : $N(\alpha) - F \sin \alpha - 2F \cos \alpha = 0$, $N(\alpha) = F(\sin \alpha + 2 \cos \alpha)$.

Теперь те же силы спроектируем на радиус:

$$Q(\alpha) + F \cos \alpha - 2F \sin \alpha = 0, Q(\alpha) = F(2 \sin \alpha - \cos \alpha).$$

Приравняем нулю сумму моментов сил относительно точки C :

$$M(\alpha) + F l \sin \alpha - 2F(l - l \cos \alpha) = 0, M(\alpha) = F l (2(1 - \cos \alpha) - \sin \alpha),$$

Эпюры внутренних силовых факторов, построенные по этим выражениям, приведены на рис. 2.33в-д. На эпюрах указаны значения для $\alpha = 0, 45$ и 90° .

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.12. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, изображенной на рис. 2.34.

Задача 2.13. Построить эпюры внутренних силовых факторов в круговой арке, изображенной на рис. 2.35. Интенсивность распределенной нагрузки задана на единицу вертикального линейного размера.

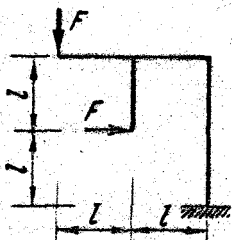


Рис. 2.34

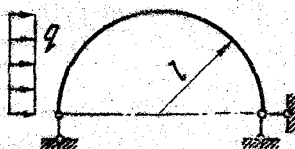


Рис. 2.35

2.6. Эпюры внутренних силовых факторов в общем случае

Общим случаем называется такой, когда силы, действующие на стержневую конструкцию, образуют произвольную пространственную систему сил и в поперечных сечениях возникает по шесть внутренних силовых факторов.

Ограничимся стержневыми конструкциями, у которых главные плоскости стержня параллельны соответствующим координатным плоскостям. Например, в раме, изображенной на рис. 2.36а, главные плоскости стержня длиной l параллельны плоскостям xu и xz (рис. 2.36б), а длиной $2l$ — xz и yz .

В общем случае будем пользоваться теми же правилами построения эпюр, что и в плоских системах, но с одним дополнением: при определении знака поперечной силы будем смотреть против координатной оси, перпендикулярной строящейся эпюре^{*}.

^{*}Если это не обусловить, возможно противоречие в установлении знака поперечной силы.

Проиллюстрируем методику построения эпюр примером.

Пример 2.14. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, показанной на рис. 2.36а.

Рама заделана. Определять опорные реакции нет необходимости. На раме два участка.

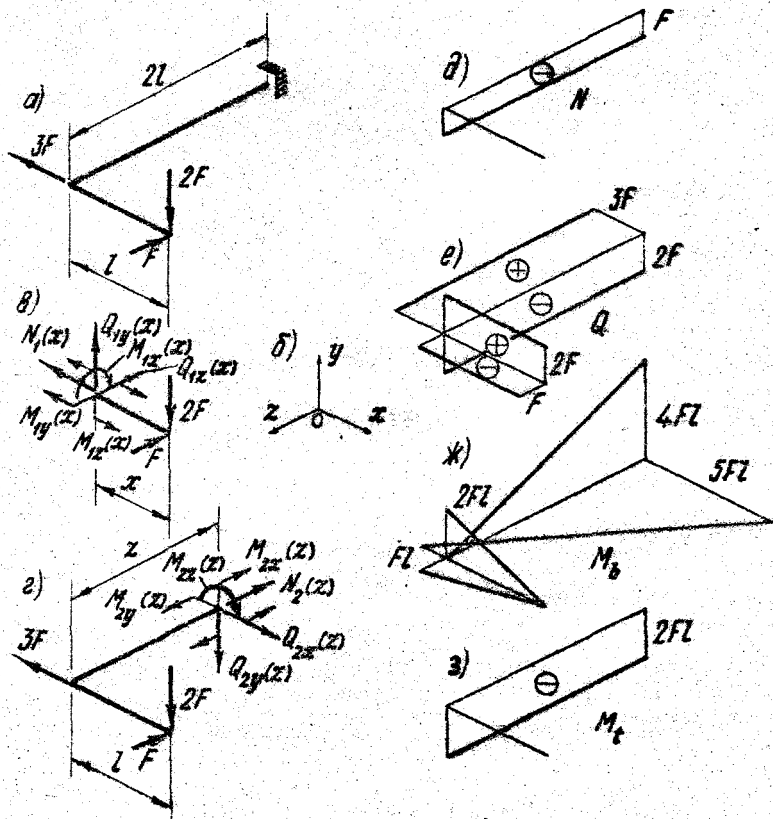


Рис. 2.36

Первый участок (рис. 2.36в; $0 < x < l$).

При выборе положительных направлений сил, заменяющих действие отброшенной части, $N_1(x)$ принята растягивающей, $Q_{1y}(x)$, приложенная слева, - вверх (при взгляде против оси z), сила $Q_{1z}(x)$, также приложенная слева, тоже - вверх (здесь взгляд направлен против оси y). Крутящий момент $M_{1x}(x)$ направлен против хода ча-

совой стрелки (если смотреть со стороны отброшенной части). Направления изгибающих моментов $M_{1y}(x)$ и $M_{1z}(x)$ выбраны произвольно.

Ориентируясь на координатные оси, проведенные через центр тяжести сечения, составим и решим уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_1(x) = 0;$$

$$\Sigma Y = Q_{1y}(x) - 2F = 0, \quad Q_{1y}(x) = 2F;$$

$$\Sigma Z = Q_{1z}(x) + F = 0, \quad Q_{1z}(x) = -F;$$

$$\Sigma M_x = M_{1x}(x) = 0;$$

$\Sigma M_y = M_{1y}(x) - Fx = 0, \quad M_{1y}(x) = Fx$ - линейная функция с $M_{1y}(0) = 0$ и $M_{1y}(l) = Fl$; растянуты ближние (левые) волокна.

$\Sigma M_z = M_{1z}(x) - 2Fx = 0, \quad M_{1z}(x) = 2Fx$ - также линейная функция с $M_{1z}(0) = 0, \quad M_{1z}(l) = 2Fl$; растянуты верхние волокна.

Второй участок (рис. 2.36г; $0 < z < 2l$).

При выбранных направлениях внутренних силовых факторов уравнения равновесия приводят к таким результатам:

$$\Sigma X = Q_{2x}(z) - 3F = 0, \quad Q_{2x}(z) = 3F;$$

$$\Sigma Y = Q_{2y}(z) + 2F = 0, \quad Q_{2y}(z) = -2F;$$

$$\Sigma Z = N_2(z) + F = 0, \quad N_2(z) = -F;$$

$\Sigma M_x = M_{2x}(z) - 2Fz = 0, \quad M_{2x}(z) = 2Fz$ - линейная функция, $M_{2x}(0) = 0, \quad M_{2x}(2l) = 4Fl$, растянуты верхние волокна.

$\Sigma M_y = M_{2y}(z) + Fl - 3Fz = 0, \quad M_{2y}(z) = 3Fz - Fl$ - линейная функция, $M_{2y}(0) = -Fl$ (растянуты левые (дальние) волокна), $M_{2y}(2l) = 5Fl$ (растянуты правые (ближние) волокна).

$$\Sigma M_z = M_{2z}(z) + 2Fl = 0, \quad M_{2z}(z) = -2Fl.$$

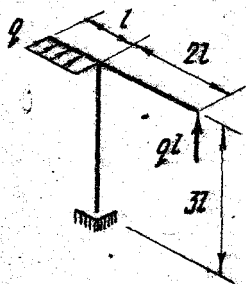


Рис. 2.37

Эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 2.36д-ж. На нем M_y - изгибающие моменты; M_x - крутящие моменты.

Задача 2.14. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, изображенной на рис. 2.37. При построении эпюр направление осей сопутствующей координатной системы выбрать по своему усмотрению. Задачу решить самостоятельно.

3. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ УСКОРЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Построение эпюр внутренних силовых факторов — лишь этап комплексной задачи о прочности и жесткости конструкции. В некоторых задачах этот этап повторяется неоднократно. Поэтому немаловажно не только безошибочно строить эпюры, но и тратить на это как можно меньше времени, чтобы уменьшить трудоемкость решения задач.

Первыми и естественными шагами в этом направлении являются уменьшение числа сопутствующих графических иллюстраций, сокращения в записях условий равновесия, ускорения вычислительных операций и т.п. Так, при развитии навыков, определяя реакции опор, обычно совмещают рисунки расчетной схемы и стержневой системы, освобожденной от опор (например, рис. 2.32а, б, в). Рассматривая свободные части конструкции, также можно сократить количество рисунков (скажем, рис. 2.32г-з). Нередко отказываются от записи и решения уравнений равновесия, проделывая это в уме. Но при этом следует помнить, что подобные ускорения процесса решения задач допустимы лишь при свободном владении методом сечений и аппаратом статики твердого тела. Возможность и степень использования указанных приемов зависят от подготовленности, склонностей и навыков студента и определяется им индивидуально.

Другой путь ускорения — замена методов линейной алгебры методами математического анализа. Он требует владения более сложным разделом математики, но, как показывает опыт, успешно осваивается студентами при настойчивых и систематических упражнениях. Использование таких специальных приемов позволяет сравнительно быстро построить эпюры, несущие информацию, необходимую для решения общей задачи о надежности конструкции. Этим приемам и методам посвящена настоящая глава.

При расчете сложных стержневых систем большое значение приобретает рациональное использование метода сечений — порядок расчленения конструкции для определения сил взаимодействия, выделение свободных частей расчленением стержней, последовательность и форма записи уравнений равновесия и т.д. Оптимально построив очередность этих действий, удается, как правило, избежать процедуры решения громоздких систем уравнений и прийти к результату

кратчайшим путем. Эти вопросы рассматриваются в основном в строительной механике стержневых систем и здесь почти не затрагиваются.

