

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

539.3/.6(07) П
И425

В.А.Икрин

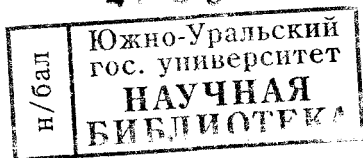
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ,
УСТОЙЧИВОСТЬ,
ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Учебник для студентов
архитектурно-строительного факультета

47 96



Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2001

УДК 539.3/6(07)

В.А.Икрин. Сопротивление материалов. Часть II. Сложное сопротивление, устойчивость, динамическое воздействие: Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2001. – 160 с.

Составлен в соответствии со следующими документами:

- Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования, введенными в действие в 1994 и 2000 гг;
- Требованиями к минимуму содержания и уровня подготовки инженера по специальности 290300 – “Промышленное и гражданское строительство”;
- Рабочей программой дисциплины “Сопротивление материалов” для подготовки дипломированных специалистов по специальности 290300.

Приведены экспериментально-теоретические основы курса, методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Теоретический материал проиллюстрирован примерами.

Ориентирован на студентов специальности “Промышленное и гражданское строительство”. Может быть использован на других архитектурно-строительных специальностях.

Ил. 136, табл. 12.

Одобен учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты: И.А.Иванов, В.И.Симонов.

ISBN 5-696-01677-4

© Издательство ЮУрГУ, 2001

Право тиражирования принадлежит автору и охраняется законом РФ.

Оглавление

Предисловие.....	7
Основные буквенные обозначения	8
8. Расчет балок на упругом основании.....	10
8.1. Исходные предпосылки. Механическая модель основания.....	10
8.2. Дифференциальное уравнение задачи. Математическая модель расчетной схемы	12
8.3. Бесконечная балка	14
8.3.1. Действие сосредоточенной силы	14
8.3.2. Балка под равномерно распределенной нагрузкой	18
8.3.3. Действие сосредоточенного момента	19
8.4. Формулы для полубесконечной балки, нагруженной на краю	23
8.4.1. Балка нагружена силой на краю.....	23
8.4.2. Балка нагружена моментом на краю.....	23
8.5. Балки конечной длины	24
8.5.1. Длинные балки.....	24
8.5.2. Короткие балки	25
9. Оценка прочности материалов при сложных напряженных состояниях.....	30
9.1. Об испытаниях материала при сложном напряженном состоянии.....	30
9.2. Некоторые физико-механические соотношения в линейно упругом изотропном теле.....	32
9.2.1. Обобщенный закон Гука.....	32
9.2.2. Относительная объемная деформация	33
9.2.3. Связь между упругими константами материала	34
9.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации.....	35
9.2.5. Удельная потенциальная энергия изменения формы.....	36

9.3. Теории предельных напряженных состояний	
9.3.1. Постановка и план решения задачи	36
9.3.2. Теории прочности хрупких материалов	
9.3.2.1. Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)	38
9.3.2.2. Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений)	39
9.3.3. Гипотезы пластичности	40
9.3.3.1. Третья теория (теория наибольших касательных напряжений)	41
9.3.3.2. Четвертая теория (теория удельной потенциальной энергии изменения формы)	42
9.3.4. Теория прочности О.Мора	43
10. Сложное сопротивление	46
10.1. Косой изгиб	47
10.1.1. Напряжения в поперечном сечении	47
10.1.2. Нейтральная линия при косом изгибе. Наибольшие нормальные напряжения. Расчет на прочность	49
10.1.3. Перемещения при косом изгибе	52
10.2. Внецентренное сжатие. Растяжение или сжатие с изгибом	
10.2.1. Внецентренное сжатие	53
10.2.1.1. Напряжения в поперечном сечении	53
10.2.1.2. Нейтральная линия при внецентренном сжатии. Положение опасной точки. Расчет на прочность	54
10.2.1.3. Ядро сечения	56
10.2.2. Растяжение или сжатие с изгибом	58
10.3. Общий случай нагружения	59
10.3.1. Общий случай нагружения стержня круглого сечения	60
10.3.2. Общий случай нагружения стержня прямоугольного сечения	61
10.3.3. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии	62
10.4. Условия применимости принципа суперпозиции	66
11. Основы технической теории тонкостенных стержней открытого профиля	68
11.1. Исходные предпосылки. Расчетные уравнения	68
11.1.1. Геометрические соотношения	69
11.1.2. Физические и статические уравнения	71
11.2. Нормальные напряжения в сечении	71
11.3. Бимомент	73

11.4.	Касательные напряжения в сечении	73
11.4.1.	Кососимметричные касательные напряжения	74
11.4.2.	Симметричные касательные напряжения	74
11.5.	Деформации стержня. Обобщенные усилия в сечении	75
11.5.1.	Дифференциальное уравнение угла закручивания и его решение	75
11.5.2.	Граничные условия	76
11.6.	Секториальные геометрические характеристики	
11.6.1.	Секториальная координата	77
11.6.2.	Изменение секториальной координаты при переносе полюса	77
11.6.3.	Определение положения центра изгиба и главной нулевой точки	78
11.7.	Пример расчета	78
11.7.1.	Геометрические характеристики сечения	78
11.7.2.	Дифференциальное уравнение углов поворота сечений. Решение уравнения	81
11.7.3.	Обобщенные усилия в стержне. Напряжения в опасном сечении	82
12.	Устойчивость	
12.1.	Понятие устойчивости	85
12.2.	Устойчивость прямолинейной формы равновесия центрально сжатого упругого стержня (вывод формулы Эйлера)	86
12.3.	Зависимость критического значения силы от условий закрепления стержня	89
12.4.	Пределы применимости формулы Эйлера	91
12.5.	Экспериментальные данные о потере устойчивости за пределом упругости. Эмпирическая формула	92
12.6.	Критическое значение сжимающей силы при потере устойчивости за пределом упругости. Теория приведенного модуля	95
12.7.	Диаграмма критических напряжений. Расчет сжатых стержней по коэффициенту уменьшения расчетного сопротивления	98
12.8.	Устойчивость плоской формы изгиба	102
12.9.	Заключение к разделу	104
13.	Понятие о расчете по деформированной схеме	105
13.1.	Дифференциальное уравнение изогнутой оси при продольно-поперечном изгибе	106
13.2.	Приближенный метод расчета сжато-изогнутых стержней ...	107
13.3.	О применении принципа суперпозиции при расчете сжато-изогнутых стержней	111

14. Динамическое действие нагрузок	
14.1. Понятие о динамическом нагружении.....	114
14.2. Учет сил инерции при заданном движении. Простейшие расчеты на динамическое воздействие	115
14.3. Механическая модель упругой конструкции в задачах динамики. Коэффициент жесткости системы	116
14.4. Колебания упругих систем	120
14.4.1. Свободные колебания	121
14.4.1.1. Свободные колебания без сопротивления движению	121
14.4.1.2. Свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости.....	123
14.4.2. Вынужденные колебания	126
14.4.2.1. Колебания при действии гармонической силы	127
14.4.2.2. Резонанс при гармоническом воздействии	129
14.4.2.3. Колебания в условиях резонанса	132
14.4.2.4. Некоторые частные случаи действия возмущающей силы	133
14.5. Ударное воздействие	135
14.5.1. Напряжения и деформации в невесомой конструкции при ударе. Динамический коэффициент	135
14.5.2. Учет массы деформируемой системы при расчете на удар.....	137
14.5.3. Понятие о коэффициенте приведения массы	140
14.6. Прочность материалов при циклически изменяющихся напряжениях	143
14.6.1. Понятие об усталостном разрушении	143
14.6.2. Основные виды и характеристики циклов напряжений.....	144
14.6.3. Понятие о пределе выносливости.....	145
14.6.4. Диаграмма усталостной прочности. Запас выносливости образца	146
14.6.5. Основные факторы, влияющие на предел выносливости.....	147
14.6.6. Расчет на прочность при циклических напряжениях	149
15. Основы безмоментной теории тонких осесимметрично нагруженных оболочек вращения...151	
15.1. Основные геометрические понятия.....	151
15.2. Исходные предпосылки. Виды напряженных состояний оболочек	152
15.3. Усилия в оболочке по безмоментной теории	153
15.4. Заключение к разделу	157
Приложения.....	158

Предисловие

Этот выпуск является продолжением и дополнением ранее изданной 1-й части учебника¹. Тематическое содержание второй части определено, главным образом, государственными образовательными стандартами, введенными в 1994 и 2000 гг. Включен также материал, выходящий за рамки ГОС, но часто используемый при расчетах элементов строительных конструкций.

Автор выражает благодарность директору ООО «Уральская строительная компания» А.В.Котову за спонсорскую помощь, обеспечившую возможность подготовки, оформления и издания учебника, и безвозмездную его передачу в фонд библиотеки университета.

¹ В.А.Икрин. Сопротивление материалов. Часть I. Растяжение, кручение, изгиб: Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. – Челябинск: Изд-во ЧГУ, 1997. – 160 с.

Основные буквенные обозначения

- A* - площадь, амплитуда;
- B* - бимомент;
- C* - критерий предельного состояния, постоянная интегрирования;
- D* - диаметр;
- E* - модуль упругости;
- F* - сила;
- G* - модуль сдвига;
- J* - момент инерции;
- K* - кинетическая энергия;
- M* - момент;
- N* - продольная сила, число циклов до разрушения;
- P* - потенциальная энергия положения;
- Q* - поперечная сила;
- R* - сопротивление материала;
- S* - статический момент;
- T* - период, сжимающая сила;
- U* - потенциальная энергия деформации;
- V* - объем;
- W* - момент сопротивления сечения;
- a* - ускорение, отрезки, отсекаемые на осях;
- b* - ширина, символ изгиба;
- c* - коэффициент жесткости, символ сжатия;
- d* - диаметр, толщина, декремент затухания, дифференциал;
- e* - эксцентриситет;
- f* - перемещение, функция;
- g* - ускорение свободного падения;
- h* - высота;
- i* - радиус инерции;

- k – коэффициент;
- l – длина, символ линейного, левого;
- m – масса;
- n – коэффициент запаса, целочисленный множитель;
- p – давление;
- q – интенсивность нагрузки, коэффициент концентрации;
- r – радиус, коэффициент сопротивления, коэффициент асимметрии цикла, символ правого;
- s – линейная координата, символ сдвига;
- t – время, толщина, символ растяжения, кручения;
- u – перемещение вдоль оси x , удельная потенциальная энергия, символ предельного;
- v, w – перемещения вдоль осей y и z ;
- x, y – главные центральные оси сечения;
- z – продольная координата стержня;
- Δ – символ приращения;
- Σ – символ суммирования;
- α – угол, коэффициент затухания, масштабный коэффициент;
- β – угол, параметр системы балка – упругое основание, коэффициент поверхностной чувствительности;
- γ – относительный сдвиг;
- δ – перемещение, толщина;
- ε – относительное удлинение;
- ζ – координата, перемещение;
- η – гиперболо-тригонометрическая функция;
- θ – частота;
- λ – гибкость стержня;
- μ – коэффициент приведения длины;
- ν – коэффициент Пуассона;
- ξ – координата, перемещение;
- ρ – плотность, координата;
- σ, τ – нормальное и касательное напряжения;
- φ – угол, коэффициент снижения расчетного сопротивления, начальная фаза;
- ψ – начальная фаза;
- ω – секториальная координата, угловая частота, скорость.

8. Расчет балок на упругом основании

Среди строительных конструкций часто встречаются такие, которые можно рассматривать как балки на упругом основании. К их числу относятся опирающиеся на грунт ленточные фундаменты зданий, железнодорожные рельсы, шпалы, передающие усилия на насыпь, понтонные мосты, поддерживаемые водой, и т.п. Расчет таких балок, естественно, представляет практический интерес.

8.1. Исходные предпосылки.

Механическая модель основания

Применительно к балкам используются обычные предпосылки технической теории: деформации и перемещения малы; материал балки идеально упругий.

Выбор модели основания – сложная и ответственная часть задачи. Зависимость деформаций основания от нагрузки, действующей на него, определяется многими факторами: видом основания, величиной нагрузки, размерами конструкции и т.п. При расчете строительных конструкций используются разные механические модели основания. Простейшая из них *модель несвязного упругого основания двустороннего действия* предложена акад. Н.И.Фуссом¹ в 1801 г. и использована проф. Е.Винклером² в задачах о балках. Поэтому ее называют моделью Фусса–Винклера, а чаще моделью Винклера.

¹ Н.И.Фусс (1755–1825) – академик и секретарь Петербургской Академии наук, ученик и один из ближайших сотрудников Эйлера. Автор ряда работ по математическому анализу и приложениям его к задачам изгиба балок.

² Е.Винклер (1835–1888) – профессор Венского политехникума, автор многих оригинальных работ по сопротивлению материалов и строительной механике.

В соответствии с этой моделью основание можно представить семейством отдельных пружин, опирающихся на жесткую плоскость (рис. 8.1 а). С ними соединена балка. Под нагрузкой балка изгибается и деформирует пружины (рис. 8.1 б). При этом

– деформируются лишь те пружины, которые контактны с балкой (несвязность основания);

– основание препятствует и проникновению внутрь него, и отрыву балки (двустороннее действие, рис. 8.1 в);

– реакция основания пропорциональна осадке его поверхности (линейная упругость):

$$p = kv, \quad (8.1)$$

где p – интенсивность реакции основания;

k – коэффициент жесткости основания, измеряемый в H/m^2 ;

v – осадка поверхности основания (вертикальное перемещение точки поверхности).

Коэффициент жесткости k зависит от вида основания и ширины балки:

$$k = k_f b;$$

k_f носит название *коэффициента постели*¹ (размерность – H/m^3 и т.п.);

b – ширина балки (рис. 8.1).

Коэффициент постели грунтового основания зависит от многих факторов: вида грунта, его химического состава, влажности, возраста, способа укладки и т.п. Диапазон возможных значений k_f достаточно широк и более или менее точно может быть установлен с учетом конкретных условий. Существуют специальные методики определения коэффициента постели, отражающие влияние названных факторов и других характеристик грунта и конструкции.

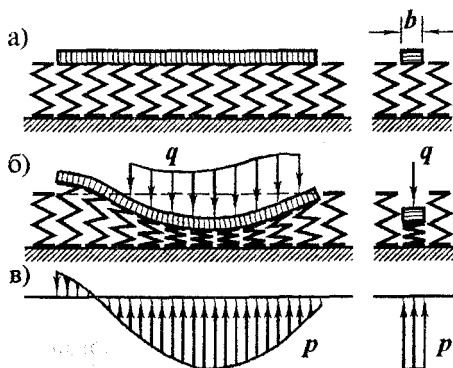


Рис. 8.1

¹ Индекс от англ. *foundation* – основание, фундамент.

Коэффициенты постели некоторых грунтов¹

№ п.п.	Материал основания	$k_f, \text{H/cm}^3$
1	Песок свеженасыпанный Глина мокрая, размягченная	1...5
2	Песок слежавшийся Гравий насыпной Глина влажная	5...50
3	Песок и гравий, плотно слежавшийся Щебень Глина малой влажности	50...100
4	Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный Глина твердая	100...200
5	Известняк, песчаник, мерзлота	200...1000
6	Твердая скала	1000...15000

8.2. Дифференциальное уравнение задачи. Математическая модель расчетной схемы

8.2.1. Для составления разрешающей системы уравнений

(формирования математической модели задачи) рассмотрим балку под произвольной нагрузкой (рис. 8.2 а). Основание будем считать однородным (коэффициент k не зависит от z).

Условия равновесия элементарного отрезка балки (рис. 8.2 б) приводят к равенствам: $\Sigma Y = Q - q \cdot dz - (Q + dQ) + p \cdot dz = 0$, или $Q' = p - q$. (а)

$\Sigma \text{mom}_c = M - Q \cdot dz + q \cdot dz \cdot dz/2 - M - dM - p \cdot dz \cdot dz/2 = 0$, что после приведения подобных членов и отбрасывания малых величин второго порядка принимает вид $M' = -Q$. (б)

¹ Таблица позаимствована из учебника "Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности" / Г.С.Варданян, В.И.Андреев, Н.М.Атаров, А.А.Горшков; Под ред. Г.С.Варданяна. - М.: Изд-во асс. строит. вузов, 1995. - 576 с.

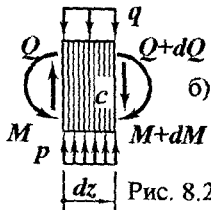
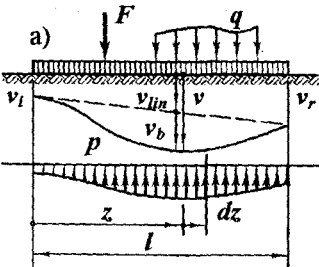


Рис. 8.2

Кривизна оси балки и изгибающий момент связаны законом Гука –

$$v_b'' = M/(EJ), \quad (в)$$

в котором v_b – прогиб балки.

Осадка основания v равна сумме (рис. 8.2 а)

$$v = v_{lin} + v_b, \quad (г)$$

где v_{lin} – линейная часть осадки. Ее выражение –

$$v_{lin} = v_l + (v_r - v_l)z/l. \quad (д)$$

Система равенств (8.1) и (а) ... (д) позволяет найти характеристики напряженно-деформированного состояния балки и основания.

8.2.2. Преобразуем разрешающую систему к виду, удобному для применения.

Из равенств (а) и (б) следует $M' = q - p$, а из (в) $EJv_b'' = M'$, откуда

$$EJv_b'' = q - p. \quad (е)$$

Принимая во внимание линейность выражения (д), по равенству (г) устанавливаем: $v_b'' = v''$. После подстановки полученного равенства и выражения (8.1) в уравнение (е) получаем

$$EJv'' = q - kv. \quad (ж)$$

Чтобы придать уравнению канонический вид, обозначим

$$k/EJ = 4\beta^4. \quad (8.2)$$

Размерность β – 1/м. Параметр β можно охарактеризовать как некоторую физико-механическую константу системы балка–основание. После обозначения (8.2) уравнение (ж) принимает вид

$$v'' + 4\beta^4 v = q/EJ. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) позволяет найти осадку поверхности основания и его реакцию (8.1).

Прогиб балки описывается выражениями (г) и (д). Изгибающий момент – формулой (в), из которой по равенству $v_b'' = v''$ следует

$$M = EJv''. \quad (8.4)$$

Поперечная сила (б)

$$Q = -EJv'''. \quad (8.5)$$

Таким образом, после решения уравнения (8.3) характеристики напряженно-деформированного состояния балки и упругого основания определяются равенствами (8.4), (8.5) и соответствующими им формулами для напряжений, деформаций и перемещений, полученными в предыдущих разделах курса.

8.3. Бесконечная балка

Изучение взаимодействия балки и упругого основания, их реакции на внешнюю нагрузку, а также методов решения задач естественно начинать с простейших случаев. Обратимся к балке бесконечной длины.

8.3.1. Действие сосредоточенной силы

Рассмотрим бесконечно длинную балку под сосредоточенной силой F (рис. 8.3).

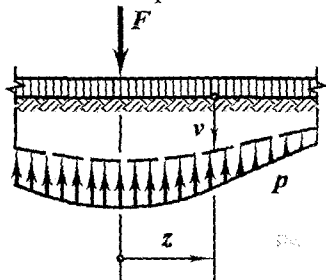


Рис. 8.3

Учитывая симметрию расчетной схемы, ограничимся правой половиной балки.

В произвольной точке интенсивность $q = 0$, поэтому дифференциальное уравнение (8.3) будет однородным:

$$v'''' + 4\beta^4 v = 0.$$

Интеграл этого уравнения выражается через гиперголо-тригонометрические функции -

$$v = Ae^{\beta z} \sin \beta z + Be^{\beta z} \cos \beta z + Ce^{-\beta z} \sin \beta z + De^{-\beta z} \cos \beta z.$$

где A, B, C, D - постоянные интегрирования.

Для определения постоянных воспользуемся граничными условиями.

Из физических соображений ясно, что при $z \rightarrow \infty$ осадка упругого основания $v \rightarrow 0$. А так как при $z \rightarrow \infty$ функции $e^{\beta z} \rightarrow \infty$, необходимо приравнять $A = B = 0$. После этого решение уравнения принимает вид

$$v = Ce^{-\beta z} \sin \beta z + De^{-\beta z} \cos \beta z. \quad (\text{и})$$

Поскольку балка деформируется симметрично, то при $z = 0$ производная $v' = 0$. Из выражения (и) следует

$$v' = C\beta e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) - D\beta e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z).$$

Подставляя сюда $z = 0$ и приравнявая $v' = 0$, получаем $C - D = 0$.

Решение (и) упрощается: $v = Ce^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z)$. (к)

Для определения постоянной C вновь воспользуемся симметрией. Равнодействующая реакции основания равна силе F . При этом давление на каждую половину балки приводится к $F/2$. Отсюда следует, что при $z \rightarrow 0$ поперечная сила $Q \rightarrow -F/2$. Но по формуле (8.5) $Q = -EJv''$. Следовательно при $z \rightarrow 0$ должно быть $v'' \rightarrow F/(2EJ)$.

Из равенства (к), дифференцируя, находим:

$$\begin{aligned} v' &= -2C\beta e^{-\beta z} \sin \beta z; \\ v'' &= -2C\beta^2 e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z); \\ v''' &= 4C\beta^3 e^{-\beta z} \cos \beta z. \end{aligned} \quad (\text{л})$$

Подставляя в последнее равенство из (л) $z = 0$ и $v''' = F/(2EJ)$, имеем

$$C = F/(8\beta^3 EJ). \quad (\text{м})$$

Равенства (к), (л), (м) и формулы (8.4) и (8.5) позволяют найти усилия и перемещения в балке и основании.

С целью сокращения записи введем обозначения:

$$\begin{aligned} e^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z) &= \eta(z); \quad e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) = \eta_1(z); \\ e^{-\beta z} \cos \beta z &= \eta_2(z); \quad e^{-\beta z} \sin \beta z = \eta_3(z). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Сопоставляя равенства (к) и (л), с одной стороны, и (8.6), с другой, нетрудно заметить дифференциальные связи между функциями:

$$\eta'(z) = -2\beta\eta_3(z); \quad \eta_1'(z) = -2\beta\eta_2(z); \quad \eta_2'(z) = -\beta\eta(z); \quad \eta_3'(z) = \beta\eta_1(z). \quad (8.7)$$

Функции $\eta(z) \dots \eta_3(z)$ протабулированы и приведены в справочной литературе. Фрагмент таблиц приведен ниже.

Согласно равенствам (к), (м) и обозначениям (8.6) осадки поверхности упругого основания описываются выражением

$$v = F\eta/(8\beta^3 EJ). \quad (8.8)$$

Эпюра осадок от силы (рис. 8.4 а) показана на рис. 8.4 б. Формула (8.8) справедлива при $z \geq 0$. Для левой половины балки график осадок симметричен. В бесконечной балке осадки и прогибы — одно и то же.

Эпора p — реактивного давления основания (8.1) подобна эпюре осадок.

Изгибающий момент (8.4) с учетом обозначений (8.6) и зависимостей (8.7) выражается так:

$$M = -F\eta_1/(4\beta). \quad (8.9)$$

Эпора момента, подсчитанная для правой половины и симметрично отраженная влево, показана на рис. 8.4 в.

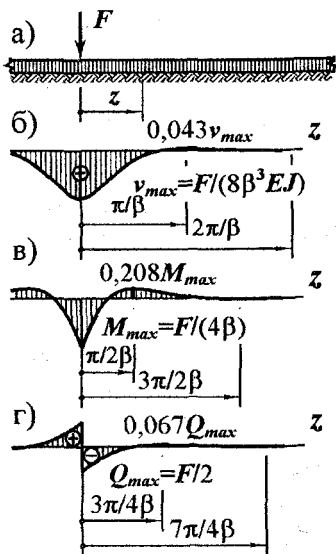


Рис. 8.4

Поперечная сила (8.5) при обозначениях (8.6) и соотношениях (8.7) –

$$Q = -F\eta_2/2. \quad (8.10)$$

Эпюра кососимметрична. Поэтому подсчитанная для правой половины по формуле (8.10) она отражена влево с изменением знака (рис. 8.4 г).

Формулы (8.8)–(8.10) и построенные по ним эпюры показывают, что изменение усилий и перемещений по длине балки носит знакопеременно-затухающий характер. Наибольший эффект действия силы проявляется в месте ее приложения. Скорость уменьшения усилий и деформаций определяется множителем $e^{-\beta x}$. Поэтому коэффициент β называют *параметром затухания*.

Отметим, что величины прогиба и усилий в балке, а также скорости их затухания по длине зависят и от жесткости основания (коэффициента k), и от изгибной жесткости балки (EJ), фигурирующих либо явно, либо в составе параметра β . Так, ужесточение основания (увеличение k , а вместе с ним и β) приводит к уменьшению осадок и моментов; скорость же затухания их по длине при этом возрастает. Возрастает давление под силой.

Увеличение изгибной жесткости (уменьшение β) снижает скорость затухания осадок и усилий по длине балки, уменьшает прогиб и давление под силой, но приводит к некоторому росту максимально-го изгибающего момента.

Более полный и детальный анализ влияния жесткостных характеристик балки и основания может быть выполнен с помощью приведенных выше формул и таблиц фигурирующих в них функций.

Неоднозначное влияние коэффициента постели, материала и размеров сечения балки позволяет инженеру, регулируя ими, принимать оптимальные конструктивные решения, обеспечивающие выполнение условий прочности и жесткости при минимальных экономических затратах.

Гиперболо-тригонометрические функции

Арг. βz	Значения функций				Арг. βz	Значения функций			
	η	η ₁	η ₂	η ₃		η	η ₁	η ₂	η ₃
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903	3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627	3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189	3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610	3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908	3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099	3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
0,7	0,6997	0,0599	0,3708	0,3199	3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223	3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
0,9	0,5712	-0,0657	0,2525	0,3185	3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0139
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096	4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	-0,0139
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967	4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807	4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626	4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0124
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430	4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226	4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0109
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018	4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812	4,7	-0,0092	0,0090	-0,0001	-0,0091
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610	4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415	4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1231	5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057	5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0056
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0896	5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748	5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613	5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0491	5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383	5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287	5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204	5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132	5,9	0,0015	0,0036	0,0025	-0,0010

8.3.2. Балка под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотренное выше действие сосредоточенной силы на бесконечную балку не удовлетворяет практических запросов, ибо в составе внешних воздействий могут фигурировать распределенные нагрузки и сосредоточенные моменты. Для вывода соответствующих формул, а также с познавательной целью рассмотрим бесконечную балку под равномерно распределенной нагрузкой на участке ограниченной длины (рис. 8.5 а).

Во избежание трудностей, связанных с решением уравнения (8.3), воспользуемся формулой (8.8) и, выделив в нагрузке элементарную силу $q_0 d\zeta$, просуммируем результаты их действия. При этом будем иметь в виду, что равенство (8.8) справедливо лишь для положительных координат.

Если точка находится левее участка нагружения ($z \leq z_{ql}$), то про-

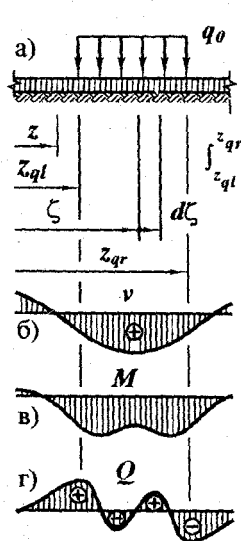


Рис. 8.5

гиб $v = \int_{z_{ql}}^{z_{qr}} q_0 \eta(\zeta - z) d\zeta / (8\beta^3 EJ)$. Используем зависимость (8.7): $\eta = -\eta' / \beta$. Учитывая это равенство, имеем

$$\int_{z_{ql}}^{z_{qr}} \eta(\zeta - z) d\zeta = - \int_{z_{ql}}^{z_{qr}} \eta'(\zeta - z) d\zeta / \beta = (\eta_2(z_{ql} - z) - \eta_2(z_{qr} - z)) / \beta.$$

Учитывая обозначение (8.2), получаем

$$v = q_0 (\eta_2(z_{ql} - z) - \eta_2(z_{qr} - z)) / (2k). \quad (8.11)$$

Дифференцируя полученное решение в соответствии с равенствами (8.4) и (8.5) с учетом зависимостей (8.7) и обозначения (8.2), имеем

$$M = q_0 (\eta_3(z_{ql} - z) - \eta_3(z_{qr} - z)) / (4\beta^2). \quad (8.12)$$

$$Q = q_0 (\eta_1(z_{ql} - z) - \eta_1(z_{qr} - z)) / (4\beta). \quad (8.13)$$

Для правого незагруженного участка ($z \geq z_{qr}$) по аналогии

$$v = q_0 (\eta_2(z - z_{qr}) - \eta_2(z - z_{ql})) / (2k). \quad (8.14)$$

$$M = q_0 (\eta_3(z - z_{qr}) - \eta_3(z - z_{ql})) / (4\beta^2). \quad (8.15)$$

$$Q = q_0 (\eta_1(z - z_{ql}) - \eta_1(z - z_{qr})) / (4\beta). \quad (8.16)$$

Если точка находится внутри участка нагружения ($z_{ql} \leq z \leq z_{qr}$),

то

$$v = q_0 \left(\int_{z_{ql}}^z (z - \zeta) d\zeta + \int_z^{z_{qr}} \eta(\zeta - z) d\zeta \right) / (8\beta^3 EJ).$$

После интегрирования

$$v = q_0(2 - \eta_2(z - z_{q1}) - \eta_2(z_{qr} - z))/(2k). \quad (8.17)$$

Изгибающий момент и поперечную силу находим по формулам (8.4) и (8.5), используя соотношения (8.7):

$$M = q_0(\eta_3(z - z_{q1}) - \eta_3(z_{qr} - z))/(4\beta^2). \quad (8.18)$$

$$Q = q_0(\eta_1(z - z_{q1}) - \eta_1(z_{qr} - z))/(4\beta). \quad (8.19)$$

Поскольку в формулы (8.11) ... (8.16) входят затухающие гиперболо-тригонометрические функции (8.6), эпюры характеристик напряженно-деформированного состояния балки и основания за пределами участка нагружения имеют качественно такой же вид, как и при сосредоточенной силе – знакопеременно-затухающий.

Очертания эпюр внутри участка зависят от его длины и жесткостных характеристик балки и основания. Один из качественных вариантов эпюр показан на рис. 8.5 б–г.

Если увеличивать длину участка нагружения, то на достаточном удалении от его краев функции η_1 , η_2 , η_3 станут практически нулевыми. Согласно формулам (8.17)–(8.19) осадка будет стремиться к $v = q_0/(2k)$, изгибающий момент и поперечная сила будут ничтожно малы. Бесконечная балка, нагруженная по всей длине равномерно распределенной нагрузкой, оставаясь прямой, поступательно смещается в направлении нагрузки.

Выражения (8.11)–(8.19) позволяют расширить анализ влияния характеристик балки и основания на очертания эпюр и величины осадок и усилий. В целях сокращения объема излагаемого материала воздержимся от такого анализа, оставив его заинтересованному читателю.

8.3.3. Действие сосредоточенного момента

Расширяя перечень рассматриваемых видов нагрузки, обратимся к сосредоточенному моменту (рис. 8.6 а).