3.1. Следствия метода сечений

3.1.1. Рассмотрим свободный стержень, находящийся в равновесии под действием произвольной системы сил (рис. 3.1а)^{*}. Найдем внутренние силовые факторы в некотором выбранном сечении стержня. Для этого воспользуемся методом сечений.

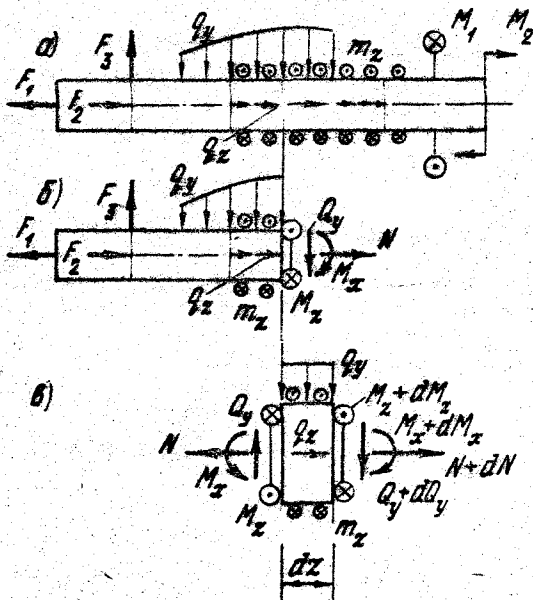


Рис. 3.1

Освободим левую часть стержня, заменим действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами (рис. 3.1б), составим и решим уравнения равновесия.

$\sum Z = \sum Z_i + N = 0$, откуда $N = -\sum Z_i$. В записанных равенствах $\sum Z_i$ — сумма проекций внешних сил, приложенных к стержню слева от рассматриваемого сечения.

* Отсутствие поперечной нагрузки в плоскости xz не уменьшает общность доказательства.

Из условия равновесия всего стержня следует $\sum Z_l + \sum Z_r = 0$ ($\sum Z_r$ - сумма проекций внешних сил, приложенных справа от сечения). Итак, для продольной силы справедливы равенства

$$|N| = |\sum Z_l| = |\sum Z_r|. \quad (3.1)$$

Величина продольной силы равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, на ось стержня.

Спроектируем теперь силы, приложенные к левому отрезку стержня (рис. 3.1б), на вертикальную ось. $\sum Y = \sum Y_l + Q_y = 0$, откуда

$Q_y = -\sum Y_l$. Принимая во внимание, что $\sum Y_l + \sum Y_r = 0$, получаем

$$|Q_y| = |\sum Y_l| = |\sum Y_r|. \quad (3.2)$$

Здесь $\sum Y_l$ - сумма проекций внешних сил, приложенных к стержню слева от сечения; $\sum Y_r$ - то же - справа.

Обобщая полученные результаты на случай действия горизонтальных поперечных сил, запишем

$$|Q_x| = |\sum X_l| = |\sum X_r|. \quad (3.3)$$

Таким образом, величина поперечной силы равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, на соответствующую главную центральную ось.

Приравнивая сумму моментов сил, приложенных к отрезку стержня (рис. 3.1б), относительно оси x , получаем: $\sum M_x = \sum M_{xl} + M_x = 0$,

$M_x = -\sum M_{xl}$. Но $\sum M_{xl} = -\sum M_{xr}$. Отсюда следует

$$|M_x| = |\sum M_{xl}| = |\sum M_{xr}|. \quad (3.4)$$

Аналогично

$$|M_y| = |\sum M_{yl}| = |\sum M_{yr}|. \quad (3.5)$$

Величина изгибающего момента равна алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных к стержню с одной стороны от сечения, относительно соответствующей главной центральной оси.

Наконец, $\sum M_z = \sum M_{zl} + M_z = 0$, $M_z = -\sum M_{zl}$; $\sum M_{zl} = -\sum M_{zr}$. Итак,

$$|M_z| = |\sum M_{zl}| = |\sum M_{zr}|. \quad (3.6)$$

Величина крутящего момента равна алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных к стержню с одной стороны от сечения, относительно продольной оси.

Соотношения (3.1)-(3.6) позволяют определять внутренние силовые факторы в сечении стержня, не изображая свободную отсечен-

ную часть стержня и не записывая уравнения равновесия. Это сокращает количество графических действий и записей.

3.1.2. Для определения вида функции, описывающей изменение внутреннего силового фактора по длине стержня, также воспользуемся методом сечений. Рассмотрим бесконечно короткий свободный отрезок стержня (рис. 3.1в). Внешние силы, приложенные к нему, показаны на рисунке. Составим и решим уравнения равновесия.

$$\sum Z = N - q_x dz - (N + dN) = 0, \text{ откуда } -q_x dz = dN \text{ или} \\ -q_x = dN/dz. \quad (3.7)$$

Интенсивность продольной распределенной нагрузки, взятая с обратным знаком, равна производной продольной силы.

$$\sum Y = Q_y - q_y dz - (Q_y + dQ_y) = 0, \text{ откуда } -q_y dz = dQ_y \text{ или} \\ -q_y = dQ_y/dz. \quad (3.8)$$

Аналогично

$$-q_x = dQ_x/dz. \quad (3.9)$$

Интенсивность поперечной распределенной нагрузки, взятая с обратным знаком, равна производной поперечной силы, действующей в той же плоскости.

Суммируя моменты приложенных сил, получаем $\sum M_x = M_x - Q_y dz + q_y dz dz/2 - (M_x + dM_x) = 0$. После приведения подобных членов и отбрасывания пренебрежимо малого слагаемого $q dz^2/2$ приходим к равенству

$$-Q_y = dM_x/dz. \quad (3.10)$$

Обобщая это равенство на случай действия горизонтальной поперечной нагрузки, запишем

$$-Q_x = dM_y/dz. \quad (3.11)$$

Взятая с обратным знаком поперечная сила равна производной изгибающего момента, действующего в той же плоскости.

Рассматривая моменты относительно оси z , запишем $\sum M_z = M_z - m_z dz - (M_z + dM_z) = 0$, откуда $-m_z dz = dM_z$ или

$$-m_z = dM_z/dz. \quad (3.12)$$

Взятая с обратным знаком интенсивность моментной распределенной нагрузки равна производной крутящего момента.

Дифференциальные соотношения (3.7)-(3.12) позволяют установить вид функции, описывающей изменение соответствующего внут-

ренного силового фактора. Кроме того, они дают возможность получать ряд других соотношений между внешней нагрузкой и внутренними силовыми факторами, применение которых при построении эпюр сокращает объем требуемых операций. Техника применения дифференциальных зависимостей и некоторых следствий из них проиллюстрирована ниже.

При построении эпюр внутреннего силового фактора будем придерживаться такого плана:

- 1) В случае необходимости определим опорные реакции.
 - 2) Исходя из вида внешней нагрузки и геометрической схемы конструкции, разобьем последнюю на участки.
 - 3) Построим эпюру в пределах рассматриваемого участка. Этот этап включает:
 - а) установление вида функции, описывающей характер изменения внутреннего силового фактора; необходимую для этого информацию можно получить из соответствующего равенства (3.7)–(3.12);
 - б) выбор числа и характерных сечений; число сечений определяется количеством точек, необходимых для построения эпюр, и требуемой информацией;
 - в) определение величины и знака (направления) внутреннего силового фактора в каждом из выбранных сечений;
 - г) графическое оформление эпюры на участке.
- Пункт 3 плана повторим для всех участков.

3.2. Эпюры продольных сил

При построении эпюр продольных сил будем опираться на дифференциальное соотношение (3.7), равенство (3.1), определяющее величину продольной силы, и введенное ранее правило знаков.

Рассмотрим примеры.

Пример 3.1. Построить эпюру продольной силы для стержня, показанного на рис. 3.2а. Интенсивность распределенной нагрузки постоянна.

Стержень закреплен правым концом, левый свободен. Определять опорные реакции нет необходимости.

На стержне три участка.

Рассмотрим левый участок.

Воспользуемся равенством (3.7) $-q_z = dN/dz$. Поскольку на рассматриваемом участке $q_z = 0$, продольная сила постоянна. Достаточно найти N в любом сечении участка.

Возьмем произвольное сечение I. Примем во внимание равенство (3.1) $|N| = |\sum Z_i|$. Суммируем "левые" внешние силы, получаем $N_1 = -ql$. Знак силы N_1 приписан на основании правила знаков для N . При сжатии продольная сила считается отрицательной.

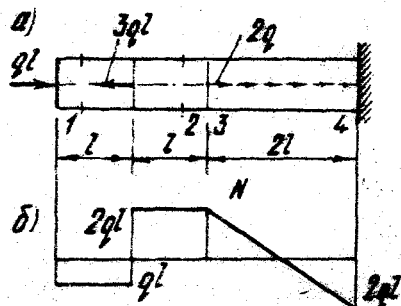


Рис. 3.2

Средний участок.

Поскольку на участке нет распределенной нагрузки, сила N постоянна.

Рассматривая силы, приложенные левее сечения 2, находим $N_2 = -ql + 3ql = 2ql$.

Правый участок.

На участке действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности. Следовательно, dN/dz постоянна. Это значит, что продольная сила линейно переменна.

Чтобы построить график линейно переменной функции, достаточно найти ее в двух сечениях, например 3 и 4.

В сечении 3 сила $N_3 = N_2 = 2ql$, так как скачком продольная сила изменяется только в месте приложения внешней сосредоточенной силы. На границе среднего и правого участков такой нет. В сечении 4 $N_4 = -ql + 3ql - 2q \cdot 2l = -2ql$.

Эпиюра продольной силы построена на рис. 3.2б.

Пример 3.2. Построить эпюру продольных сил для фермы, показанной на рис. 3.3а. Угол $\alpha = 30^\circ$.