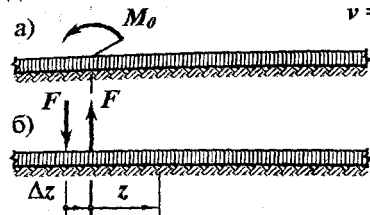
Представим момент парой сил (рис. 8.6 б). По условию статической эквивалентности $F\Delta z = M_0$. Силы $F = M_0/\Delta z$.

Прогиб в произвольной точке будет равен разности прогибов от указанных сил. По формуле (8.8) имеем

$$v = F(\eta(z + \Delta z) - \eta(z))/(8\beta^3 EJ) = M_0((\eta(z + \Delta z) - \eta(z))/\Delta z)/(8\beta^3 EJ).$$

Переход от пары сил к сосредоточенному моменту осуществим предельным уменьшением Δz :

$$v = M_0 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} ((\eta(z+\Delta z) - \eta(z))/\Delta z)/(8\beta^3 EJ).$$



Предел, стоящий в этом выражении, есть производная функции η . По соотношению (8.7) $\eta' = -2\beta\eta_3$. Таким образом,

$$v = -M_0\eta_3/(4\beta^2 EJ). \quad (8.20)$$

Дифференцируя полученное выражение в соответствии с равенствами (8.4) и (8.5) и учитывая (8.7), имеем

$$M = M_0\eta_2/2. \quad (8.21)$$

$$Q = M_0\beta\eta_2. \quad (8.22)$$

Эпюры v , M и Q изображены на рис. 8.6 в ... д.

Формулы (8.20) ... (8.22) справедливы для правой половины балки. Для обобщения их на левую часть следует принять во внимание законы симметрии.

Если на балку действуют несколько нагрузок из рассмотренного набора, следует построить эпюры от каждой из них, после чего одноименные эпюры просуммировать.

Пример 8.1. На бесконечную балку действуют: сила $F = 300$ кН; равномерная нагрузка интенсивностью $q_0 = 150$ кН/м; момент $M_0 = 50$ кНм (рис. 8.7 а).

Длина участка балки $l = 1$ м; сечение прямоугольное шириной $b = 0,8$ м и высотой $h = 1,67$ м. Материал балки — железобетон ($E = 2 \cdot 10^7$ кН/м²); основание — плотный грунт ($k_f = 5 \cdot 10^4$ кН/м³).

Построим эпюры прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил в пределах участка, выделенного на рисунке.

Изгибная жесткость балки —

$$EJ = Ebh^3/12 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,8 \cdot 1,67^3/12 = 6,25 \cdot 10^6 \text{ кНм}^2.$$

Коэффициент жесткости основания $k = k_f b = 5 \cdot 10^4 \cdot 0,8 = 4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$.

Параметр затухания

$$\beta = \sqrt[4]{kI/(4EJ)} = \sqrt[4]{4 \cdot 10^4 / (4 \cdot 6,25 \cdot 10^6)} = 0,2 \text{ 1/м.} \text{ (б)}$$

Вначале построим эпюры от силы F . Выбрав начало координат в месте ее приложения, по формулам (8.8)...(8.10) находим:

$$v(F) = F\eta_1(z_1)/(8\beta^3 EJ) = 300\eta_1(z_1)/(8 \cdot 0,2^3 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = 7,5 \cdot 10^{-4} \eta_1(z_1) \text{ м;}$$

$$M(F) = -F\eta_2(z_1)/(4\beta) = -300\eta_2(z_1)/(4 \cdot 0,2) = -375\eta_2(z_1) \text{ кНм;}$$

$$Q(F) = -F\eta_3(z_1)/2 = -150\eta_3(z_1) \text{ кН.}$$

Построенные по полученным равенствам эпюры изображены на рис. 8.7 б ... г.

Рассмотрим теперь балку под равномерно распределенной нагрузкой. Начало координат можно оставить прежним. Тогда $z_{ql} = l = 1 \text{ м}$, $z_{qr} = 4l = 4 \text{ м}$.

При $-\infty < z_1 \leq 1 \text{ м}$ формулы (8.11)...(8.13) принимают вид

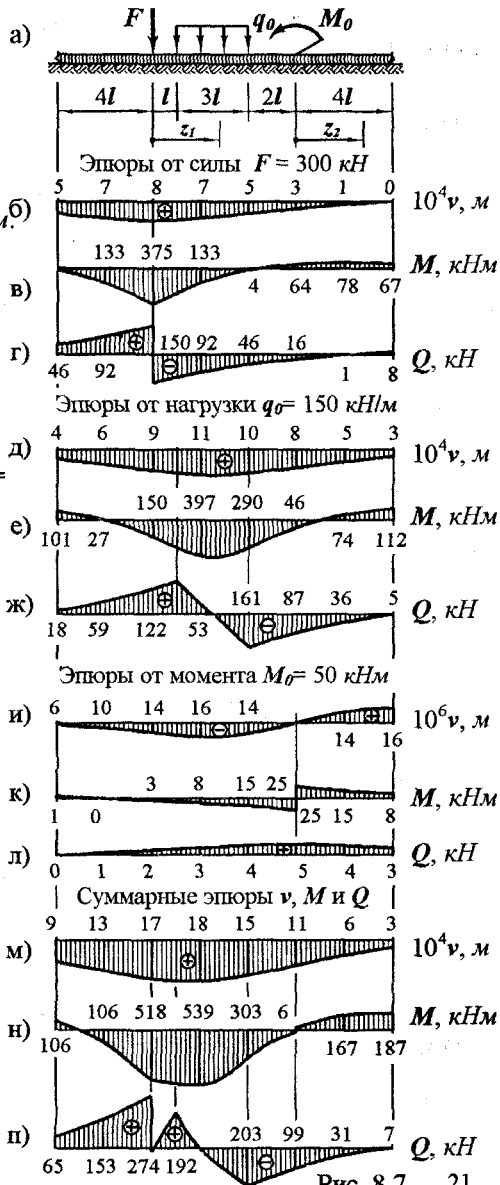


Рис. 8.7 21

$$v(q_0) = q_0(\eta_2(z_{qI} - z_I) - \eta_2(z_{qR} - z_I)) / (2k) = \\ = 150(\eta_2(1 - z_I) - \eta_2(4 - z_I)) / (2 \cdot 4 \cdot 10^4) = 18,75 \cdot 10^{-4}(\eta_2(1 - z_I) - \eta_2(4 - z_I)) \text{ м};$$

$$M(q_0) = q_0(\eta_3(z_{qI} - z_I) - \eta_3(z_{qR} - z_I)) / (4\beta^2) = \\ = 150(\eta_3(1 - z_I) - \eta_3(4 - z_I)) / (4 \cdot 0,2^2) = 937,5(\eta_3(1 - z_I) - \eta_3(4 - z_I)) \text{ кНм};$$

$$Q(q_0) = q_0(\eta_I(z_{qI} - z_I) - \eta_I(z_{qR} - z_I)) / (4\beta) = \\ = 150(\eta_I(1 - z_I) - \eta_I(4 - z_I)) / (4 \cdot 0,2) = 187,5(\eta_I(1 - z_I) - \eta_I(4 - z_I)) \text{ кН}.$$

На участке $1 \leq z_I \leq 4$ м следует пользоваться формулами (8.17) ... (8.19).

$$v(q_0) = q_0(2 - \eta_2(z_I - z_{qI}) - \eta_2(z_{qR} - z_I)) / (2k) = 18,75 \cdot 10^{-4}(2 - \eta_2(z_I - 1) - \eta_2(4 - z_I)) \text{ м};$$

$$M(q_0) = -q_0(\eta_3(z_I - z_{qI}) + \eta_3(z_{qR} - z_I)) / (4\beta^2) = -937,5(\eta_3(z_I - 1) + \eta_3(4 - z_I)) \text{ кНм};$$

$$Q(q_0) = q_0(\eta_I(z_I - z_{qI}) - \eta_I(z_{qR} - z_I)) / (4\beta) = 187,5(\eta_I(z_I - 1) - \eta_I(4 - z_I)) \text{ кН}.$$

Для участка, расположенного правее нагрузки, нет необходимости записывать формулы и производить по ним вычисления. Можно воспользоваться симметрией. Эпюры $v(q_0)$, $M(q_0)$ и $Q(q_0)$ изображены на рис. 8.7 д...ж.

Действие сосредоточенного момента M_0 .

Перемещения и усилия от него описываются формулами (8.20) ... (8.22):

$$v(M_0) = -M_0\eta_3(z_2) / (4\beta^2 EJ) = \\ = -50\eta_3(z_2) / (2 \cdot 0,2^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = -5 \cdot 10^{-5}\eta_3(z_2) \text{ м};$$

$$M(M_0) = M_0\eta_2(z_2) / 2 = 25\eta_2(z_2) \text{ кНм};$$

$$Q(M_0) = M_0\beta\eta(z_2) / 2 = 50 \cdot 0,2\eta(z_2) / 2 = 5\eta(z_2) \text{ кН}.$$

Эпюры $v(M_0)$, $M(M_0)$ и $Q(M_0)$, построенные по записанным выражениям для $z_2 \geq 0$ и отображенные на область $z_2 < 0$ с учетом кососимметричного действия момента, изображены на рис. 8.7 и...л.

Эпюры осадок поверхности основания, изгибающих моментов и поперечных сил в балке при одновременном действии F , q_0 и M_0 получены суммированием ординат одноименных эпюр от каждого рассмотренного воздействия. Суммарные эпюры показаны на рис. 8.7 м...п.

Пример проиллюстрировал методику расчета бесконечной балки на сложную нагрузку.

8.4. Формулы для полубесконечной балки, нагруженной на краю

Обратимся теперь к полубесконечной балке – балке, ограниченной с одной стороны (рис. 8.8 а, 8.9 а). Решения для такой балки обычно не представляют самостоятельного интереса, но используются при расчетах коротких балок. Формулы прогибов, моментов и поперечных сил для этих схем выводят аналогично полученным выше. Приведем окончательные результаты.

8.4.1. Балка нагружена силой на краю (рис. 8.8 а)

$$\text{Осадка} - v = F\eta_2 / (2\beta^3 EJ). \quad (8.23)$$

$$\text{Изгибающий момент} - M = F\eta_3 / \beta. \quad (8.24)$$

$$\text{Поперечная сила} - Q = -F\eta_1. \quad (8.25)$$

Отвечающие формулам эпюры изображены на рис. 8.8 б ... г.

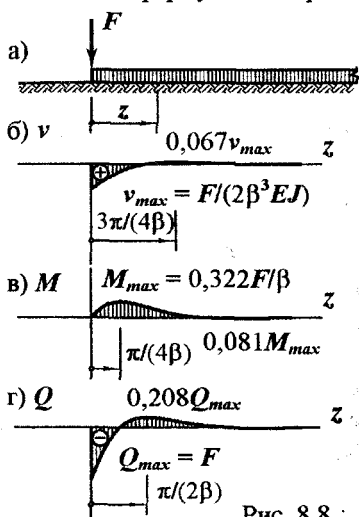


Рис. 8.8

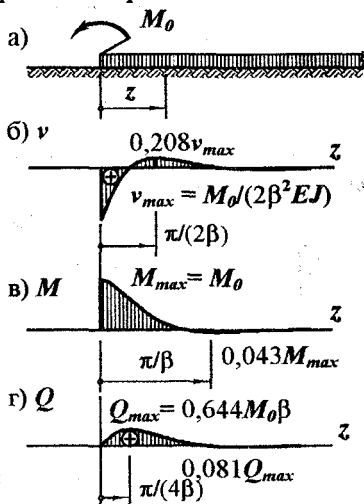


Рис. 8.9

8.4.2. Балка нагружена моментом на краю (рис. 8.9 а)

$$\text{Осадка} - v = M_0\eta_1 / (2\beta^2 EJ). \quad (8.26)$$

$$\text{Изгибающий момент} - M = M_0\eta. \quad (8.27)$$

$$\text{Поперечная сила} - Q = 2\beta M_0\eta_3. \quad (8.28)$$

Соответствующие этим формулам эпюры показаны на рис. 8.9 б ... г.

8.5. Балки конечной длины

Бесконечно длинные балки – это идеализированные балки ограниченной протяженности. В этой связи возникает вопрос о границах возможности такой идеализации.

Рассмотрим две одинаково нагруженных балки – балку конечной длины (рис. 8.10 а) и бесконечную балку (рис. 8.10 б). В первой из них изгибающие моменты и поперечные силы на краях отсутствуют. В соответствующих же сечениях бесконечной балки они не равны нулю (рис. 8.10 в). По этой причине напряженно-деформированные состояния балки конечной длины и идентичного участка бесконечной балки будут разными. Чем

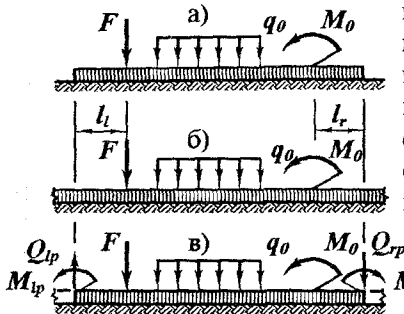


Рис. 8.10

больше усилия M_{lp} , Q_{lp} , M_{rp} и Q_{rp} , тем больше разнятся состояния сопоставляемых балок. В зависимости от степени влияния отмеченных “лишних” усилий балки конечной длины подразделяют на *длинные* и *короткие*.

8.5.1. Длинные балки

Приведенные выше решения показывают, что по мере удаления от места приложения нагрузки прогибы и внутренние усилия затухают и на некотором расстоянии становятся пренебрежимо малыми. Эпюры, приведенные на рис. 8.4 ... 8.6, 8.8 и 8.9, а также таблицы фигурирующих в решениях функций показывают, что на удалении $z = 2\pi/\beta$ осадки, изгибающие моменты и поперечные силы составляют доли процента от соответствующих максимальных значений. Естественно, ими можно пренебречь. Таким образом, если длины свободных концов балки l_l и l_r (рис. 8.10 а) удовлетворяют условиям

$$l_l \geq 2\pi/\beta, \quad l_r \geq 2\pi/\beta, \quad (8.29)$$

то моменты, M_{lp} и M_{rp} , а также силы Q_{lp} и Q_{rp} пренебрежимо малы. В этом случае можно считать, что характеристики напряженно-деформированного состояния рассматриваемой части бесконечной балки такие же, как у балки конечной длины.

Балки, удовлетворяющие условиям (8.29), называют *длинными*. При их расчетах применимы формулы, полученные для бесконечной балки.

Если какое-либо из условий (8.29) нарушено, балку считают *короткой*. О методах их расчетов – ниже.

Существенно, что принадлежность балки к категории длинных (коротких) определяется не только ее протяженностью. Из рис. 8.10 очевидно влияние мест приложения внешних сил. Может оказаться, что при одной нагрузке балку можно считать длинной, при другой следует рассматривать как короткую. Кроме того, наличие параметра β в условиях (8.29) свидетельствует о влиянии на классификацию балки жесткостных характеристик EJ и k . Таким образом, термин “длинная (короткая) балка” является в отмеченном смысле условным.

8.5.2. Короткие балки

При расчетах коротких балок приведенные выше формулы дают значительную погрешность. Нужен другой метод расчета.

В учебной и научной литературе предложены и описаны различные методы расчетов коротких балок. Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками, имеет свою область применения. Не вдаваясь в перечисление и анализ предложенных методов, остановимся на так называемом *методе компенсирующих сил*.

Суть метода состоит в следующем. Пусть требуется найти усилия и деформации в короткой балке, изображенной на рис. 8.11 а. Задачу решают в два этапа.

На первом этапе рассматривают аналогично нагруженную бесконечную балку (рис. 8.11 б). Определяют усилия и деформации в ней. В сечениях, совпадающих с краями заданной балки, возникают усилия M_{lp} , Q_{lp} , M_{rp} и Q_{rp} (рис. 8.11 в). Их нужно устранить.

С этой целью на втором этапе рассматривают полубесконечные балки. Одна из них ограничена слева (рис. 8.11 г, д), другая справа (рис. 8.11 е, ж). К краям полубесконечных балок прикладывают компенсирующие силы M_{lc} , F_{lc} , M_{rc} и F_{rc} . Величины компенсирующих сил подбирают из условий отсутствия суммарных M , Q , M_r и Q_r в сечениях, соответствующих краям заданной короткой балки.

Эпюры для схемы, изображенной на рис. 8.11 а, получают суммированием одноименных эпюр, соответствующих балкам и нагрузкам, представленным на рис. 8.11 б ... ж. Рассмотрим пример.

Пример 8.2. Построим эпюры осадки поверхности основания,

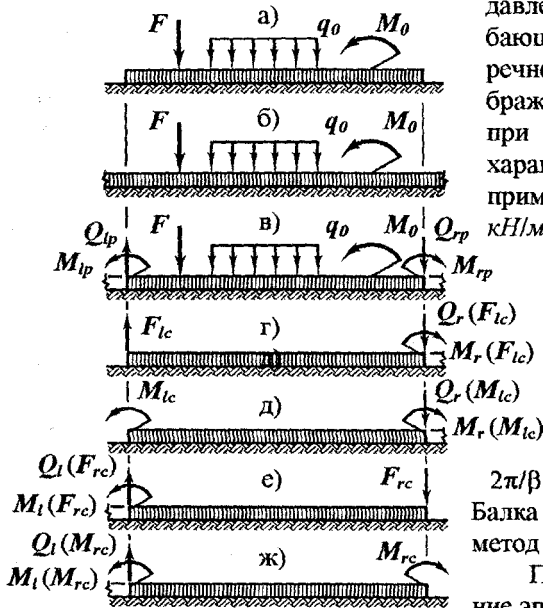


Рис. 8.11

давления на грунт, изгибающего момента и поперечной силы в балке, изображенной на рис. 8.12 а, при тех же жесткостных характеристиках, что и в примере 8.1 ($k = 4 \cdot 10^4$ кН/м², $EJ = 6,25 \cdot 10^6$ кНм²).

Установим категорию балки. Длины свободных концов $l_l = l_r = 2$ м. Согласно условиям (8.29) минимальная длина концов равна

$$2\pi/\beta = 2 \cdot 3,14/0,2 = 31,4 \text{ м.}$$

Балка короткая. Применим метод компенсирующих сил.

Первый этап – построение эпюр от заданной нагрузки в бесконечной балке. Этот

этап, как самостоятельная задача, рассмотрен в примере 8.1. Соответствующие схемы и эпюры приведены на рис. 8.12 б ... д. На краях рассматриваемого участка возникают

$$M_{lp} = 106 \text{ кНм}, Q_{lp} = 153 \text{ кН}, M_{rp} = 167 \text{ кНм} \text{ и } Q_{rp} = -31 \text{ кН.}$$

Второй этап – построение эпюр от компенсирующих сил в полубесконечных балках. От силы F_{lc} , приложенной на левой границы балки (8.12 е), по формулам (8.23) ... (8.25) находим:

$$v(F_{lc}) = -F_{lc}\eta_2/(2\beta^3 EJ) = -F_{lc}\eta_2/(2 \cdot 0,2^3 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = -10^{-5} F_{lc}\eta_2 \text{ (м/кН)};$$

$$M(F_{lc}) = -F_{lc}\eta_3/\beta = -F_{lc}\eta_3/(2 \cdot 0,2) = -50 F_{lc}\eta_3 \text{ (м)}; Q(F_{lc}) = F_{lc}\eta_1.$$

Эпюры, соответствующие полученным выражениям, изображены на рис. 8.12 ж ... к. Усилия на краях, показаны на рис. 8.12 е.

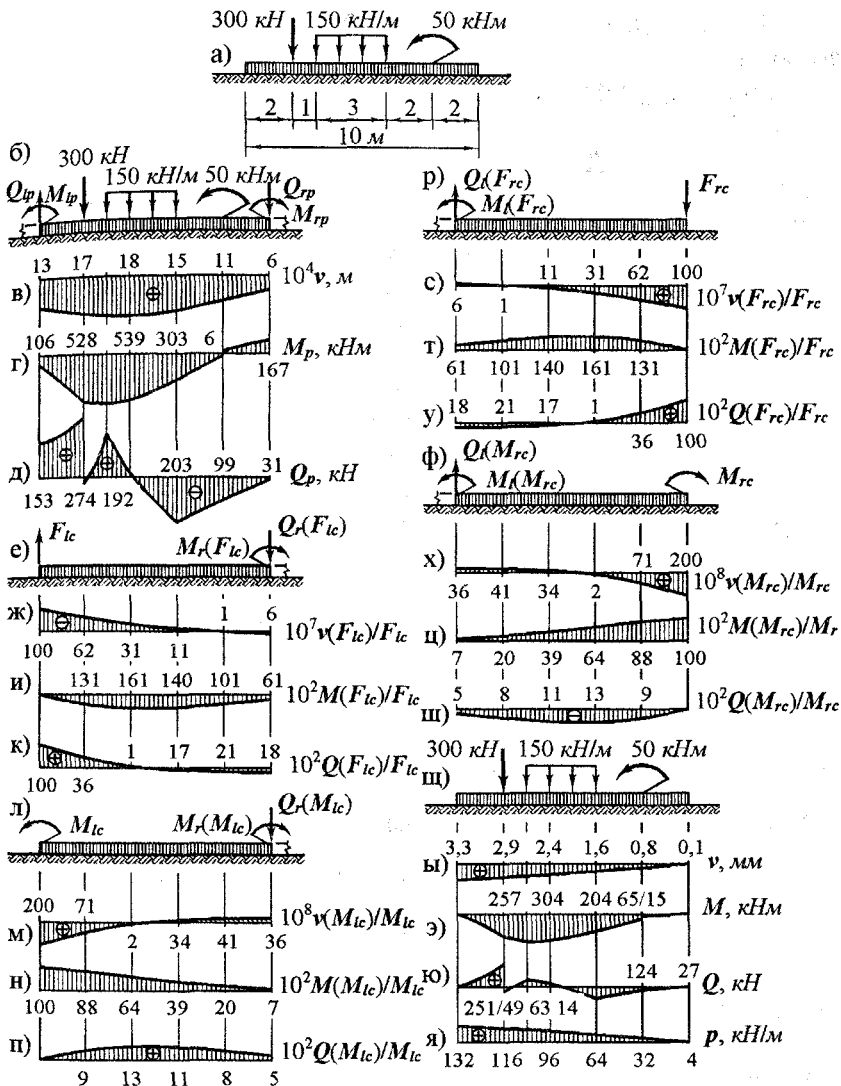


Рис. 8.12

Момент M_{lc} (рис. 8.12 л) согласно формулам (8.26) ... (8.28) вы-
зывает

$$v(M_{lc}) = M_{lc}\eta_1 / (2\beta^2 EJ) = M_{lc}\eta_1 / (2 \cdot 0,2^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = 2 \cdot 10^{-6} M_{lc}\eta_1 \text{ (1/кН)};$$

$$M(M_{lc}) = M_{lc}\eta_2;$$

$$Q(M_{lc}) = 2\beta M_{lc}\eta_3 = 0,42 M_{lc}\eta_3 \text{ (1/м)}.$$

Усилия на краях участка и эпюры, отвечающие полученным равен-
ствам, показаны на рис. 8.12 л ... п.

Эпюры от F_{rc} – правой компенсирующей силы (рис. 8.12 р) ана-
логичны изображенным на рис. 8.12 ж ... к. С учетом направления
силы F_{rc} и правил знаков они имеют вид, приведенный на рис. 8.12
с ... у.

По эпюрам с рис. 8.12 м ... п построены аналогичные эпюры от
момента M_{rc} (рис. 8.12 ф). Они показаны на рис. 8.12 х ... ш.

Это – подготовительная часть задачи.

Подберем теперь компенсирующие силы M_{lc} , F_{lc} , M_{rc} и F_{rc} так,
чтобы в крайних сечениях рассматриваемого участка отсутствовали
поперечные силы Q_l , Q_r и изгибающие моменты силы M_l , M_r .

Левое сечение:

$$- \text{ поперечная сила } Q_l = Q_{lp} + F_{lc} + Q_l(F_{rc}) + Q_l(M_{rc}) = 0;$$

$$- \text{ изгибающий момент } M_l = M_{lp} + M_{lc} + M_l(F_{rc}) + M_l(M_{rc}) = 0.$$

Правое сечение:

$$- \text{ поперечная сила } Q_r = Q_{rp} + F_{rc} + Q_r(F_{lc}) + Q_r(M_{lc}) = 0;$$

$$- \text{ изгибающий момент } M_r = M_{rp} + M_{rc} + M_r(F_{lc}) + M_r(M_{lc}) = 0.$$

Взяв с соответствующих эпюр крайние значения фигурирующих
здесь сил, придаем системе уравнений вид

$$153 + F_{lc} - 0,179 F_{rc} + 0,049 M_{rc} = 0;$$

$$-106 + M_{lc} + 0,610 F_{rc} + 0,066 M_{rc} = 0;$$

$$-31 + F_{rc} - 0,179 F_{lc} + 0,049 M_{lc} = 0;$$

$$167 + M_{rc} - 0,610 F_{lc} + 0,066 M_{lc} = 0$$

(отличия коэффициентов при неизвестных в записанной системе от
ординат на эпюрах объясняются округлением последних). Решение
системы:

$$F_{lc} = -168 \text{ кН}, M_{lc} = 128 \text{ кНм}, F_{rc} = -5,7 \text{ кН}, M_{rc} = -279 \text{ кНм}.$$

Окончательные эпюры получаем суммированием ординат одноименных эпюр:

$$\begin{aligned}v &= v_p + v(F_{lc}) \cdot F_{lc} + v(M_{lc}) \cdot M_{lc} + v(F_{rc}) \cdot F_{rc} + v(M_{rc}) \cdot M_{rc}; \\M &= M_p + M(F_{lc}) \cdot F_{lc} + M(M_{lc}) \cdot M_{lc} + M(F_{rc}) \cdot F_{rc} + M(M_{rc}) \cdot M_{rc}; \\Q &= Q_p + Q(F_{lc}) \cdot F_{lc} + Q(M_{lc}) \cdot M_{lc} + Q(F_{rc}) \cdot F_{rc} + Q(M_{rc}) \cdot M_{rc}.\end{aligned}$$

При найденных значениях компенсирующих сил эти равенства выглядят так:

$$\begin{aligned}v &= v_p - 168v(F_{lc}) + 128v(M_{lc}) - 5,7v(F_{rc}) - 279v(M_{rc}); \\M &= M_p - 168M(F_{lc}) + 128M(M_{lc}) - 5,7M(F_{rc}) - 279M(M_{rc}); \\Q &= Q_p - 168Q(F_{lc}) + 128Q(M_{lc}) - 5,7Q(F_{rc}) - 279Q(M_{rc}).\end{aligned}$$

После умножения ординат указанных эпюр на соответствующие числа и суммирования окончательные эпюры в заданной балке примут вид, показанный на рис. 8.12 в ... ю.

Давление балки на грунт пропорционально осадке (8.1): $p = kv = 4 \cdot 10^4 v$. Эпюра давления изображена на рис. 8.12 я. Задача решена.

Как следует из приведенного примера, для определения компенсирующих сил приходится решать систему линейных алгебраических уравнений четвертого порядка. Существуют методы расчета коротких балок, требующие решения системы уравнений второго порядка (метод начальных параметров). Однако это отличие не следует считать существенным недостатком описанного здесь метода, ибо матрица его системы хорошо обусловлена. В методе же начальных параметров при некоторых сочетаниях характеристик балки и основания определитель системы уравнений становится близким к нулю. Это значительно снижает точность решения. Добавим, что использование ЭВМ в расчетах практически устраняет какие-либо сложности, связанные с порядком системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотренная выше модель Фусса–Винклера является простейшей из моделей, предложенных для расчетов балок, опирающихся на деформируемое основание. В расчетной практике используют модели упругого полупространства, упругого слоя конечной толщины, а также синтезированные деформируемые конструкции, имитирующие реакцию деформируемого основания. Изучение таких моделей выходит за рамки курса.

9. Оценка прочности материалов при сложных напряженных состояниях

В предыдущих разделах установлено, что в поперечных сечениях стержневых элементов конструкций могут возникать как нормальные, так и касательные напряжения. В таких случаях материал находится в сложном напряженном состоянии. Для оценки степени опасности напряженно-деформированного состояния необходимо установить, насколько близко оно к предельному. Естественно в этой ситуации обратиться к опыту.

9.1. Об испытаниях материала при сложном напряженном состоянии

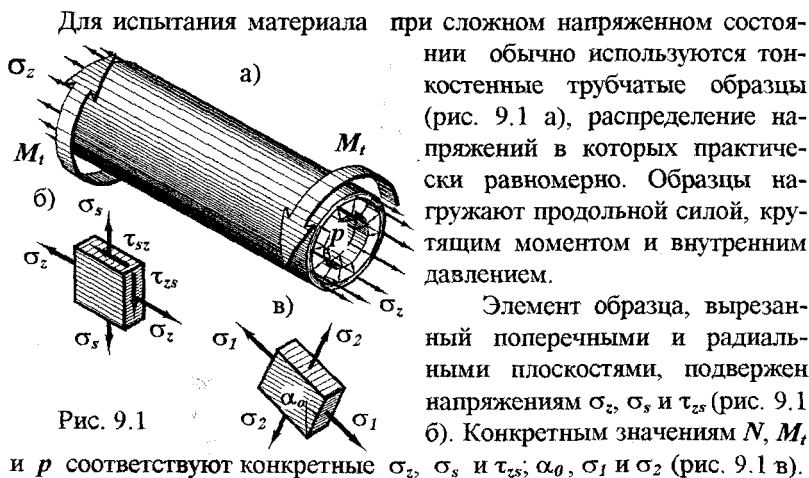


Рис. 9.1

Подбирая соотношение между N , M , и p , можно задать любое соотношение между σ_1 и σ_2 . Пропорциональным увеличением сил осуществляют нагружение образца (такое нагружение называют *простым*).

Вместе с ростом напряжений σ_1 и σ_2 растут и деформации ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 (ϵ_3 – удлинение в радиальном направлении). Диаграмма деформирования представляет собой кривую в пятимерном пространстве. Изобразить такую кривую невозможно, поэтому строят изолинии характеристик прочности (рис. 9.2). Они ограничивают области, соответствующие различным состояниям материала.

Задав некоторое соотношение между напряжениями σ_1 и σ_2 и увеличивая их (нагружение по лучу Oc_1), можно обнаружить предел пропорциональности (ему соответствует точка a_1), предел текучести (b_1) и предел прочности (c_1). Повторив испытание при другом соотношении напряжений (например, Oc_2), можно найти новые значения названных характеристик (точки a_2 , b_2 , c_2). Так можно установить границы области упругих деформаций (линия, идущая по точкам a), текучести (действительной или условной; на ней расположены точки b) и прочности (линия с точками c).

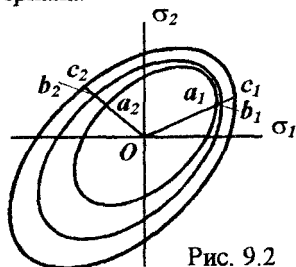


Рис. 9.2

Как следует из рис. 9.2, характеристики прочности при сложном напряженном состоянии изображаются линиями. Уравнения их можно записать в форме $f_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, $f_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, $f_3(\sigma_1, \sigma_2) = 0$. Вид функций f_1 , f_2 , f_3 зависит от материала и ряда других факторов.