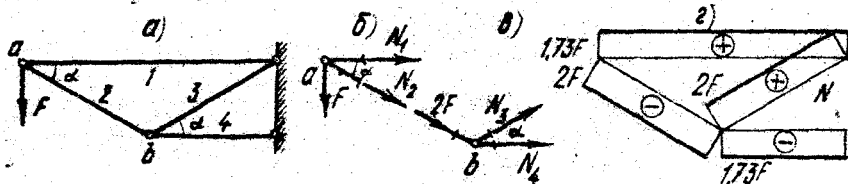


Рис. 3.3

В пределах каждого стержня соответствующая ему сила N постоянна. Поэтому рассекать стержни можно в любых местах.

Воспользоваться равенством (3.1) в данном случае нельзя - оно получено для отдельного свободного стержня. Поэтому все операции метода сечений выполним непосредственно на ферме.

Рассечем стержни 1 и 2 поперечными плоскостями. Рассмотрим равновесие узла a . На него действуют три внешние силы: F , N_1 и N_2 (рис. 3.3б). Из уравнений равновесия следует

$$F + N_2 \sin \alpha = 0, N_2 = -2F. \text{ Стержень 2 сжат.}$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha = 0, N_1 = 1,73F. \text{ Стержень 1 растянут.}$$

Теперь рассмотрим равновесие узла b . Внешние силы, действующие на него, — сжимающая сила в левом наклонном стержне и неизвестные силы N_3 и N_4 (рис. 3.3в). Условия равновесия и их результаты:

$$2F \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, N_3 = 2F \text{ (растяжение);}$$

$$N_3 \cos \alpha + N_4 = 0, N_4 = -1,73F \text{ (стержень 4 сжат).}$$

Эпюра продольных сил показана на рис. 3.3г.

3.3. Эпюры крутящих моментов

Поскольку в этой главе не предполагается изображение свободной части стержня и составление уравнений равновесия, сформулируем иначе введенное выше правило знаков для крутящих моментов.

Внешние моменты, направленные по ходу часовой стрелки, вызывают положительный крутящий момент, а направленные против хода часовой стрелки — отрицательный. При этом смотреть на суммируемые моменты нужно от сечения. Нетрудно убедиться в том, что формулировки правил, приведенные здесь и на с. 18, эквивалентны.

При построении эпюр крутящих моментов используются те же приемы, что и в примере 3.1. Проиллюстрируем их.

Пример 3.3. Построить эпюру крутящего момента для стержня, изображенного на рис. 3.4а. Интенсивность распределенного момента на среднем участке постоянна.

Стержень свободен. Все внешние силы известны. Это дает возможность не только рассматривать силы с любой стороны от сечений, но и выполнять желаемые проверки.

На стержне три участка.

Левый участок.

Здесь нет распределенной нагрузки — $m_z \equiv 0$. Поскольку согласно равенству (3.12) $dM_z/dz = -m_z \equiv 0$, крутящий момент постоянен.

Чтобы найти величину крутящего момента, нужно в соответствии с равенством (3.6) просуммировать внешние моменты с одной стороны от сечения I. Слева от сечения действует внешний момент

4M. Если посмотреть на него от сечения 1, он направлен против хода часовой стрелки. Следовательно, крутящий момент, вызванный им, будет отрицательным. Итак, $M_1 = -4M$.

Правый участок.

Крутящий момент здесь также постоянен. Наметим сечение 2 и просуммируем моменты справа от него: $M_2 = 2M$. Знак плюс в равенстве поставлен потому, что при

взгляде от сечения 2 направо момент $2M$ направлен по ходу часовой стрелки - вызванный им крутящий момент положителен.

Средний участок.

На участке интенсивность внешнего распределенного момента постоянна: $dM_z/dz = -m_z$ - постоянная величина. Отсюда следует, что M_z - линейно переменная функция.

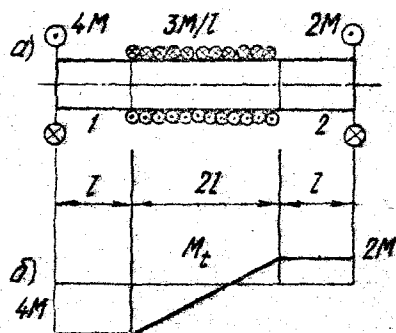


Рис. 3.4

Чтобы построить график линейной функции, достаточно знать два ее значения. Поскольку на границах среднего участка с левым и правым участками нет сосредоточенных моментов, в этих местах функция M_z непрерывна. Таким образом, крутящий момент на границах участка: $M_z = -4M$ (слева) и $M_z = 2M$ (справа). Через эти точки и нужно провести прямую линию.

Эпюра крутящего момента построена на рис. 3.4б.

Чтобы проверить правильность построения эпюры, сравним разность крутящих моментов в крайних сечениях среднего участка с равнодействующей приложенной к нему нагрузки: $2M - (-4M) = 6M$; $3M \cdot 2l/l = 6M$. Видим, что они совпадают. Ошибки нет.

3.4. Следствия дифференциальных зависимостей между внешней нагрузкой и внутренними силовыми факторами в балках

Дифференциальные соотношения (3.8)-(3.11) - это условия равновесия. Их не следует рассматривать как независимые уравнения. Они эквивалентны равенствам (3.2)-(3.5). Спецификой зависимостей (3.8)-(3.11) является их дифференциальная форма, которая позво-

ляет, опираясь на математический анализ, установить признаки очертания графиков функций, разрабатывать и применять рабочие приемы ускоренного построения эшпр^{*}

Приведем еще раз соотношения (3.8) и (3.10):

$$-q_y = dQ_y/dz, \quad (3.13)$$

$$-Q_y = dM_x/dz. \quad (3.14)$$

Из записанных равенств следует

$$q_y = d^2M_x/dz^2. \quad (3.15)$$

Установим геометрические особенности очертания эшпр Q_y и M_x , отвечающие тому или иному виду внешней нагрузки.

3.4.1. Участок, свободный от распределенной нагрузки: $q_y \equiv 0$.

Соотношение (3.13) позволяет записать равенство $Q_y = -\int q_y dz + b$, где b - постоянная интегрирования. При $q_y \equiv 0$ поперечная сила $Q_y = b$ постоянна.

Аналогично из (3.14) $M_x = -\int Q_y dz + c$. Здесь c - также постоянная интегрирования. В рассматриваемом случае $M_x = -bz + c$ - линейно переменная функция.

Итак, на участке, свободном от распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна, изгибающий момент изменяется по линейному закону. Сделанный вывод совпадает с обобщением 2.4.1.

В частном случае, когда $Q_y = b = 0$, изгибающий момент $M_x = c$ - постоянен.

3.4.2. Участок, подверженный равномерно распределенной нагрузке: $q_y = a$.

$$Q_y = -\int q_y dz + b = -az + b - \text{линейно переменная функция};$$

$$M_x = -\int Q_y dz + c = az^2/2 - bz + c - \text{квадратная парабола.}$$

На участке действия равномерно распределенной нагрузки поперечная сила линейно переменна, изгибающий момент описывается квадратной параболой. Это также было замечено в п. 2.4.2.

* Приведенный ниже материал следует рассматривать прежде всего как иллюстрацию метода анализа, опирающегося на дифференциальные соотношения, а не как формирование набора рецептов. Важнее овладеть методом и применять его в каждом конкретном случае, нежели запомнить вытекающие из дифференциальных зависимостей выводы.

3.4.3. Участок, подверженный распределенной нагрузке линейно переменной интенсивности: $q_y = az + b$.

$$Q_y = -\int q_y dz + c = -az^2/2 - bz + c - \text{квадратная парабола};$$

$$M_x = -\int Q_y dz + e = az^3/6 + bz^2/2 - cz + e - \text{кубическая парабола.}$$

На участке действия распределенной нагрузки линейно переменной интенсивности поперечная сила описывается параболой второй степени, а изгибающий момент — параболой третьей степени (см. также п. 2.4.3).

3.4.4. Участок, подверженный распределенной нагрузке с произвольно изменяющейся интенсивностью: $q_y \neq 0$.

$Q_y = -\int q_y dz + b$. Столь общее выражение позволяет заключить, что поперечная сила переменна.

$M_x = -\int Q_y dz + c$. Здесь также можно сделать вывод лишь о том, что изгибающий момент — нелинейная функция.

Рассмотрим два возможных направления нагрузки.

Нагрузка направлена вверх*. В этом случае $q_y < 0$ и, следовательно, $dQ_y/dz > 0$. Поперечная сила возрастает.

Из равенства (3.15) видим, что $d^2M_x/dz^2 < 0$. Это признак выпуклости кривой.

Нагрузка направлена вниз: $q_y > 0$.

Аналогично $dQ_y/dz < 0$ — поперечная сила убывает.

$d^2M_x/dz^2 > 0$ — кривая на эпюре изгибающих моментов вогнута.

Таким образом, приращение поперечной силы совпадает с направлением интенсивности распределенной нагрузки.

Кривая на эпюре изгибающих моментов обращена выпуклостью в ту же сторону, что и распределенная нагрузка (ранее это отмечено в п. 2.4.4).

Остановимся еще на одном частном случае, когда $q_y \neq 0$, но в некоторой точке обращается в нуль. Согласно равенству (3.14) — это признак экстремума. В том сечении, где поперечная сила обращается в нуль, изгибающий момент принимает экстремальное значение.

Выполненный анализ позволил получить качественные сведения о характере изменения поперечной силы и изгибающего момента в

*Здесь существенно, что при выводе равенства (3.8) нагрузка направлена вниз.

зависимости от вида поперечной нагрузки. Эти сведения дают возможность установить количество сечений на участке, в которых нужно определить тот или иной внутренний силовой фактор для построения эпюры с требуемым объемом информации.

Из тех же соотношений можно установить и количественные признаки изменения внутренних силовых факторов. Остановимся на этом.