При сложных траекториях нагружения проявляются упругая разгрузка, наклеп и эффект Баушингера. Таким образом, обсуждаемые границы в процессе изменения напряжений перемещаются, меняя очертание. Описание этих явлений – достаточно сложная задача, требующая специального оборудования и образцов, привлечения физических представлений о строении и поведении материалов. Задача эта является предметом специальных наук, изучающих свойства материалов, в частности, теорий упругости, пластичности и ползучести.

9.2. Некоторые физико-механические соотношения в линейно упругом изотропном теле

Прежде чем приступить к решению задачи прочности, установим необходимые зависимости между характеристиками напряженно-деформированного состояния в твердом теле. Ограничимся вначале упругими изотропными материалами, в которых напряжения и деформации пропорциональны друг другу и механические свойства во всех направлениях одинаковы.

9.2.1. Обобщенный закон Гука

Закон Гука (5.4) и соотношения между деформациями (5.5) справедливы при одноосном напряженном состоянии. При объемном напряженном состоянии связи деформаций с напряжениями более сложные.

В изотропном теле нормальные напряжения вызывают линейные деформации и не влияют на сдвиговые, касательные же связаны только со сдвигами. Поэтому закон Гука при чистом сдвиге (6.1) соблюдается и при объемном напряженном состоянии. Необходимо дополнить его зависимостями удлинений от нормальных напряжений.

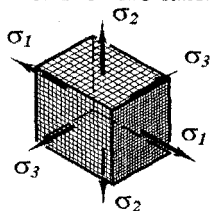


Рис. 9.3

Рассмотрим элементарный параллелепипед в трехосном напряженном состоянии (рис. 9.3).

Относительные удлинения ребер запишем в виде $\epsilon_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{21} + \epsilon_{22} + \epsilon_{23}$, $\epsilon_3 = \epsilon_{31} + \epsilon_{32} + \epsilon_{33}$. (а)

Здесь (рис. 9.4) первый индекс показывает направление деформации, второй – номер напряжения, вызвавшего это удлинение. Так, ϵ_1 – удлинение в направлении σ_1 , ϵ_2 – в направлении σ_2 , ϵ_3 – σ_3 ; $\epsilon_{11} = \epsilon_1(\sigma_1)$, $\epsilon_{12} = \epsilon_1(\sigma_2)$, $\epsilon_{13} = \epsilon_1(\sigma_3)$, $\epsilon_{21} = \epsilon_2(\sigma_1)$...

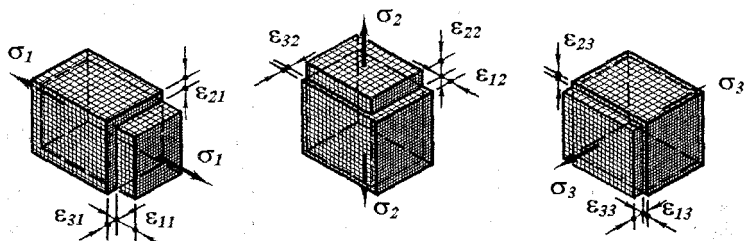


Рис. 9.4

Согласно закону Гука (5.4) при одноосных растяжениях продольные удлинения $\epsilon_{11} = \sigma_1/E$, $\epsilon_{22} = \sigma_2/E$, $\epsilon_{33} = \sigma_3/E$. В соответствии с соотношением (5.5) поперечные деформации $\epsilon_{21} = \epsilon_{31} = -\nu\epsilon_{11} = -\nu\sigma_1/E$. Аналогично, $\epsilon_{12} = \epsilon_{32} = -\nu\sigma_2/E$, $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = -\nu\sigma_3/E$. Подставив эти выражения в равенства (а), получаем закон Гука, обобщенный на трехмерное напряженное состояние. Деформации в направлении главных напряжений связаны с последними так:

$$\epsilon_1 = (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))/E, \quad \epsilon_2 = (\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1))/E, \quad \epsilon_3 = (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))/E. \quad (9.1)$$

Для изотропного тела обобщенный закон Гука (9.1) справедлив и при наличии касательных напряжений на гранях параллелепипеда. В декартовых координатах он имеет вид

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))/E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))/E, \quad \epsilon_z = (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))/E. \quad (9.2)$$

При плоском напряженном состоянии (например, в плоскости $xу$, когда $\sigma_z = 0$) равенства (9.2) вырождаются в соотношения

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \quad \epsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E. \quad (9.3)$$

Во всех разновидностях закон Гука имеет силу до тех пор, пока в материале не появятся пластические деформации.

9.2.2. Относительная объемная деформация

В результате деформирования вместе с линейными размерами изменяется и объем. Установим зависимость относительного изменения объема элементарного параллелепипеда от величины напряжений, действующих на гранях (рис. 9.5).

Объем до деформации $V = dxdydz$.

Абсолютные удлинения ребер:

$$\Delta dx = \epsilon_x dx, \quad \Delta dy = \epsilon_y dy, \quad \Delta dz = \epsilon_z dz.$$

Объем после деформации

$$V_1 = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = \\ = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)dxdydz.$$

Относительное изменение объема

$$\epsilon_V = (V_1 - V)/V = ((1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)dxdydz - \\ - dxdydz)/(dxdydz) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z.$$

Деформации ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z малы, можно пренебречь их произведениями по сравнению с самими деформациями и считать $\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$. Подставив сюда закон Гука (9.2), получаем

$$\epsilon_V = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/E. \quad (9.4)$$

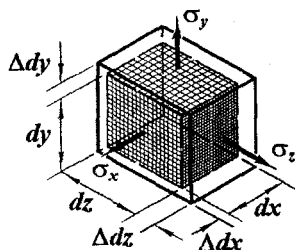


Рис. 9.5

Из полученного выражения видно, что изменение объема пропорционально сумме напряжений. В частном случае, когда сумма напряжений $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$, длины ребер изменятся (изменится форма параллелепипеда, определяемая отношением его размеров), но объем останется прежним.

9.2.3. Связь между упругими константами материала

В зависимостях деформаций от напряжений (5.4), (5.5), (6.1), а также (9.1)...(9.4) фигурируют три упругих константы материала – модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G . Естественно возникает вопрос, каково необходимое и достаточное число физико-механических констант, определяющих деформационные свойства материала. Выясним это на примере чистого сдвига.

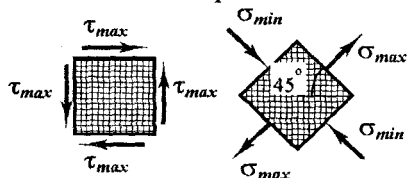


Рис. 9.6

В этом частном случае напряженного состояния в площадках чистого сдвига возникают касательные напряжения τ_{max} , в главных площадках $\sigma_{max} = \tau_{max}$ и $\sigma_{min} = -\tau_{max}$ (рис. 9.6).

При деформировании геометрические фигуры, нанесенные на образец, изменяют свои очертания. Изменения очертаний зависят от ориентации фигур. Так (рис. 9.7), квадрат $abcd$ со стороной h , обозначающий площадки чистого сдвига, станет ромбом $a_1b_1c_1d_1$, а $klmn$, имеющий сторону s и проведенный по главным площадкам, – прямоугольником $k_1l_1m_1n_1$.

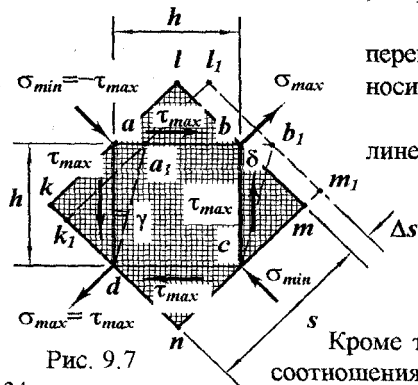


Рис. 9.7

Обозначим буквой δ сдвиговое перемещение $aa_1 = bb_1 = \delta$. Тогда относительный сдвиг $\gamma = \delta/h$. (а)

Наибольшее относительное удлинение $\epsilon_{max} = \Delta s/s$. (б)

Поскольку тело непрерывно, точки, общие для квадратов до деформации, остались общими и после нее:

$$\Delta s = \delta \cdot \cos 45^\circ.$$

Кроме того, $h = s \cdot \cos 45^\circ$. Учитывая эти соотношения, из равенств (а) и (б) имеем

$$\varepsilon_{max}/\gamma = \Delta s \cdot h / (\delta \cdot s) = \delta \cdot \cos 45^\circ \cdot h / (\delta \cdot h / \cos 45^\circ) = 0,5.$$

Таким образом, из условия неразрывности деформаций следует

$$\varepsilon_{max} = \gamma / 2. \quad (в)$$

По закону Гука (6.1) и (9.3)

$$\gamma = \tau_{max} / G; \quad \varepsilon_{max} = (\sigma_{max} - \nu \sigma_{min}) / E. \quad (е)$$

Из условий равновесия (4.2) $\sigma_{max} = \tau_{max}$, $\sigma_{min} = -\tau_{max}$. Подставив σ_{max} и σ_{min} в равенство (е) и используя соотношение (в), получаем

$$E = 2(1+\nu)G. \quad (9.5)$$

Три константы связаны условием (9.5). Следовательно, независимыми из них являются лишь две, третья выражается через них. Таким образом, из условий равновесия, неразрывности деформаций и закона Гука вытекает, что для описания деформационных свойств линейно упругого тела необходимо и достаточно двух физико-механических констант. Ими могут быть любые, фигурирующие в равенстве (9.5) или какие-либо их комбинации.

9.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации

Выведем формулу потенциальной энергии деформации для общего случая трехосного напряженного состояния (рис. 9.8).

Потенциальную энергию деформации U найдем как сумму работ W сил, соответствующих напряжениям σ_1 , σ_2 и σ_3 , на удлинениях Δds_1 , Δds_2 и Δds_3 .

Для простоты рассуждений будем считать, что все напряжения растут пропорционально от нуля до конечных значений. Тогда в соответствии с равенством

$$(5.23) \quad U = \sigma_1 ds_2 ds_3 \cdot \Delta ds_1 / 2 + \sigma_2 ds_3 ds_1 \cdot \Delta ds_2 / 2 + \sigma_3 ds_1 ds_2 \cdot \Delta ds_3 / 2.$$

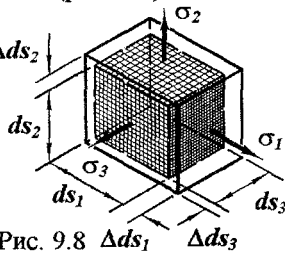
Удельная энергия деформации

$$u = U/V = U/(ds_1 \Delta ds_2 ds_3) = (\sigma_1 \Delta ds_1 / ds_1 + \sigma_2 \Delta ds_2 / ds_2 + \sigma_3 \Delta ds_3 / ds_3) / 2.$$

А так как $\Delta ds_1 / ds_1 = \varepsilon_1$, $\Delta ds_2 / ds_2 = \varepsilon_2$, $\Delta ds_3 / ds_3 = \varepsilon_3$, в итоге имеем

$$u = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) / 2. \quad (9.6)$$

Формула (9.6), строго говоря, справедлива для линейно упругих материалов. Тем не менее ею можно пользоваться также для тех упругопластических тел, у которых справедлив закон упругой разгрузки при условии, что ε_1 , ε_2 и ε_3 — упругие части деформаций, связанные с напряжениями обобщенным законом Гука.



9.2.5. Удельная потенциальная энергия изменения формы

В процессе деформирования изменяется не только объем элементарного параллелепипеда, но и его форма. Найдем потенциальную энергию, связанную со второй частью деформации.

Представим напряжения, действующие на гранях, в виде сумм (рис. 9.9) $\sigma_1 = \sigma' + \sigma''_1, \sigma_2 = \sigma' + \sigma''_2, \sigma_3 = \sigma' + \sigma''_3$. (а)

При равномерном растяжении с напряжениями σ' , изменяется лишь объем параллелепипеда, форма же (отношение длин ребер) остается неизменной. Подберем напряжения σ'' , так, чтобы при них изменялась лишь форма, а объем оставался постоянным. Для этого по формуле (9.4) должно выполняться требование $\sigma''_1 + \sigma''_2 + \sigma''_3 = 0$. (б)

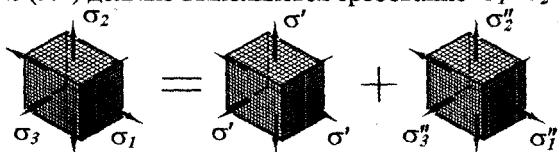


Рис. 9.9

Из уравнений (а) и (б) находим: $\sigma' = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$;

$$\sigma''_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)/3, \quad \sigma''_2 = (-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3)/3, \quad \sigma''_3 = (-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3)/3. \quad (в)$$

В соответствии с формулой (9.6) удельная потенциальная энергия изменения формы $u_f = (\sigma''_1 \epsilon_1 + \sigma''_2 \epsilon_2 + \sigma''_3 \epsilon_3)/2$. Подставляя сюда напряжения (в) и деформации (9.1), приходим к равенству

$$u_f = (1+\nu)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/(6E). \quad (9.7)$$

9.3. Теории предельных напряженных состояний

9.3.1. Постановка и план решения задачи

Инженерные расчеты не ограничиваются определением напряжений и деформаций. Они, как правило, заканчиваются проверкой условий прочности. На этом этапе расчета задача ставится так. В некоторой точке конструкции возникают главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 9.10 а). Необходимо оценить, насколько опасно это напряженное состояние материала.

Оценка опасности заданного напряженного состояния производится сравнением его с предельным состоянием. Количественной мерой безопасности напряженного состояния является коэффициент запаса. Для его определения нужно изготовить образец из данного

материала и нагружать его до предельного состояния так, чтобы в течение всего процесса отношение напряжений $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$ оставалось постоянным. Определив таким образом предельные значения главных напряжений σ_{1l} , σ_{2l} и σ_{3l} , можно вычислить коэффициент запаса¹ $n_s = \sigma_{1l}/\sigma_1 = \sigma_{2l}/\sigma_2 = \sigma_{3l}/\sigma_3$.

Однако такой путь практически невозможен. Нельзя перебрать все мыслимые соотношения главных напряжений – объем испытаний становится неограниченным. Кроме того, не всякое напряженное состояние может быть воспроизведено на испытательных машинах. Поэтому оценку прочности материала при сложном напряженном состоянии производят теоретически.

При теоретической оценке центральным является вопрос о критерии возникновения предельного состояния. Если такой критерий установлен, можно сравнивать опасность различных напряженных состояний. Можно считать, что два разных по соотношениям напряжений состояния равноопасны, если значения некоторых характеристик, принятых в качестве критерия, у них одинаковы. Исходя из этого, план решения обсуждаемой задачи выглядит так.

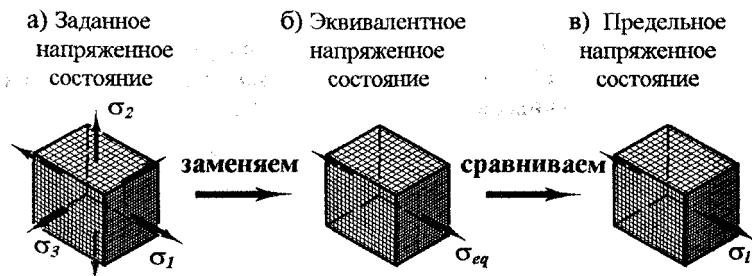


Рис. 9.10

Пусть в качестве критерия наступления предельного состояния принята некоторая характеристика. Обозначим ее буквой² C . Тогда по известным напряжениям σ_1 , σ_2 и σ_3 можно найти значение критерия для заданного напряженного состояния – $C_g = C_g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Представим теперь, что образец из того же материала находится в линейном напряженном состоянии (рис. 9.10 б). Для него также

¹ Индекс от англ. *safety* – безопасность.

² Обозн. от англ. *criterion* – критерий.

можно найти значение критерия¹ $C_{eq} = C_{eq}(\sigma_{eq})$. Если подобрать величину напряжения σ_{eq} так, чтобы критерии $C_g = C_{eq}$, то два напряженных состояния будут равноопасными. При равенстве критериев прочности линейное напряженное состояние эквивалентно заданному объемному. Объемное напряженное состояние можно заменить эквивалентным ему линейным и оценивать прочность последнего.

Линейное напряженное состояние хорошо изучено. Для него имеются физико-механические характеристики, соответствующие предельному состоянию материала (рис. 9.10 в).

Вообще говоря, в качестве эквивалентного может быть принято напряженное состояние любого вида. Однако наиболее удобным является одноосное растяжение, сравнительно просто реализуемое в лабораторных условиях, не требующее сложных образцов и оборудования. Поэтому в качестве эквивалентного принимают главное напряжение при одноосном растяжении.

Ввиду сложности и многообразия физических явлений, происходящих при деформировании, до настоящего времени не удалось построить такую теорию, которая была бы пригодна для всех материалов. В расчетной практике используются разные теории. Выбор критерия прочности и соответствующей теории зависит от материала, вида напряженного состояния и ряда других факторов.

Ниже изложены основы теорий, используемых при расчетах элементов строительных конструкций.

9.3.2. Теории прочности хрупких материалов

9.3.2.1. Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)

В этой теории критерием прочности является наибольшее нормальное напряжение².

Согласно изложенной выше позиции два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния, если наибольшие нормальные напряжения у них одинаковы.

¹ Индекс от англ. *equivalent* – эквивалент.

² Теория предложена в XVII в. Галилеем. В то время распространенным строительным материалом был естественный камень – типично хрупкий материал.

У хрупких материалов расчетные сопротивления на растяжение и на сжатие, как правило, различны, поэтому выбор “наибольшего” напряжения зависит от вида напряженного состояния и величин главных напряжений.

При трехосном растяжении ($\sigma_3 > 0$) наибольшим является напряжение σ_1 . Условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 \leq R_t. \quad (9.8)$$

В случае трехосного сжатия ($\sigma_1 < 0$) наибольшим по величине является напряжение σ_3 . Условие прочности –

$$|\sigma_3| \leq R_c. \quad (9.9)$$

При смешанном напряженном состоянии ($\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$) следует проверять оба условия – (9.8) и (9.9). Ясно, что определяющим будет то напряжение, которое ближе к соответствующему расчетному сопротивлению.

Первая теория прочности плохо согласуется с результатами экспериментов при объемных напряженных состояниях. В настоящее время она представляет, главным образом, исторический интерес. Но, благодаря простоте расчетных формул, ее иногда используют для весьма хрупких материалов при напряженных состояниях, близких к линейным.

9.3.2.2. Вторая теория прочности (теория наибольших относительных удлинений)

Во второй теории критерием прочности служит наибольшее относительное удлинение¹.

Согласно этой теории два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния, если наибольшие относительные удлинения у них одинаковы.

Для заданного трехмерного напряженного состояния критерий прочности $C_g = \epsilon_{max} = \epsilon_1$. По обобщенному закону Гука (9.1) $C_g = \epsilon_1 = (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))/E$.

В эквивалентном напряженном состоянии $C_{eq} = \epsilon_{max} = \sigma_{eq}/E$.

¹ Предложение высказано известным физиком Мариоттом в 1682 г., по-видимому, полагавшим, что причиной разрушения является отдаление микрочастиц друг от друга на некоторую величину, превышающую критическую.

Приравнивая критерии прочности, находим

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (9.10)$$

Условие прочности по второй теории прочности принимает вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R_t. \quad (9.11)$$

Как видно из формулы (9.10), теория наибольших относительных удлинений учитывает все главные напряжения. Более того, она в какой-то мере отражает свойства материала, так как содержит коэффициент Пуассона. Эти обстоятельства следует отнести к достоинствам теории. Теория наибольших относительных удлинений способна объяснить образование продольных трещин при сжатии, что иногда наблюдается в хрупких материалах (см. рис. 5.7).

В то же время обсуждаемая теория обладает существенными недостатками. В тех случаях, когда материал испытывает напряженное состояние, близкое к всестороннему сжатию, ε_{max} отрицательно и формулу (9.10) применять нельзя. Это противоречит самой идее теории.

Следует также отметить, что теория наибольших относительных удлинений, строго говоря, является не теорией прочности, а теорией наступления предельного упругого состояния, ибо при выводе формулы эквивалентного напряжения использован закон Гука. Однако у хрупких материалов деформации в момент разрушения малы, и можно считать, что закон Гука выполняется во всем диапазоне несущей способности. Поэтому высказанное замечание имеет скорее принципиальное, а не практическое значение.

Вторая теория прочности имеет ограниченную область применения и обычно используется вместе с первой теорией, как дополнительный способ прогнозирования состояния хрупкого материала.

9.3.3. Гипотезы пластичности

В качестве предельного состояния пластичного материала принимают такое, при котором появляются остаточные деформации. Предельным напряжением служит либо действительный, либо условный предел текучести. Поэтому излагаемые ниже теории следует рассматривать как условия появления пластических деформаций, хотя термин "прочность" в них будет использован (в отмеченное выше смысле).

9.3.3.1. Третья теория (теория наибольших касательных напряжений)

В этой теории критерием прочности является наибольшее касательное напряжение¹.

Основанием критерия послужили линии скольжения в момент текучести растягиваемого образца из мягкой стали (рис. 9.11). Линии наклонены под 45° к оси образца. Известно, что в таких площадках возникают наибольшие касательные напряжения.

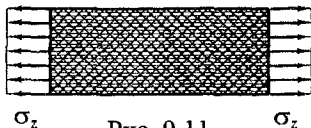


Рис. 9.11

Итак, по третьей теории два элемента из одинакового материала равнопрочны, если максимальные касательные напряжения у них одинаковы¹.

Согласно формуле (4.7) критерий прочности в заданном напряженном состоянии $C_g = \tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$. Учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, имеем $C_g = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

В эквивалентном состоянии (одноосном растяжении) $C_{eq} = \sigma_{eq}/2$. Из равенства критериев следует

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (9.12)$$

По полученной формуле видно, что эквивалентное напряжение не зависит от промежуточного по величине напряжения σ_2 . Это недостаток теории, ибо опытная проверка показала, что влияние σ_2 вносит коррективы до 15 %.

При двухосном растяжении и смешанном напряженном состоянии она неплохо согласуется с экспериментальными результатами для пластичных материалов. Поэтому в настоящее время теорию наибольших касательных напряжений часто используют в инженерных расчетах, благодаря простоте формулы эквивалентного напряжения.

Формула (9.12) связывает эквивалентное и главные напряжения. Целесообразно записать ее частный вид, учитывающий напряженное состояние, характерное для стержневого элемента.

¹ Предложена в 1773 г. известным физиком Кулоном.

Наиболее общим является напряженное состояние при поперечном изгибе. Одноосное растяжение (сжатие) и чистый сдвиг – частные его виды. Фигурирующие в формуле (9.12) главные напряжения в случае поперечного изгиба определяются равенствами (7.7):

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\max, \min} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2})/2.$$

Подставив их в формулу (9.12), получаем

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}. \quad (9.13)$$

Второй индекс у касательного напряжения намеренно опущен, чтобы распространить формулу на τ_z любого направления.

Условие прочности по третьей теории имеет вид

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \leq R. \quad (9.14)$$

9.3.3.2. Четвертая теория

(теория удельной потенциальной энергии изменения формы)

Нередко возникающая необходимость учета влияния всех главных напряжений на условие возникновения пластических деформаций породила предложение использовать в ранге критерия удельную потенциальную энергию изменения формы.

В четвертой теории принято, что два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния при равных удельных потенциальных энергиях изменения формы.

Критерий прочности в заданном напряженном состоянии – (9.7)

$$C_g = u_f = (1+\nu)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/(6E).$$

В эквивалентном состоянии $C_{eq} = u_f = (1+\nu)2\sigma_{eq}^2/(6E)$. Из равенства критериев

$$\sigma_{eq} = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2}. \quad (9.15)$$

Условие прочности в этой теории записывается так:

$$\sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2} \leq R. \quad (9.16)$$

Четвертая теория свободна от недостатка, присущего третьей теории. В формуле (9.15) равноправно присутствуют все главные напряжения. Области экспериментального подтверждения третьей и четвертой теорий близки. Однако последняя из них лучше согласуется с экспериментом при промежуточном напряжении σ_2 , близком к σ_1 или σ_3 .

Формула (9.15) и условие (9.16) нашли широкое применение при расчетах стержневых элементов конструкций. Учитывая, что в стержне $\sigma_2 = 0$, а σ_1 и σ_3 равны значениям (7.7), получаем частные формулу и условие прочности

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \quad (9.17)$$

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq R \quad (9.18)$$

Третью и четвертую теории рекомендуют для пластичных материалов с равными пределами текучести при растяжении и сжатии.

9.3.4. Теория прочности О.Мора

Для оценки прочности материала, с одной стороны, обладающего пластическими свойствами, но, с другой, имеющего разные характеристики прочности при растяжении и сжатии, О.Мором¹ была предложена теория, основанная на экспериментальном определении коэффициента запаса.

Изложение теории О.Мора связано с графическим отображением напряженного состояния, которое здесь не дано. Поэтому ограничимся описанием приближенного варианта теории.

По этому варианту теории эквивалентное напряжение можно представить линейной функцией наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений:

$$\sigma_{eq} = a\sigma_1 + b\sigma_3, \quad (a)$$

в которой коэффициенты a и b можно найти из испытаний на одноосные растяжение и сжатие.

При растяжении (рис. 9.12 а) напряженное состояние элементарного параллелепипеда характерно тем, что $\sigma_1 = N/A$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

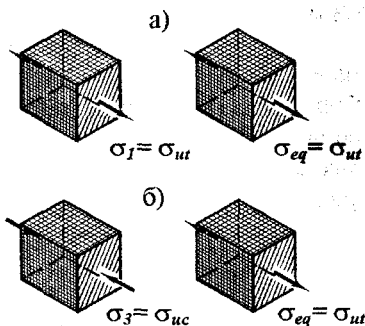


Рис. 9.12

¹Отто Мор (1835–1918) – известный немецкий ученый в области сопротивления материалов и строительной механики. По образованию инженер-строитель занимался строительством железных дорог, преподавал инженерную механику в Штутгартском политехникуме, вел большую научную работу.

В тот момент, когда напряжение достигнет предела прочности $\sigma_1 = \sigma_{ut}$, эквивалентное напряжение также следует принять равным $\sigma_{eq} = \sigma_{ut}$. Подставив напряжения, соответствующие рассматриваемому моменту, в равенство (а), имеем $\sigma_{ut} = a\sigma_{ut} + b \cdot 0$, откуда $a = 1$.

При сжатии (рис. 9.12 б) $\sigma_3 = N/A$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Когда напряжение достигнет предела прочности на сжатие $\sigma_3 = -\sigma_{uc}$, эквивалентное напряжение в силу того, что оно растягивающее, следует принять равным $\sigma_{eq} = \sigma_{ut}$. Подставив напряжения, соответствующие этому состоянию, в равенство (а), устанавливаем: $\sigma_{ut} = a \cdot 0 - b\sigma_{uc}$. Отсюда $b = -\sigma_{ut}/\sigma_{uc}$.

Итак,
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - (\sigma_{ut}/\sigma_{uc})\sigma_3. \quad (9.19)$$

Условие прочности по теории О.Мора –
$$\sigma_1 - (\sigma_{ut}/\sigma_{uc})\sigma_3 \leq R. \quad (9.20)$$

У хрупких материалов отношение σ_{ut}/σ_{uc} мало. Если пренебречь вторым слагаемым в формуле (9.19), теория О.Мора совпадает с первой теорией (в области растягивающих напряжений). При $\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$, что характерно для пластичных материалов, формулы (9.19) и (9.12) становятся одинаковыми – теория О.Мора совпадает с третьей теорией.

Теорию О.Мора рекомендуют применять для оценки прочности материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию. При этом в рассмотренном приближенном варианте она совершенно не применима для трехосных растяжений и трехосных сжатий. Теория дает удовлетворительные результаты при смешанных напряженных состояниях, когда $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

Изложенные теории дают возможность оценивать степень опасности плоского и объемного напряженных состояний материала. При этом в рамках одного расчета нередко используют несколько теорий. Так, прочность бетона при растяжении проверяют, как правило, по первой теории, при сжатии – по первой и второй; иногда применяют специальные теории, здесь не рассмотренные. Такой анализ расширяет представление о возможных вариантах поведения материала в рассматриваемых условиях.

Первую и вторую теории рекомендуют для хрупких материалов. Но в условиях всестороннего сжатия ни та, ни другая не подтверждаются экспериментами и не применимы.

Третья и четвертая теории в расчетах стержневых элементов конструкций дают практически одинаковые результаты. В пластинках, оболочках и массивных объектах их прогнозы отличаются до 15%. Четвертая теория лучше совпадает с экспериментом, но более сложна в реализации. Третья же проще в расчетах, но менее достоверна. Выбор критерия прочности, а вместе с ним и теории зависит от конкретных условий.

Теорию О.Мора рекомендуют для материалов, которые нельзя отнести ни к ярко выраженным хрупким, ни к безусловно пластичным. Среди строительных материалов перечень таких достаточно широк.

Не следует забывать, что деление материалов на хрупкие и пластичные весьма относительно. Один и тот же материал в разных условиях может проявлять разные свойства: в одних быть хрупким, в других пластичным. Важнейшими факторами, определяющими поведение материала, являются

- температура,
- скорость нагружения,
- длительность действия нагрузки,
- вид напряженного состояния и др.

Влияние этих факторов следует принимать во внимание, теоретически прогнозируя поведение материалов при сложных напряженных состояниях.

10. Сложное сопротивление

Термин “сложное сопротивление” в известной степени условен. В учебной и методической литературе по сопротивлению материалов встречаются разные толкования этого термина. Достаточно сказать, что рассмотренный выше поперечный изгиб во многих случаях оказывается сложнее некоторых видов нагружения, отнесенных к сложному сопротивлению, как по методам определения напряжений, так и по оценке опасности напряженного состояния материала.

Сложным условимся называть сопротивление такому виду нагружения, при котором возникает несколько внутренних силовых факторов, одновременно учитываемых в расчете на прочность.

С этих позиций нетрудно объяснить, почему прямой поперечный изгиб отнесен к так называемому “простому” сопротивлению. Хотя в сечении балки при этом возникают два внутренних силовых фактора (изгибающий момент и поперечная сила), в условиях прочности фигурирует один из них: момент в расчете по нормальным напряжениям, поперечная сила – по касательным.

Для определения напряжений и деформаций при сложном сопротивлении, как правило, пользуются принципом независимости действия сил (иногда его называют принципом наложения или принципом суперпозиции).

Названный принцип можно сформулировать так. *Результат сложного воздействия равен сумме не зависящих друг от друга результатов простых воздействий, составляющих сложное.*

Из этой формулировки следует, что *напряжение в точке стержня при наличии нескольких внутренних силовых факторов равно сумме напряжений, соответствующих каждому силовому*

фактору в отдельности. Сумма может быть алгебраической или геометрической в зависимости от того, какие напряжения суммируются – нормальные или касательные.

10.1. Косой изгиб

Косым изгибом называют такой вид нагружения, при котором плоскость действия изгибающего момента не перпендикулярна ни одной из главных центральных осей сечения балки.