3.4.5. Из интегрального исчисления известно, что $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ (здесь z_1 и z_2 - пределы интегрирования, а $f(z)$ - интегрируемая функция) есть площадь фигуры, ограниченной осью z , кривой $f(z)$ и ординатами, проведенными на границах участка интегрирования^{*}.

Учитывая это, запишем и преобразуем равенство (3.13): $dQ_y = -q_y dz$;

$\int_{z_1}^{z_2} dQ_y = -\int_{z_1}^{z_2} q_y dz$; $Q_y(z_2) - Q_y(z_1) = -A_q$ - площадь эпюры поперечной нагрузки на отрезке балки z_1, z_2 . Таким образом, изменение поперечной силы на отрезке балки равно взятой с обратным знаком площади эпюры внешней нагрузки в пределах этого отрезка^{жж}. Отметим, что этот вывод справедлив при условии, что на рассматриваемом отрезке балки нет сосредоточенной поперечной силы^{жжж}.

Аналогично из равенства (3.14) следует: $dM_x = -Q_y dz$, $\int_{z_1}^{z_2} dM_x = -\int_{z_1}^{z_2} Q_y dz$, $M_x(z_2) - M_x(z_1) = A_Q$. Изменение изгибающего момента на отрезке балки равно взятой с обратным знаком площади эпюры поперечной силы в пределах этого отрезка. Здесь также следует оговорить условия справедливости вывода: внутри отрезка не должно быть сосредоточенного момента.

3.4.6. Специфика очертания эпюр Q и M в местах действия сосредоточенной силы и сосредоточенного момента отмечена в пп. 2.4.5 и 2.4.6. В месте действия сосредоточенной силы на эпюре поперечной силы имеет место скачок, равный величине силы, на эпюре изгибающего момента - перелом (скачок производной), направленный в сторону действующей силы.

В месте действия сосредоточенного момента изгибающий момент изменяется скачком на величину внешнего момента.

* При условии, что $f(z)$ - ограниченная функция.

жж Здесь предполагается, что площади приписывается знак соответствующей эпюры.

жжж Сосредоточенную силу можно рассматривать как распределенную нагрузку бесконечной интенсивности, приложенную на отрезке нулевой длины. В этом случае интегрирование обретает неоднозначные особенности.

Приведенные следствия дифференциальных зависимостей при изгибе расширяют арсенал средств, применяемых при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, позволяя использовать те или иные приемы, наиболее рациональные в конкретных условиях. Кроме того, отмеченные особенности предоставляет широкие возможности проверок правильности выполненных действий. В условиях ускоренного построения эпюр значимость таких проверок возрастает.

3.5. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в балках

Сформулируем правило знаков для поперечных сил, равнозначное введенному ранее. Внешние силы, действующие слева от сечения

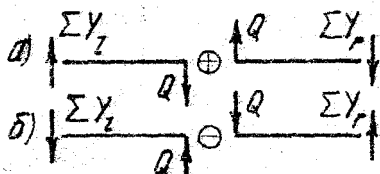


Рис. 3.5

вверх или справа от сечения вниз, вызывает положительную поперечную силу (рис. 3.5а). Естественно обратное: внешние силы, действующие слева от сечения вниз или справа от сечения вверх, вызывает отрицательную поперечную силу (рис. 3.5б).

При построении эпюр изгибающих моментов будем руководствоваться таким правилом: ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются в сторону растянутых волокон^{*}.

Рассмотрим примеры.

Пример 3.4. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента в балке, изображенной на рис. 3.6а.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_a = F \cdot 2l - Y_b \cdot 3l = 0, \quad Y_b = 2F/3;$$

$$\sum M_b = Y_a \cdot 3l - Fl = 0, \quad Y_a = F/3.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = F/3 - F + 2F/3 = 0.$$

Построим эпюру поперечной силы.

На балке два участка. В пределах каждого участка поперечная сила постоянна.

Левый участок. $Q = F/3$. Сила положительна, так как вызвана опорной реакцией Y_a , действующей слева вверх.

^{*} Сформулированное правило построения эпюры изгибающего момента, не использующее знака, удобно тем, что может быть использовано не только в балках, но и в рамах, для которых нельзя сформулировать безупречное правило знаков.

Правый участок. $Q = -2F/3$. Сила отрицательна, так как опорная реакция Y_b действует справа от сечения и направлена вверх.

Проверка: скачок на эпюре на границе участков равен F . Так и должно быть.

Эпюра поперечной силы построена на рис. 3.6б.

Построим теперь эпюру изгибающего момента.

На обоих участках момент изменяется по линейному закону. Достаточно рассмотреть по два сечения.

Левый участок.

В сечении 1, бесконечно близком к шарниру, изгибающий момент равен нулю. В сечении под силой F $M_2 = (F/3) \cdot 2l = 2Fl/3$. Момент опорной реакции растягивает нижние волокна балки. Ординату на эпюре нужно отложить вниз.

Правый участок.

При переходе через границу участков изгибающий момент изменяется непрерывно (внешнего сосредоточенного момента здесь нет). Вторая точка на участке - шарнир b . В нем момент равен нулю. Итак, для второго участка есть два значения изгибающего момента.

Эпюра изгибающего момента построена на рис. 3.6в.

Пример 3.5. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, изображенной на рис. 3.7а.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_a = ql \cdot l - q \cdot 2l \cdot l - 2ql^2 + Y_b \cdot 3l - 0,5 \cdot 3q \cdot l \cdot l / 3 = 0, \quad Y_b = 17ql/6;$$

$$\sum M_b = ql \cdot 4l - Y_a \cdot 3l + q \cdot 2l \cdot 2l - 2ql^2 - 0,5 \cdot 3q \cdot l \cdot 2l / 3 = 0, \quad Y_a = 5ql/3.$$

Проверка: $\sum Y = ql - 5ql/3 + q \cdot 2l - 17ql/6 + 0,5 \cdot 3q \cdot l = 0$.

Построим эпюру поперечной силы.

На балке четыре участка.

Участок 1-2. Поперечная сила постоянна. $Q = -ql$.

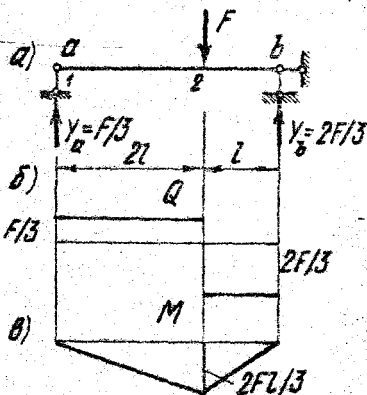


Рис. 3.6

Участок 3-4. Поперечная сила линейно переменна (на участке действует равномерно распределенная нагрузка). В левом сечении участка $Q_3 = -ql + 5ql/3 = 2ql/3$. В правом сечении $Q_4 = -ql + 5ql/3 - q \cdot 2l = -4ql/3$.

Участок 5-6. Поперечная сила постоянна. На границе участков 3-4 и 5-6 она изменяется непрерывно, поэтому $Q_5 = Q_4 = -4ql/3$.

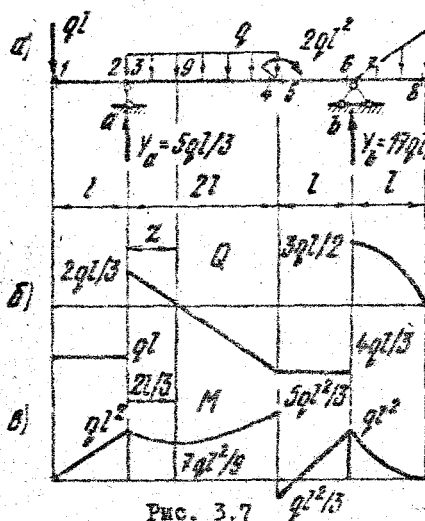


Рис. 3.7

Участок 7-8. Поскольку интенсивность распределенной нагрузки на этом участке изменяется по линейному закону, поперечная сила описывается квадратной параболой. В точке 7 интенсивность нагрузки равна нулю. Это значит, что в этом месте $dQ/dx = 0$. Касательная к кривой Q должна быть вертикальна. Принимаем во внимание наличие такой информации, достаточно най-

ти поперечную силу в двух сечениях рассматриваемого участка.

Суммируя силы справа от сечения 7 и учитывая правило знаков, находим $Q_7 = 3ql/2$. В сечении 8 $Q_8 = 0$.

Эпюра поперечной силы построена на рис. 3.7б.

Проверка: скачок над опорой b равен $3ql/2 + 4ql/3 = 17ql/6$. Именно такое значение имеет спорная реакция Y_b . Проверка сошлась.

Построим эпюру изгибающего момента.

Участок 1-2. Изгибающий момент линейно переменен, так как поперечная сила постоянна. В сечении 1 момент $M_1 = 0$. Над опорой a $M_2 = ql \cdot l = ql^2$. У балки растянуты верхние волокна. Ординату в точке a следует отложить вверх (рис. 3.7в).

Участок 3-4. Поскольку поперечная сила на этом участке изменяется линейно, изгибающий момент описывается квадратной параболой. Проведем кривую по трем точкам. Одна точка (момент над опорой a) есть.

Возьмем второе сечение в том месте, где поперечная сила обращается в нуль, и, следовательно, изгибающий момент принимает экстремальное значение. Местоположение этой точки (отметим ее цифрой 9) определим из подобия треугольников, образующих эпюру на этом участке. $(2ql/3):z = (4ql/3):(2l-z)$, откуда $z = 2l/3$. Изгибающий момент в этом сечении (просуммируем моменты сил, приложенных слева от сечения) $M_9 = ql \cdot 5l/3 - (5ql/3) \cdot 2l/3 + q(2l/3) \cdot (2l/3)/2 = 2ql^2/9$. Результат положительный. Но в выражение момента со знаком плюс включены моменты сил, растягивающие верхние волокна. Таким образом, в сечении 9 у балки растянуты верхние волокна. Ординату следует отложить вверх.