Если наряду с изгибающим моментом в сечении возникает и поперечная сила, изгиб называют косым поперечным. Когда поперечной силы нет, – косым чистым.

10.1.1. Напряжения в поперечном сечении

Для знакомства с методом определения нормальных напряжений в поперечном сечении при косом изгибе балки рассмотрим конкретную схему (рис. 10.1 а).

Сила F перпендикулярна продольной оси балки и наклонена к главной центральной оси x под углом α . Естественно, плоскость действия изгибающего момента также наклонена к оси x под углом α – балка испытывает косой изгиб.

Для упрощения дальнейших выкладок заменим силу F двумя: F_x и F_y : $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$. Каждая из них вызывает прямой изгиб. Эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях балки показаны на рис. 10.1 б.

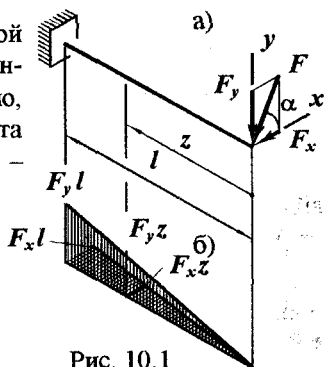


Рис. 10.1

Рассмотрим произвольное сечение балки. Оно вместе с изгибающими моментами, возникающими в нем, изображено на рис. 10.2.

Согласно принципу независимости действия сил нормальное напряжение σ_z в произвольной точке можно найти как сумму напряжений от изгиба в плоскости yz и в плоскости xz :

$$\sigma_z = \sigma_z(M_x) + \sigma_z(M_y).$$

Найдем каждое из них. По формуле (7.3) и аналогии имеем:

$$\sigma_z(M_x) = M_x y / J_x, \quad \sigma_z(M_y) = M_y x / J_y.$$

$$\text{Таким образом,} \quad \sigma_z = M_x y / J_x + M_y x / J_y. \quad (10.1)$$

Здесь: M_x и M_y – изгибающие моменты;

y и x – расстояния от главных центральных осей сечения до рассматриваемой точки;

J_x и J_y – главные моменты инерции сечения балки.

Знаки перед каждым слагаемым выбираются в зависимости от знака

напряжения. Напри-

мер, плюс, если на-

пряжение растягива-

ющее, минус, если

сжимающее. При тех

направлениях изги-

бающих моментов,

которые показаны на

рис. 10.2 а, в неза-

штрихованной чет-

верти суммируются растягивающие

напряжения; в четверти, за-

штрихованной дважды, напряжения

также суммируются (рис. 10.2

б), но сжимающие. В четвертях, за-

штрихованных в одну сторону,

напряжения от одного момента

растягивающие, от другого сжимаю-

щие и потому вычитаются.

Касательные напряжения в сечении балки также могут быть найдены по принципу независимости действия сил. Но суммировать напряжения τ_{yz} и τ_{zx} нужно геометрически.

Пример 10.1. Двутавровая балка опирается концами на шарнирные опоры (рис. 10.3 а). Посередине пролета на нее действует сила F , перпендикулярная продольной оси балки и наклоненная к горизонтальной главной плоскости под углом α .

Построим эпюру нормальных напряжений в среднем сечении балки: от каждого изгибающего момента, а также суммарную.

Числовые значения исходных данных: $F = 3 \text{ кН}$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 2 \text{ м}$; двутавр № 24 ($W_x = 289 \text{ см}^3$, $W_y = 34,5 \text{ см}^3$).

Разложим силу на две составляющие: $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$ (рис. 10.3 а). Эпюры изгибающих моментов от них показаны на рис. 10.3 б. У балки растянуты нижние и правые волокна (рис. 10.3 в).

Моменты в среднем сечении балки равны:

$$48 \quad M_x = F_y l / 2 = (Fl/2) \sin \alpha, \quad M_y = F_x l / 2 = (Fl/2) \cos \alpha.$$

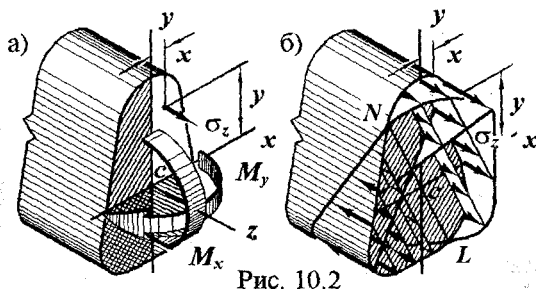


Рис. 10.2

Наибольшие напряжения, вызванные изгибом в вертикальной плоскости,

$$\begin{aligned} \max \sigma_z(M_x) &= M_x / W_x = \\ &= Fl \sin \alpha / (2W_x) = \\ &= 3 \cdot 200 \sqrt{3} / (2 \cdot 2 \cdot 289) = \\ &= 0,9 \text{ кН/см}^2 \text{ (рис. 10.3 г)}. \end{aligned}$$

От изгиба в горизонтальной плоскости (рис. 10.3 д)

$$\begin{aligned} \max \sigma_z(M_y) &= M_y / W_y = \\ &= Fl \cos \alpha / (2W_y) = \\ &= 3 \cdot 200 / (2 \cdot 2 \cdot 34,5) = \\ &= 4,35 \text{ кН/см}^2 \text{ (рис 10.3 д)}. \end{aligned}$$

Общую эпюру нормальных напряжений в сечении (рис. 10.3 е) получаем суммированием предыдущих эпюр с учетом направления напряжений.

Наибольшие напряжения в среднем сечении балки достигают $5,25 \text{ кН/см}^2$. В левой верхней точке они сжимающие, в правой нижней – растягивающие.

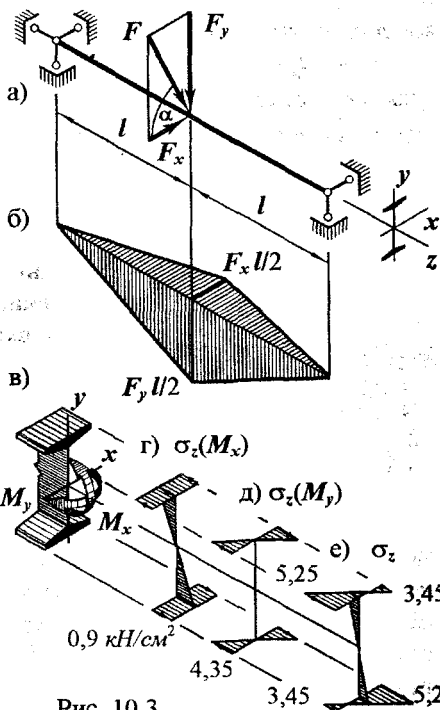


Рис. 10.3

10.1.2. Нейтральная линия при косом изгибе.

Наибольшие нормальные напряжения. Расчет на прочность

10.1.2.1. Вновь обратимся к схеме, изображенной на рис. 10.1. Найдем положение нейтральной линии (NL) в произвольном сечении балки (рис. 10.4). Пусть x_0 и y_0 – координаты ее точек. Тогда нормальные напряжения $\sigma_z = M_x y_0 / J_x + M_y x_0 / J_y = 0$ – нейтральная линия при косом изгибе – прямая, проходящая через начало координат (центр тяжести). Из уравнения находим $y_0 = -(J_x M_y / (J_y M_x)) x_0$. Множитель при x_0 – тангенс угла наклона нейтральной линии к оси x : $\operatorname{tg} \varphi = -(J_x M_y / (J_y M_x))$. Но $M_y / M_x = F_x z / (F_y z) = F \cos \alpha / (F \sin \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$. Итак,

$$\operatorname{tg} \varphi = -(J_x / J_y) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (10.2)$$

Зная плоскость действия результирующего изгибающего момента M_b (угол α), по формуле (10.2) можно найти положение нейтральной линии (угол φ).

Если $J_x \neq J_y$, то $\operatorname{tg} \varphi \neq -\operatorname{ctg} \alpha$ – нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия результирующего момента. При $J_x = J_y$, $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \alpha$ – нейтральная линия перпендикулярна плоскости изгиба.

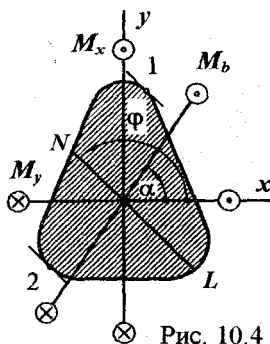


Рис. 10.4 сечением по нейтральной линии;
– цилиндрической боковой поверхности балки.

10.1.2.2. Для оценки прочности материала балки нужно найти опасную точку. С этой целью проанализируем равенство (10.1). Для фиксированного сечения оно представляет собой уравнение плоскости, так как переменные σ_z , x и y входят в него в первой степени. Эпюра σ_z представляет тело (рис. 10.2 б), ограниченное

- плоскостью поперечного сечения;
- плоскостью (10.1), пересекающейся с

– плоскостью поперечного сечения;
– плоскостью (10.1), пересекающейся с сечением по нейтральной линии;
– цилиндрической боковой поверхности балки.

Чем дальше от нейтральной линии расположена точка, тем больше в ней напряжение σ_z . Наибольшее нормальное напряжение σ_z возникает в самой удаленной от нейтральной линии точке. На рис. 10.4 отмечены точки 1 и 2. В первой возникает наибольшее растягивающее напряжение, во второй – наибольшее сжимающее.

Пример 10.2. В эллиптическом сечении балки возникают изгибающие моменты $M_x = 1$ кНм и $M_y = 0,4$ кНм (рис. 10.5). Размеры сечения: $b = 8$ см, $h = 16$ см. Найдем наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

Установим плоскость действия результирующего изгибающего момента M_b . Изобразив моменты векторами, видим, что

$$\operatorname{tg} \beta = M_y / M_x = 0,4; \quad \beta = 21^\circ 50'; \quad \alpha = \beta + 90^\circ = 111^\circ 50'.$$

По формуле (10.2) найдем положение нейтральной линии (NL).

Моменты инерции эллипса:

$$J_x = \pi b h^3 / 64 = 3,14 \cdot 8 \cdot 16^3 / 64 = 1608 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \pi b^3 h / 64 = 3,14 \cdot 8^3 \cdot 16 / 64 = 402 \text{ см}^4.$$

Теперь $\operatorname{tg} \varphi = -(J_x / J_y) \operatorname{ctg} \alpha = -1608 \operatorname{ctg} 111^\circ 50' / 402 = 1,6$. Отсюда $\varphi = 58^\circ$.

Для поиска точек с наибольшими напряжениями запишем вначале уравнение эллипса: $4x^2/b^2 + 4y^2/h^2 = 1$. Разрешенное относительно y оно имеет вид $y = \pm h\sqrt{1 - 4x^2/b^2}/2$.

Тангенс угла между осью x и касательной к эллипсу и равен

$$y' = \pm 2hx/(b\sqrt{b^2 - 4x^2}).$$

Абсциссы точек, наиболее удаленных от нейтральной линии, найдем из равенства $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Решив это уравнение, имеем

$$x = \pm b^2 \operatorname{tg}\varphi / (2\sqrt{h^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}) = \\ = \pm 8^2 1,6 / (2\sqrt{16^2 + 8^2 1,6^2}) = \pm 2,5 \text{ см.}$$

$$\text{Ординаты } y = \pm h\sqrt{1 - 4x^2/b^2}/2 = \\ = \pm 16\sqrt{1 - 4 \cdot 2,5^2/8^2}/2 = \pm 6,25 \text{ см.}$$

Точки с наибольшими нормальными напряжениями — 1 и 2 во втором и четвертом квадрантах, где напряжения от моментов M_x и M_y одного знака.

Напряжения:

$$\max \sigma_z = M_x y_{1,2} / J_x + M_y x_{1,2} / J_y = \\ = 100 \cdot 6,25 / 1608 + 40 \cdot 2,5 / 402 = 0,636 \text{ кН/см}^2.$$

В точке 1 напряжение растягивающее, в 2 сжимающее.

Не всегда, однако, удастся аналитически определить координаты точек с наибольшими напряжениями. Если очертание контура сечения сложно, аналитический путь становится чрезмерно громоздким, а порой невозможным. В таких случаях можно использовать графические приемы.

Нередко проще вычислить напряжения в нескольких “подозрительных” точках. Сопоставляя напряжения в них, можно найти максимальное и установить, какая точка опасна.

Если в сечении имеются точки, наиболее удаленные одновременно от обеих главных центральных осей (прямоугольник, двутавр, швеллер и т.п.), одна из них и будет опасной. Формула напряжений (10.1) в таких точках принимает вид

$$\max \sigma_z = M_x / W_x + M_y / W_y. \quad (10.3)$$

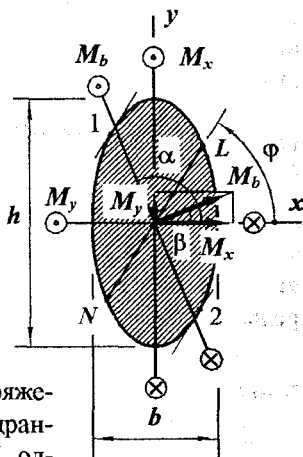


Рис. 10.5

10.1.2.3. Расчет на прочность при косом изгибе ведется обычно по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности (5.9) требует, чтобы наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения не превысили соответствующие расчетные сопротивления материала балки.

В тонкостенных балках не исключена необходимость проверки прочности материала по наибольшим касательным напряжениям (6.3) или (7.12).

10.1.3. Перемещения при косом изгибе

Перемещения при косом изгибе определяются также по принципу независимости действия сил. Проиллюстрируем методику определения прогибов в балках конкретной схемой.

Пример 10.3. Найдем уравнение изогнутой оси, величину и направление прогиба конца балки, показанной на рис. 10.6.

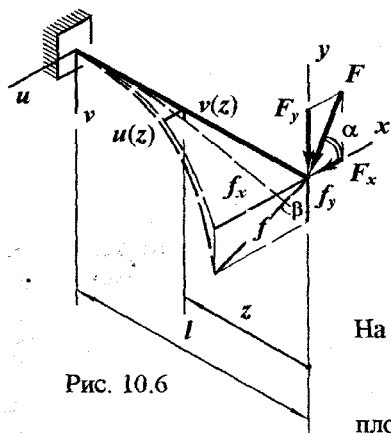


Рис. 10.6

Заменяем силу F двумя:

$$F_x = F \cos \alpha \text{ и } F_y = F \sin \alpha,$$

лежащими в главных плоскостях xz и yz . Каждая из них вызывает плоский прямой изгиб.

Подобная балка рассмотрена в примере 7.9. Используя его результат, запишем уравнение вертикальных перемещений точек балки

$$v(z) = F_y(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x).$$

На свободном конце

$$f_y = v(0) = F_y l^3 / (3EJ_x).$$

Аналогично в горизонтальной плоскости: уравнение прогибов

$$u(z) = F_x(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x), \text{ на конце } f_x = u(0) = F_x l^3 / (3EJ_x).$$

$$\text{Полное перемещение конца балки } f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Направление полного перемещения конца определяется отношением $f_y/f_x = \text{ctg} \beta = F_y l^3 / (3EJ_y) / (3EJ_x F_x l^3) = (J_y/J_x) \cdot \text{tg} \alpha$. Зафиксируем результат:

$$\text{ctg} \beta = (J_y/J_x) \text{tg} \alpha. \quad (10.4)$$

Из отношения $v(z)/u(z)$ следует то же равенство. Это значит, что угол β не зависит от z . Изогнутая ось балки — плоская кривая.

Если моменты инерции сечения разные: $J_y \neq J_x$, то $\beta \neq 90 + \alpha$. Направление перемещения не совпадает с направлением силы F . Это обстоятельство и является причиной названия "косой изгиб". При $J_y = J_x$ угол $\beta = 90 + \alpha$, изгиб прямой.