Третью точку на эпюре получим, определив момент в сечении 4. Для иллюстрации большего числа приемов построения эпюр воспользуемся связью изменения момента с площадью эпюры поперечных сил. На участке 3-4 $M_4 - M_3 = -A_q$. Эпюру Q можно рассматривать как трапецию с разнозначными сторонами. Ее площадь равна $A_q = 0,5(2ql/3 + (-4ql/3)) \cdot 2l = -2ql^2/3$. Итак, $M_4 = M_3 - A_q = ql^2 + 2ql^2/3 = 5ql^2/3$. Теперь можно провести квадратную параллелю на рассмотренном участке.

Участок 5-6. Изгибающий момент изменяется линейно. Возьмем два сечения - 5 и 6. Просуммируем моменты "правых" сил: $M_5 = 17ql \cdot 2/6 - 0,5 \cdot 3q \cdot l \cdot 5l/3 = ql^2/3$. Учитывая, что момент опорной реакции, растягивающий нижние волокна балки, включен в выражение со знаком плюс и результат положителен, заключаем - у балки растянуты нижние волокна. Ординату в точке 5 нужно отложить вниз.

$M_6 = 0,5 \cdot 3q \cdot l \cdot 2l/3 = ql^2$. Растянуты верхние волокна. Ординату откладываем вверх.

Участок 7-8. Изгибающий момент описывается кубической параболой, так как поперечная сила - квадратной. Для построения кубической параболы воспользуемся следующим:

- а) изгибающий момент над опорой b известен;
- б) в сечении 8 $M_8 = 0$;
- в) в точке 8 $dM/dx = 0$ (касательная к кривой горизонтальна);
- г) поперечная сила на рассматриваемом участке положительна и монотонно уменьшается по мере движения сечения вправо, что означает монотонное уменьшение производной на эпюре изгибающего момента - выпуклость вниз.

Этого достаточно, чтобы провести кривую.

Эпюра изгибающего момента изображена на рис. 3.7в.

Проверка: скачок $M_4 - M_5 = 5ql^2/3 + ql^2/3 = 2ql^2$ равен величине внешнего момента. Так и должно быть.

В заключение отметим, что приемы, проиллюстрированные на приведенных примерах, не охватывают всего многообразия путей, возможных при построении эпюр. Наличие двух параллельных групп равенств - (3.2)-(3.4), а также (3.13)-(3.15), вытекающих из условий равновесия и, следовательно, дублирующих друг друга, позволяет в процессе решения задач маневрировать, применяя то одни, то другие равенства, наиболее рациональные в тех или иных конкретных условиях. При этом рекомендуется, используя одни для построения эпюр, другие применять для проверок.

Задачи для самостоятельного решения.

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балках, изображенных на рис. 3.8-3.10.

Задача 3.1 - рис. 3.8. Задача 3.2 - рис. 3.9. Задача 3.3 - рис. 3.10.

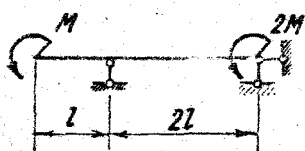


Рис. 3.8

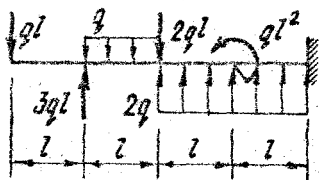


Рис. 3.9

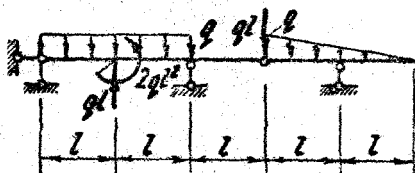


Рис. 3.10

3.6. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в плоских системах

Процедура построения эпюр внутренних силовых факторов в плоских системах опирается на те же приемы и правила, которые были использованы выше.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.6. Построить эпюры внутренних силовых факторов в плоской раме, изображенной на рис. 3.IIа.

Определять опорные реакции не требуется, так как любое сечение выделяет свободную часть рамы.

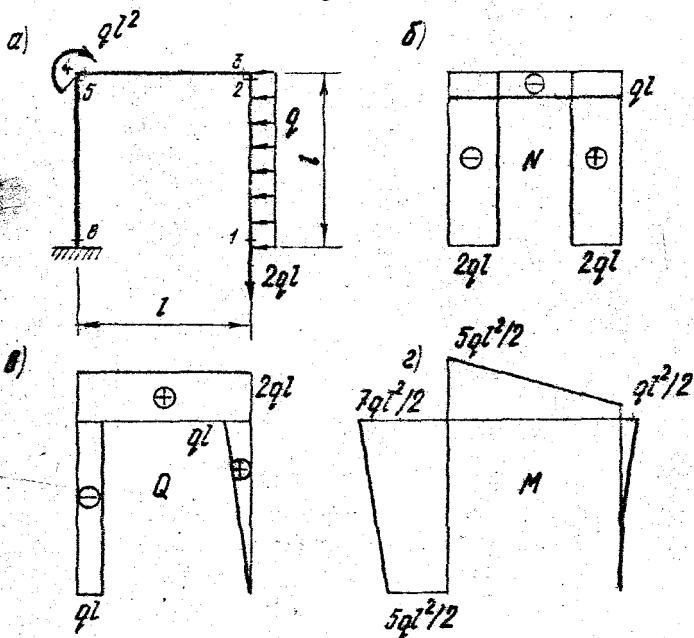


Рис. 3.II

Построим эпюру продольных сил.

На раме три участка. На каждом из них продольные силы постоянны, поскольку к стержням не приложены продольные распределенные нагрузки. Принимая во внимание правило знаков для продольных сил (положительна растягивающая сила) и мысленно отбрасывая ту часть рамы, которая соединена с заземлением, находим:

$$\text{участок 1-2 } N_1 = 2ql;$$

$$\text{участок 3-4 } N_3 = -ql;$$

$$\text{участок 5-6 } N_5 = -2ql.$$

Эпюра продольных сил изображена на рис. 3.IIб.

Построим эпюру поперечных сил.

На участке 1-2 поперечная сила линейно переменна. Рассмот-

рим два сечения. Повернув рисунок по ходу часовой стрелки на 90° , руководствуясь правилом знаков для Q , находим: $Q_1 = 0$, $Q_2 = ql$.

Участок 3-4. Поперечная сила постоянна. Рассмотрев, например, сечение 3, устанавливаем: $Q_3 = 2ql$. Аналогично на участке 5-6 $Q_5 = -ql$ (если повернуть рисунок по ходу часовой стрелки на 90° , то равнодействующую ql следует рассматривать как силу, приложенную к правой части рамы и направленную вверх; если против хода часовой стрелки - сила ql приложена к левой части и направлена вниз).

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 3.IIв.

Перейдем к построению эпюры изгибающих моментов.

На участке 1-2 изгибающий момент изменяется по квадратной параболе. Учитывая, что поперечная сила $Q_1 = 0$, для построения квадратной параболы достаточно найти два значения. В сечении 1 $M_1 = 0$, в сечении 2 $M_2 = ql^2/2 = ql^2/2$. Растянуты правые волокна.

Участок 3-4. Изгибающий момент линейно переменен. Рассмотрим два сечения: $M_3 = ql^2/2$, растянуты верхние волокна; $M_4 = 2ql^2 + ql^2/2 = 5ql^2/2$, растянуты верхние волокна.

Участок 5-6. Здесь изгибающий момент также линейно переменен. $M_5 = 2ql^2 + ql^2/2 + ql^2 = 7ql^2/2$, растянуты левые волокна.

$M_6 = 2ql^2 - ql^2/2 + ql^2 = 5ql^2/2$, растянуты также левые волокна.

Эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 3.IIг.

Пример 3.7. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, изображенной на рис. 3.IIа.

Определим опорные реакции, предположив, что они направлены так, как показано на рисунке:

$$\sum M_a = q \cdot 4l \cdot 2l - Y_b \cdot 7l = 0, \quad Y_b = 8ql/7;$$

$$\sum M_b = Y_a \cdot 7l - q \cdot 4l \cdot 2l = 0, \quad Y_a = 8ql/7;$$

$$\sum Z = Z_a - q \cdot 4l - ql = 0, \quad Z_a = 5ql.$$

Отсутствие отрицательных решений свидетельствует о правильности предварительного выбора направлений реакций.

Построим эпюру продольных сил.

На раме три участка.

Участок 1-2. Продольная сила на этом участке линейно переменна, так как горизонтальная распределенная нагрузка может быть разложена на продольную и поперечную распределенные нагрузки постоянными интенсивностями. Рассмотрим два сечения.

$N_1 = (8ql \sin \alpha) / 7 + 5ql \cos \alpha$. Но $\sin \alpha = 4/5$, $\cos \alpha = 3/5$. Учитывая это, получаем $N_1 = 137ql/35$.

В сечении 2 $N_2 = (8ql \sin \alpha) / 7 + 5ql \cos \alpha - q \cdot 4l \cos \alpha = 53ql/35$.

Участок 3-4. Здесь продольная сила постоянна. $N_3 = 5ql - q \cdot 4l = ql$.

Участок 5-6. На этом участке продольная сила также постоянна. Рассматривая нижнюю часть правого стержня, видим, что $N_5 = -8ql/7$.

Эпюра продольных сил изображена на рис. 3.12б.

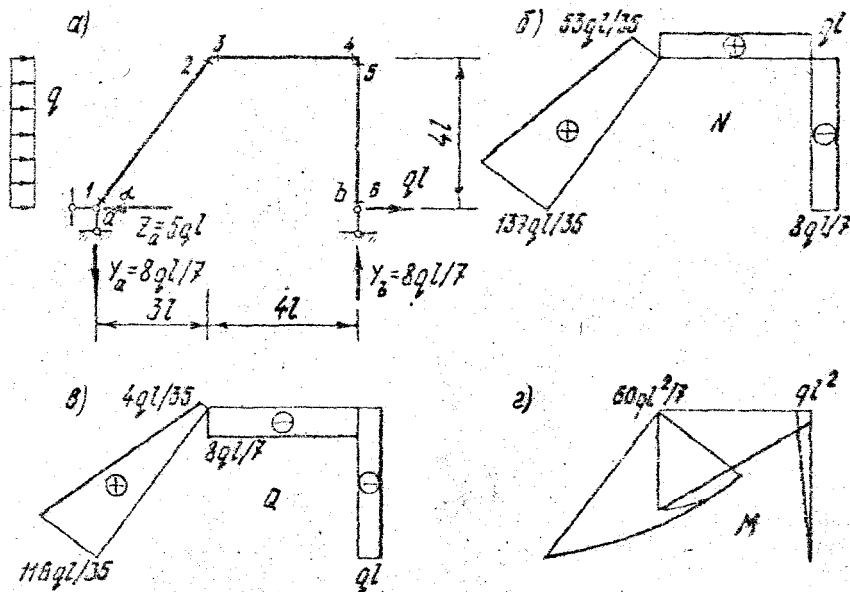


Рис. 3.12

Перейдем к построению эпюры поперечных сил.

Участок 1-2. Поперечная сила линейно переменна. $Q_1 = 5ql \sin \alpha - (8ql \cos \alpha) / 7 = 116ql/35$, $Q_2 = 5ql \sin \alpha - (8ql \cos \alpha) / 7 - q \cdot 4l \sin \alpha = 4ql/35$.

Участок 3-4. Поперечная сила постоянна. $Q_3 = -8ql/7$.

Участок 5-6. Поперечная сила также постоянна. $Q_5 = -ql$.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 3.12в.

Построим эпюру изгибающих моментов.

На участке 1-2 изгибающий момент описывается квадратной параболой. Найдем его в двух сечениях - 1 и 2: $M_1 = 0$, $M_2 = 5ql/4l - q \cdot 4l/2l - 8ql \cdot 3l/7 = 60ql^2/7$. Растянуты внутренние волокна рамы.

Поскольку на этом участке изгибающий момент изменяется монотонно, не достигая экстремума (об этом свидетельствует отсутствие сечения с $Q = 0$), можно провести кривую по двум точкам. Вычерчиваем параболу выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки (рис. 3.12г).

Участок 3-4. Здесь изгибающий момент линейно переменен. $M_3 = M_2 = 60 q l^2 / 7$, поскольку точки 2 и 3 практически совпадают и между ними не приложен сосредоточенный момент. Поэтому все записи, выполненные для M_2 , справедливы и для M_3 . В сечении 3 у рамы растянуты внутренние волокна.

$M_4 = q l^2 = q l^2$ (момент нижней силы). Растянуты внутренние волокна рамы.

На участке 5-6 изгибающий момент также линейно переменен. $M_5 = 0$ (по нижним силам), $M_5 = M_4$. Растянуты левые волокна.

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 3.12г.

Пример 3.8. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, изображенной на рис. 3.13а.

Специфика этого примера состоит в необходимости предварительного расчленения рамы так, чтобы из нее можно было выделять свободные части.

Вначале следует, отбросив опоры a и b , заменить их действие силами. Поскольку рама в этом случае будет свободным телом, для нее можно составить уравнения равновесия и найти опорные реакции:

$$\sum M_a = 3Fl + Fl - Y_b 2l = 0, Y_b = 2F;$$

$$\sum M_b = Y_a 2l - 3Fl - Fl = 0, Y_a = 2F;$$

$$\sum Z = Z_a - 3F = 0, Z_a = 3F.$$

Теперь необходимо отбросить стержень ae , заменив его действие силами. Стержень ae прямой, шарнирно закреплен по концам. На нем нет поперечной нагрузки. Следовательно, он может быть либо растянут, либо сжат. Поперечных сил и изгибающих моментов в нем не возникает.

Отбросив стержень ae , расчленим раму по шарниру e . В местах нарушенных контактов приложим силы (рис. 3.13б). Из условия $\sum M_c = 2Fl - 3F 2l + 3Fl + Nl - Fl = 0$ находим $N = 2F$.

При определении внутренних силовых факторов рассмотрим раму, освобожденную от опор и стержня ae (рис. 3.13в).

Построим эпюру продольных сил.

Рассмотрим три участка.

На участке 1-3 продольная сила постоянна (перпендикулярные стержню силы $3F$ и $2F$, приложенные у сечения 2, на продольную силу не влияют). $N_1 = 2F$.

На участке 4-5 сила N также постоянна. $N_4 = -2F$.

Участок 6-8. N постоянна. $N_6 = -2F$.

Эпюра продольных сил построена на рис. 3.13г.

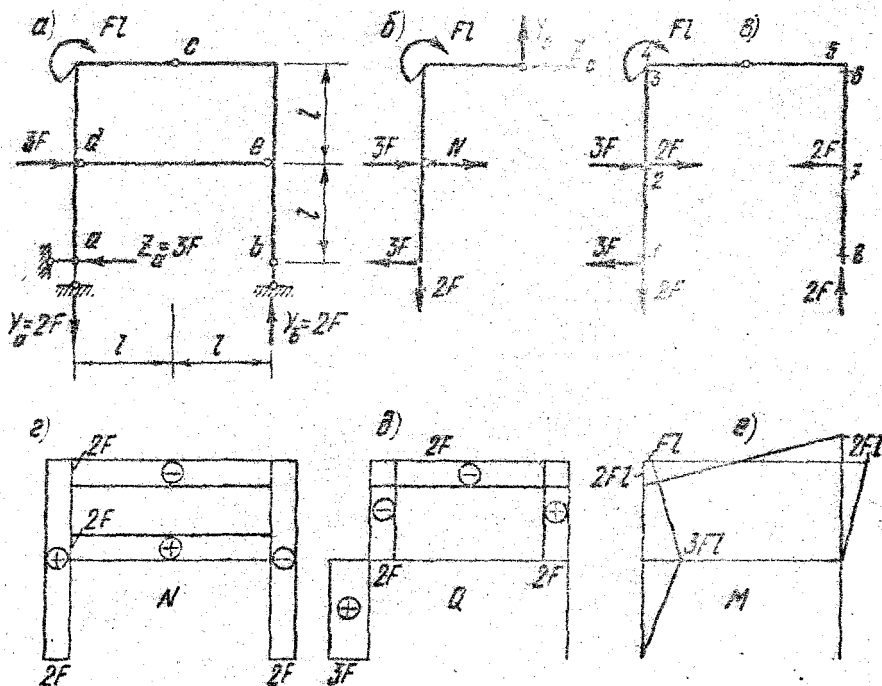


Рис. 3.13

Построим эпюру поперечных сил.

Здесь нужно рассмотреть пять участков, на каждом из которых поперечные силы постоянны. $Q_1 = 3F$; $Q_3 = 3F - 5F = -2F$; $Q_4 = -2F$; $Q_5 = 2F$; $Q_6 = 0$.

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 3.13д.

Построение эпюры изгибающих моментов.

Здесь также нужно рассмотреть пять участков. Поскольку на четырех из них поперечные силы постоянны и отличны от нуля, из-

гибальные моменты будут линейно переменны. На пятом участке $Q \equiv 0$, момент будет постоянным.

Участок 1-2. $M_1 = 0$, $M_2 = 3Fl$, растянуты правые волокна.

Участок 2-3. На границе первого и второго участков изгибающий момент непрерывен. В сечении же 3 $M_3 = 3F2l - 3Fl - 2Fl = Fl$, растянуты правые волокна.

Участок 4-5. Примем во внимание, что $M_4 \neq M_3$, так как между этими сечениями приложен сосредоточенный момент. $M_4 = 2F2l - 2Fl = 2Fl$ (просуммированы моменты "правых" сил). Растянуты нижние волокна. $M_5 = 2Fl$, растянуты верхние волокна.

Участок 6-7. $M_6 = 2Fl$, растянуты правые волокна; $M_7 = 0$.

На участке 7-8 изгибающий момент равен нулю во всех сечениях.

Эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 3.13е.

Пример 3.9. Построить эпюры внутренних силовых факторов в стержневой системе, изображенной на рис. 3.14а.

В данном примере, как и в предыдущем, особенность заключается в необходимости расчленения конструкции.

Определим вначале опорные реакции. Отбросив опорные связи и заменив их действие силами Z_a , Y_a и Y_b , составим и решим уравнения равновесия:

$$\sum Z = Z_a = 0;$$

$$\sum M_a = ql \cdot 3l - Y_b \cdot 2l = 0, Y_b = 3ql/2;$$

$$\sum M_b = Y_a \cdot 2l - 2q \cdot 2l \cdot 2l + ql \cdot l = 0, Y_a = 7ql/2.$$

Теперь примем во внимание, что стержни 1-5 прямые, шарнирно закрепленные по концам и не несущие поперечной нагрузки. Они работают только на растяжение или сжатие.

Следующий шаг - определение усилия N_1 . Для этого расчленим конструкцию в шарнире C , разрежем стержень 1 и отбросим опорную связь b - выделим свободное тело, изображенное на рис. 3.14б. Поскольку нас интересует сила N_1 , приравняем нулю сумму моментов сил относительно точки C :

$$\sum M_C = ql \cdot 2l - 3ql \cdot l/2 + N_1 \cdot l = 0, N_1 = -ql/2.$$

Определим N_1 , рассмотрим равновесие узлов a и b .

Узел a (рис. 3.14в).

$$N_2 \cos 45^\circ + ql/2 = 0, N_2 = -ql/\sqrt{2}.$$

$$N_2 \cos 45^\circ + N_3 + 7ql/2 = 0, N_3 = -3ql.$$

Узел *b* (рис. 3.14г).

$$ql/2 + N_5 \cos 45^\circ = 0, \quad N_5 = -ql/\sqrt{2},$$

$$N_4 + N_5 \cos 45^\circ + 3ql/2 = 0, \quad N_4 = -ql.$$

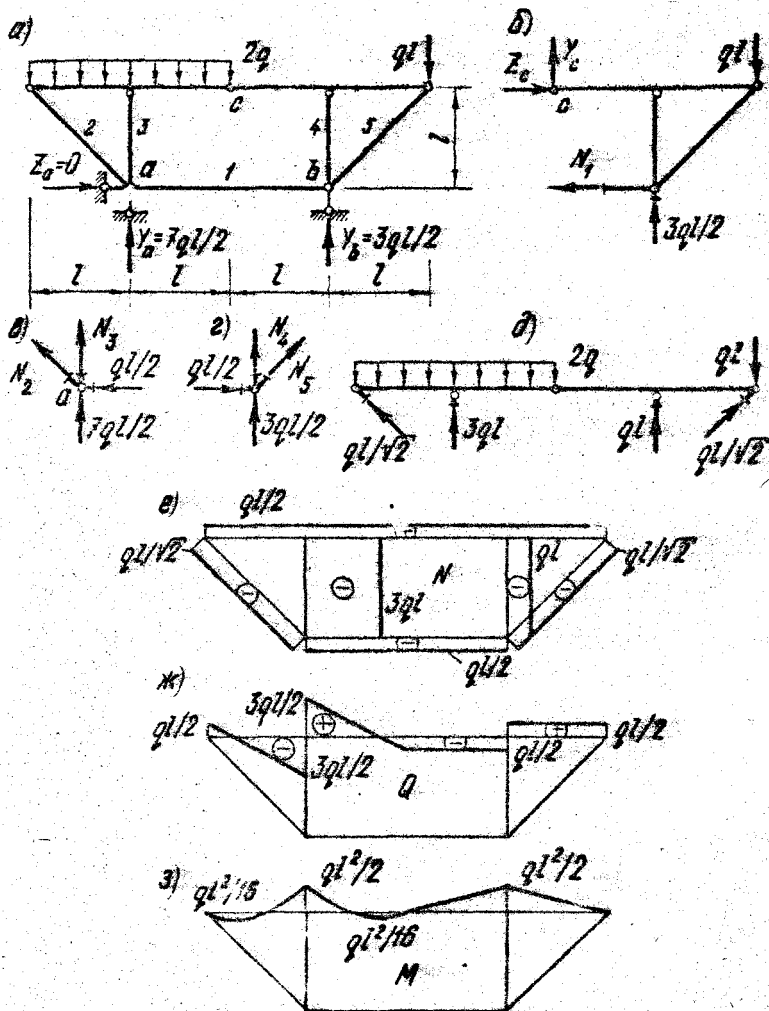


Рис. 3.14

Для определения внутренних силовых факторов в балках, соединенных шарниром *c*, освободим их от стержней 2-5 (рис. 3.14д).

Продольная сила в балках равна горизонтальной составляющей силы $qL/\sqrt{2}$, т.е. $N = qL/2$. Сила растягивающая.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов строим, пользуясь обычными приемами, проиллюстрированными в предыдущих примерах.

Эпюры внутренних силовых факторов в рассмотренной стержневой системе изображены на рис. 3.14е-в.

Задачи для самостоятельного решения.

Построить эпюры внутренних силовых факторов в стержневых системах. Задача 3.4 - рис. 3.15. Задача 3.5 - рис. 3.16. Задача 3.6 - рис. 3.17.

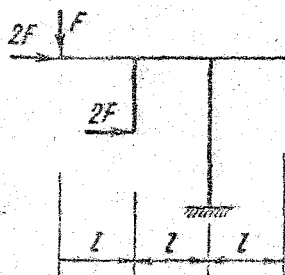


Рис. 3.15

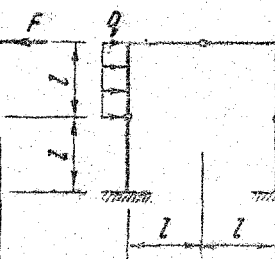


Рис. 3.16

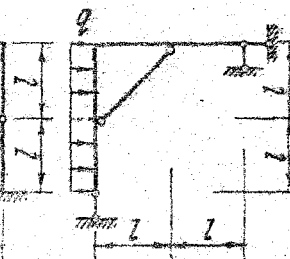


Рис. 3.17

3.7. Эпюры внутренних силовых факторов в общем случае

При построении эпюр внутренних силовых факторов в общем случае будем использовать те же приемы и правила, что и в плоских рамах. Во избежание противоречия в определении знака поперечной силы будем смотреть против координатной оси, перпендикулярной строящейся эпюре.

Пример 3.10. Построить эпюры внутренних силовых факторов в раме, показанной на рис. 3.18а. Координатная система (рис. 3.18б) определяет положения главных плоскостей стержней.

Определять опорные реакции не требуется.

На раме три участка.

Построим эпюру продольных сил.

Участок 1-2. Сила N постоянна; $N_1 = 0$.

Участок 3-4. Сила N также постоянна; $N_3 = -qL$.

Участок 5-6. Здесь сила N тоже постоянна и равна нулю.

Эпюра продольных сил изображена на рис. 3.18в.

Построим эпюру поперечных сил.

Вначале рассмотрим поперечные силы, действующие в плоскости рамы (плоскости xz). При определении знаков сил будем смотреть сверху - против оси y .

Участок 1-2. На этом участке поперечная сила постоянна, так как в рассматриваемой плоскости распределенной нагрузки нет.

$Q_{1x} = -ql$. Сила отрицательна, поскольку внешняя сила ql действует справа от сечения и направлена вверх.

Участок 3-4. Поперечная сила также постоянна. Но поскольку проекции сил, приложенных правее сечения 3, на ось x равны нулю, то $Q_{3x} = 0$.

Участок 5-6. На этом участке поперечная сила тоже постоянна.

$Q_{5x} = ql$. Сила положительна, так как внешнее усилие ql приложено к мысленно отсеченной левой части рамы и направлено вверх.

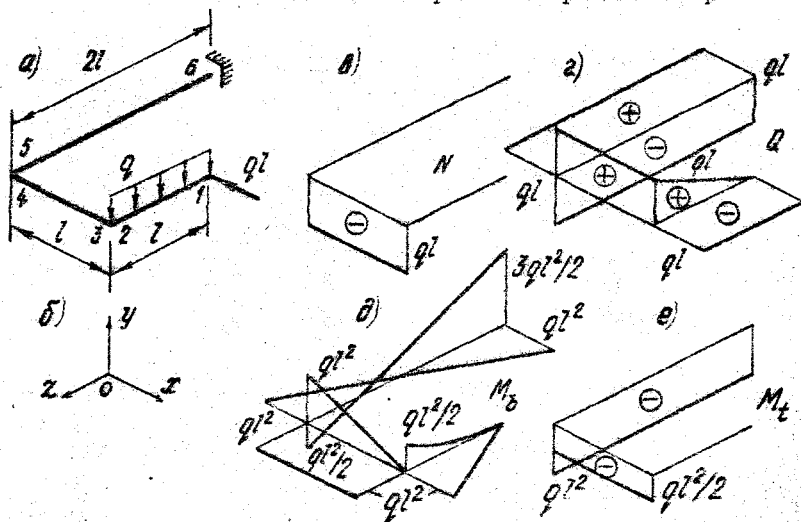


Рис. 3.18

Теперь рассмотрим поперечные силы, действующие в плоскостях, перпендикулярных раме, - Q_y .

Участок 1-2. В вертикальной плоскости поперечная сила линейно переменна - есть равномерно распределенная нагрузка. $Q_{1y} = 0$, $Q_{2y} = ql$. Знак плюс объясняется тем, что равнодействующая распределенной нагрузки приложена правее сечения и направлена вниз.

Участок 3-4. Здесь сила Q_y постоянна. $Q_{3y} = ql$. Знак вытекает из тех же соображений.

Участок 5-6. Сила постоянна. $Q_{5y} = -ql$. Равнодействующая распределенной нагрузки приложена к левой части рамы и направлена вниз.

Эпира поперечных сил изображена на рис. 3.18г.

Приступим к построению эпир изгибающих моментов.

Рассмотрим плоскость рамы - моменты M_y .

Участок 1-2. Момент изменяется по линейному закону. $M_{1y} = 0$; $M_{2y} = ql^2$, растянуты правые волокна.

Участок 3-4. Момент постоянен. $M_{3y} = ql^2$. Растянуты левые волокна.

Участок 5-6. Момент линейно переменен. $M_{5y} = ql^2$, растянуты левые волокна; $M_{6y} = 0$, растянуты правые волокна.

Рассмотрим теперь изгибающие моменты, действующие в вертикальных плоскостях.

Участок 1-2. Изгибающий момент описывается квадратной параболой с нулевой производной в точке 1 (см. эпюру Q). $M_{1x} = 0$; $M_{2x} = ql^2/2$, растянуты верхние волокна.

Участок 3-4. Изгибающий момент линейно переменен. $M_{3x} = 0$; $M_{4x} = ql^2$, растянуты верхние волокна.

Участок 5-6. Момент также линейно переменен. $M_{5x} = ql^2/2$, растянуты нижние волокна; $M_{6x} = 3ql^2/2$, растянуты верхние волокна.

Эпира изгибающих моментов приведена на рис. 3.18д.

Крутящие моменты.

На всех участках крутящие моменты постоянны. $M_{1z} = 0$; $M_{2z} = -ql^2/2$ (при взгляде от сечения момент распределенной нагрузки направлен против хода часовой стрелки); $M_{5z} = ql^2$, знак определяется тем же.

Эпира крутящих моментов изображена на рис. 3.18е.

Задача 3.7 для самостоятельного решения. Построить эпюры внутренних силовых факторов в пространственной раме, изображенной на рис. 3.19.

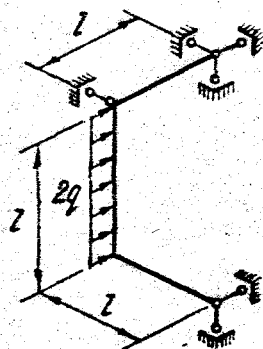
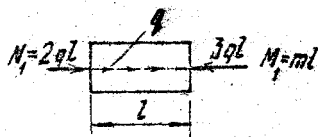


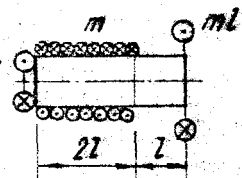
Рис. 3.19

4. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

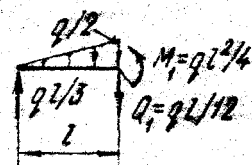
4.1. Ответы к задачам первой главы



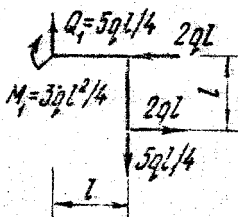
К задаче 1.1



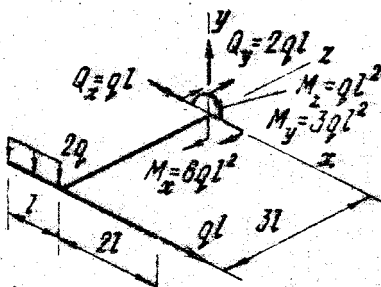
К задаче 1.2



К задаче 1.3

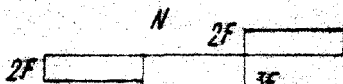


К задаче 1.4

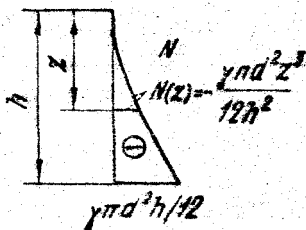


К задаче 1.5

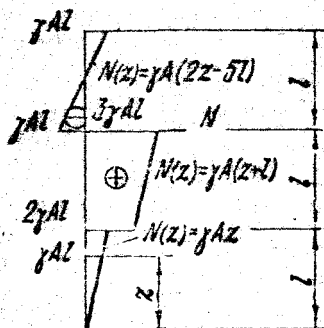
4.2. Ответы к задачам второй главы



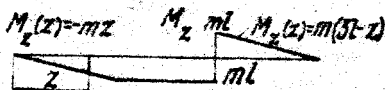
К задаче 2.1



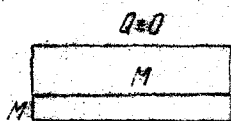
К задаче 2.2



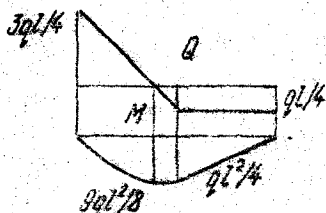
К задаче 2.3



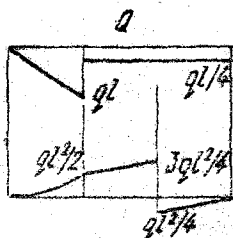
К задаче 2.4



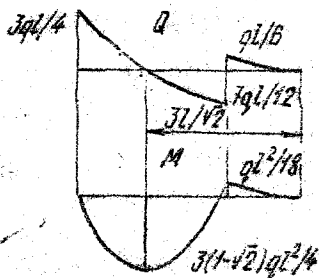
К задаче 2.5



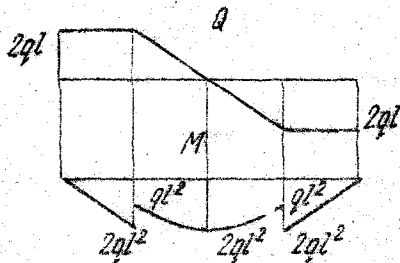
К задаче 2.6



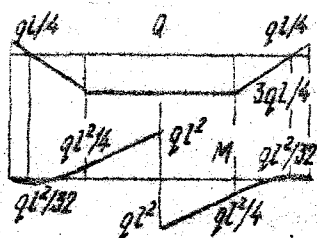
К задаче 2.7



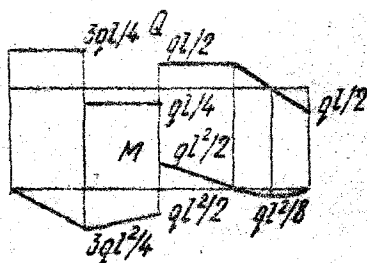
К задаче 2.8



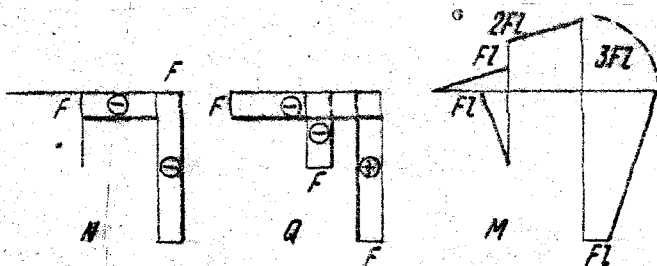
К задаче 2.9



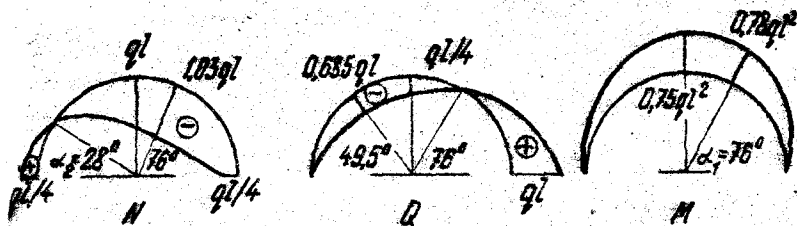
К задаче 2.10



К задаче 2.11



К задаче 2.12



$$N(\alpha_1) = -ql(0,25 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1);$$

$$N(\alpha_2) = ql(0,25 \cos \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2).$$

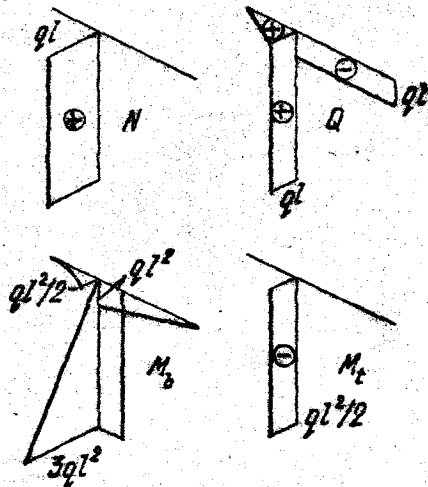
$$Q(\alpha_1) = ql(\cos \alpha_1 - 0,25 \sin \alpha_1);$$

$$Q(\alpha_2) = -ql \sin \alpha_2 (0,25 + \cos \alpha_2);$$

$$M(\alpha_1) = ql^2(0,25(1 - \cos \alpha_1) - \sin \alpha_1);$$

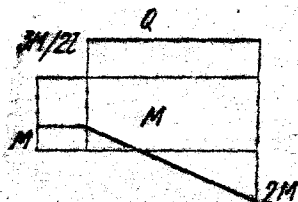
$$M(\alpha_2) = -ql^2(0,25(1 - \cos \alpha_2) + 0,5 \sin^2 \alpha_2).$$

К задаче 2.13

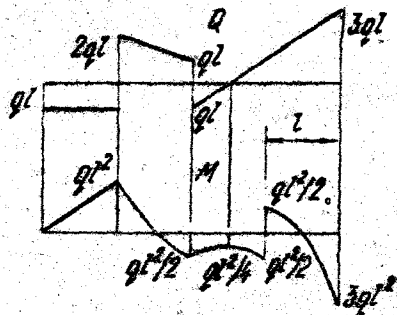


К задаче 2.14

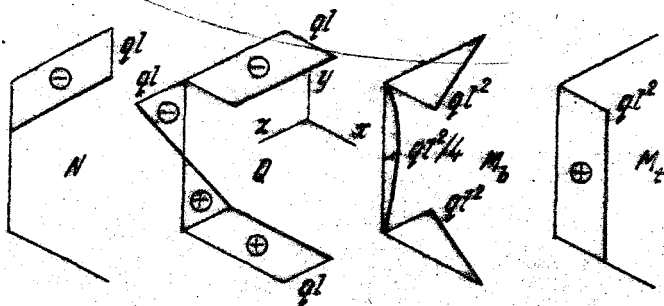
4.3. Ответы к задачам третьей главы



К задаче 3.1



К задаче 3.2



К задаче 3.7

ЛИТЕРАТУРА

1. Икрин В.А. Конспект лекций по сопротивлению материалов: Учебное пособие. - Челябинск: ЧПИ, 1971. - Ч. I. - 92 с.
2. Широков В.Н. Эпюры внутренних силовых факторов: Учебное пособие. - Челябинск: ЧПИ, 1975. - 95 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - 8-е изд. - М.: Наука, 1972. - 480 с.
4. Сопротивление материалов /А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Н.И.Монахов и др.; Под ред. А.Ф.Смирнова.-3-е изд. - М.: Высшая школа, 1975. - 480 с.
5. Строительная механика /А.В.Дарков, Г.К.Клейн, В.И.Кузнецов и др.; Под ред. А.В.Даркова.-7-е изд. - М.: Высшая школа, 1976. - 600 с.

Тем. план 1988 г., п. 153

Редактор Н.А. Гаврилова
Техн. редактор А.В. Миних

Редакционно-издательский отдел Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола

Подписано к печати 17.05.88. Формат 60x90 1/16. Печ. л. 4,25.
Уч.-изд. л. 4. Тираж 500 экз. Заказ 256/1086. Цена 18 к.

УОП ЧПИ. 454044. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.