Перемножим левые и правые части формул (10.2) и (10.4): $\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\beta = -(J_x / J_y) \operatorname{ctg}\alpha (J_y / J_x) \operatorname{tg}\alpha = -1$. Из этого равенства следует, что при плоском косом изгибе перемещения перпендикулярны нейтральному слою.

В зависимости от вида внешней нагрузки, способа закрепления и материала балки, а также геометрических характеристик сечения изогнутая ось может быть и не плоской кривой. В таких случаях изгиб называют *пространственным*.

10.2. Внецентренное сжатие.

Растяжение или сжатие с изгибом

10.2.1. Внецентренное сжатие

Внецентренное сжатие – это такой вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, параллельна оси стержня.

10.2.1.1. Напряжения в поперечном сечении

Рассмотрим действие силы F , приложенной в точке с координатами x_F и y_F (рис. 10.7 а). Оси x и y – главные центральные.

В стержнях большой жесткости искривление продольной оси незначительно. Им можно пренебречь. Тогда в сечениях стержня возникнут продольные силы и изгибающие моменты (рис. 10.7 б): $N = F$, $M_x = Fy_F$ и $M_y = Fx_F$. (10.5)

По принципу наложения напряжение в произвольной точке a

с координатами x и y равно сумме напряжений $\sigma_z(N)$, $\sigma_z(M_x)$ и $\sigma_z(M_y)$ (рис. 10.7 в, г, д):

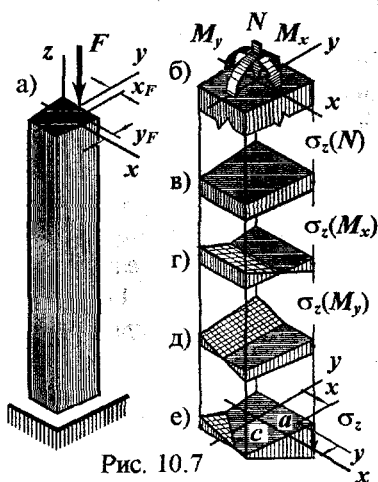


Рис. 10.7

$\sigma_z = \sigma_z(N) + \sigma_z(M_x) + \sigma_z(M_y)$ (рис. 10.7 е). Используя формулы напряжений (5.10) и (10.1), запишем

$$\sigma_z = N/A + M_{x,y}/J_x + M_{y,x}/J_y. \quad (10.6)$$

В виде (10.6) формула напряжений справедлива не только для внецентренно сжатого стержня, но и при других нагрузках, вызывающих в сечении продольную силу и изгибающие моменты.

Во внецентренно сжатом стержне внутренние силовые факторы определяются равенствами (10.5). Нормальные напряжения в нем будут равны

$$\sigma_z = F/A + F y_F y_0 / J_x + F x_F x_0 / J_y. \quad (10.7)$$

В правых частях формул (10.6) и (10.7) слагаемые суммируются, так как напряжения от всех действующих силовых факторов в первом квадранте сечения сжимающие.

10.2.1.2. Нейтральная линия при внецентренном сжатии. Положение опасной точки. Расчет на прочность

Обозначим координаты точек нейтральной линии x_0 и y_0 . Подставим их в формулу (10.7) и приравняем напряжения нулю:

$$F/A + F y_F y_0 / J_x + F x_F x_0 / J_y = 0.$$

Преобразуем это равенство к виду

$$1 + y_F y_0 / (J_x / A) + x_F x_0 / (J_y / A) = 0.$$

Отношения, стоящие в знаменателях второго и третьего слагаемых, являются геометрическими характеристиками сечения. В сопротивлении материалов используется понятие *радиуса инерции* –

$$i_{x(y)} = \sqrt{J_{x(y)} / A}. \quad (10.8)$$

В этой формуле $J_{x(y)}$ – осевой момент инерции сечения относительно оси x (y). Используя обозначение (10.8), уравнение нейтральной линии можно записать в виде

$$1 + y_F y_0 / i_x^2 + x_F x_0 / i_y^2 = 0. \quad (a)$$

Отсюда видим, что *при внецентренном сжатии нейтральная линия – прямая, не проходящая через центр тяжести сечения.*

Обозначим a_x и a_y отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях x и y (рис. 10.8). Подставив в уравнение (a) вначале $x_0 = 0$ и $y_0 = a_y$, а затем $x_0 = a_x$ и $y_0 = 0$, находим:

$$a_x = -i_y^2 / x_F, \quad a_y = -i_x^2 / y_F. \quad (10.9)$$

Из анализа равенств (10.9) можно сделать некоторые выводы о зависимости положения нейтральной линии от места приложения силы:

– положение нейтральной линии nl не зависит от величины силы F (ее в формулах (10.9) нет);

– нейтральная линия всегда проходит через квадрант, противоположный тому, где приложена сила (об этом свидетельствуют знаки в равенствах (10.9));

– по мере удаления точки приложения силы F от центра тяжести (увеличения x_F и y_F) нейтральная линия приближается к нему (a_x и a_y уменьшаются) и наоборот, если сила приближается к центру тяжести, нейтральная линия удаляется от него;

– в том случае, когда точка приложения силы лежит на одной из главных центральных осей, нейтральная линия перпендикулярна этой оси (например, при $x_F \rightarrow 0$ отрезок $a_x \rightarrow \infty$);

– перемещение точки приложения силы по прямой вызывает поворот нейтральной линии вокруг некоторой неподвижной точки. Последнее утверждение не столь очевидно и требует доказательства.

Пусть линия действия силы F проходит через точку 1 (рис. 10.9). Нейтральная линия занимает некоторое положение n_1l_1 . Если через точку 2, – n_2l_2 . Напряжение в точке b в обоих случаях равно нулю. Любую силу, линия действия которой пересекает прямую 1–2 (например в точке 3), можно заменить двумя: одна с линией через точку 1, другая через 2. Напряжение в точке b при этом будет равным нулю. Нейтральная линия пройдет через нее. Движение вертикальной силы по прямой 1–2 вызовет поворот нейтральной линии вокруг точки b .

Формулы (10.6) и (10.7) – уравнения плоскости, наклоненной к поперечному сечению и пересекающейся с ним по нейтральной линии. Следовательно, при внецентренном сжатии (и подобных ему видах нагружения) наибольшие нормальные напряжения возникают

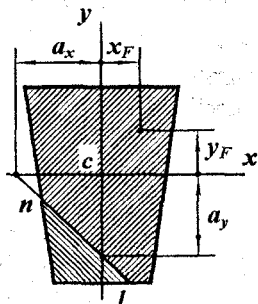


Рис. 10.8

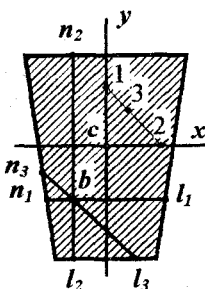


Рис. 10.9

в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. С одной стороны растягивающее, с другой – сжимающее.

Напряженное состояние при внецентренном сжатии – одноосное. Условие прочности (5.9) требует, чтобы напряжения в поперечном сечении не превышали соответствующего расчетного сопротивления.

10.2.1.3. Ядро сечения

Сжатые элементы строительных конструкций нередко выполняют из материалов, хорошо сопротивляющихся сжатию, но значительно хуже растяжению. Усилия на такие элементы желательно передавать в местах, исключая возможность появления растягивающих напряжений. Лучший вариант – центральное нагружение. Однако по конструктивным причинам не всегда удастся передать нагрузку строго центрально. Тогда возникает вопрос о возможных эксцентриситетах нагружения сжимающей силой при условии отсутствия в сечении растягивающих напряжений.

Если линия действия силы проходит через центр тяжести, нейтральная линия находится в бесконечности. По мере роста эксцентриситета нейтральная линия приближается к сечению. Пока нейтральная линия вне сечения, напряжения в нем сжимающие.

Область возможных эксцентриситетов сжимающей силы, при которых в сечении не возникает растягивающих напряжений, называется **ядром сечения**.

Поскольку на положения нейтральной линии наложены ограничения – быть за пределами сечения, форма и размеры ядра определяются равенствами (10.9). Проиллюстрируем методику построения ядра сечения примерами.

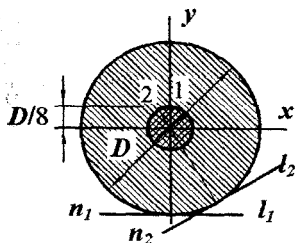


Рис. 10.10

Пример 10.4. Построим ядро круглого сечения (рис. 10.10).

Моменты инерции: $J_x = J_y = \pi D^4/64$.

Квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = i_y^2 = J_x/A = (\pi D^4/64)/(\pi D^2/4) = D^2/16.$$

Зададимся первым положением нейтральной линии – $n_1 l_1$. У него $a_x = \infty$, $a_y = -D/2$.

Из формул (10.9) находим $x_F = -i_y^2/a_x = 0$, $y_F = -i_x^2/a_y = -(D^2/16)/(-D/2) = D/8$. Чтобы нейтральная линия заняла положение n_1l_1 , линия действия силы должна проходить через точку 1.

Если задаться другим положением нейтральной линии, например n_2l_2 , место приложения силы соответствует точке 2. Обобщая, приходим к выводу, что ядро сечения круга концентрический круг с диаметром в четыре раза меньшим диаметра сечения.

Пример 10.5. Построим ядро прямоугольного сечения (рис. 10.11).

Моменты инерции прямоугольника:

$$J_x = bh^3/12, \quad J_y = hb^3/12.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = J_x/A = (bh^3/12)/(bh) = h^2/12,$$

$$i_y^2 = J_y/A = b^2/12.$$

Зададимся первым положением нейтральной линии — n_1l_1 . При нем $a_x = \infty$, $a_y = h/2$. Из формул (10.9) соответствующие координаты точки нагружения

$$x_F = -i_y^2/a_x = 0,$$

$$y_F = -i_x^2/a_y = -(h^2/12)/(h/2) = -h/6 \text{ (точка 1).}$$

Аналогично для положения n_2l_2 координаты $x_F = 0$, $y_F = h/6$ (точка 2).

Если задаться положением нейтральной линии n_3l_3 , то $a_x = b/2$, $a_y = \infty$. Соответствующая точка нагружения — 3 с координатами $x_F = -i_y^2/a_x = -(b^2/12)/(b/2) = -b/6$, $y_F = -i_x^2/a_y = 0$. Так же находим координаты точки 4, соответствующей линии n_4l_4 : $x_F = b/6$, $y_F = 0$.

Переход нейтральной линии из положения n_1l_1 в n_3l_3 , допустимый условием однозначности напряжений в сечении, — поворот вокруг правого верхнего угла. Это произойдет при движении силы из точки 1 в точку 3 по прямой линии. Рассматривая остальные соседние положения нейтральной линии, приходим к выводу, что точки 3 и 2, 2 и 4, 4 и 1 также следует соединить прямыми. Таким образом, ядром сечения прямоугольника является ромб.

Используя приемы, проиллюстрированные примерами, можно построить ядро для сечения любой формы.

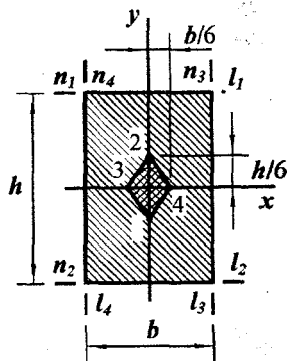


Рис. 10.11

Рассмотренный геометрический объект сечения часто используется при анализе напряженности сечений каменных, бетонных и железобетонных конструкций и, как следствие, в методах и алгоритмах их расчетов.

10.2.2. Растяжение или сжатие с изгибом

Формула (10.6), вытекающая из принципа наложения, охватывает не только внецентренное сжатие, но и другие виды нагружения, такие например, как растяжение (сжатие) с поперечным изгибом балок. Касательные напряжения при поперечном изгибе балок массивного сечения, как правило, невелики, их можно игнорировать, и формула (10.6) дает возможность вычислить напряжение. Обратимся к примеру.

Пример 10.6. Консольная балка прямоугольного сечения нагружена, как показано на рис. 10.12 а.

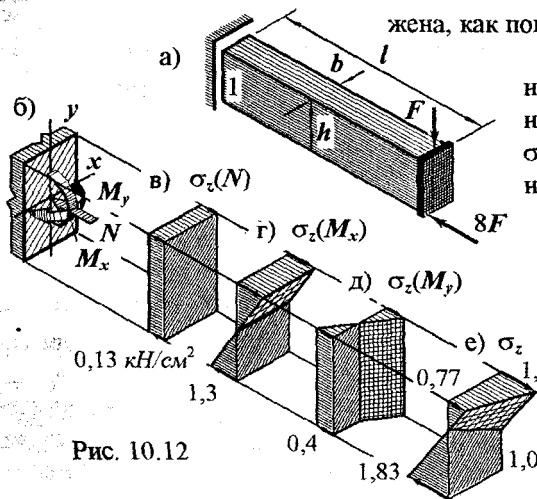


Рис. 10.12

Построим эпюры нормальных напряжений $\sigma_z(N)$, $\sigma_z(M_x)$, $\sigma_z(M_y)$, а также суммарную эпюру σ_z .

Числовые значения исходных данных:
 $l = 1,8 \text{ м}$, $b = 12 \text{ см}$,
 $h = 20 \text{ см}$, $F = 4 \text{ кН}$.

Опасное сечение — 1. В нем:

$$N = 8F = 8 \cdot 4 = 32 \text{ кН};$$

$$M_x = Fl + 8Fh/2 = 4 \cdot 1,8 + 8 \cdot 4 \cdot 0,2/2 = 10,4 \text{ кНм};$$

$M_y = 8Fb/2 = 8 \cdot 4 \cdot 0,12/2 = 1,92 \text{ кНм}$. Направления внутренних силовых факторов показаны на рис. 10.12 б.

Напряжения от продольной силы $\sigma_z(N) = N/A = 32/(12 \cdot 20) = 0,13 \text{ кН/см}^2$. Эпюра напряжений изображена на рис. 10.12 в.

Напряжения от изгиба в плоскости zy показаны на рис. 10.12 г. В верхних и нижних точках

$$\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x = 6M_x/(bh^2) = 6 \cdot 10,40/(12 \cdot 20^2) = 1,3 \text{ кН/см}^2.$$

Аналогично определяются напряжения от изгиба в плоскости zx (рис. 10.12 д). В точках вертикальных краев

$$\max \sigma_y(M_y) = M_y/W_y = 6M_y/(hb^2) = 6 \cdot 192/(20 \cdot 12^2) = 0,4 \text{ кН/см}^2.$$

Эпюра нормальных напряжений в рассматриваемом сечении от заданной нагрузки представляет собой сумму трех предыдущих эпюр. Она изображена на рис. 10.12 е.

Таким образом, принцип независимости действия сил позволяет разделить задачу на три:

- осевое растяжение (сжатие);
- прямой изгиб в главной плоскости zy ;
- то же в плоскости zx .

При игнорировании касательных напряжений в балках массивного сечения (подобное, впрочем, нередко допустимо и в тонкостенных балках) напряженное состояние можно рассматривать как одноосное. Условие прочности при нем ограничивает напряжения σ_z расчетными сопротивлениями материала на растяжение и сжатие.

10.3. Общий случай нагружения

В общем случае нагружения в поперечном сечении стержня может возникнуть шесть внутренних силовых факторов: продольная сила N , поперечные силы Q_x и Q_y , изгибающие моменты M_x и M_y , крутящий момент M_z .

Распределение напряжений по сечению описывается сложными зависимостями их от координат. Поиск опасной точки и напряжений в ней нередко оказывается весьма громоздкой задачей.

При определении напряжений в общем случае нагружения также используют принцип независимости действия сил. Сопоставляя напряжения и напряженные состояния в разных точках, устанавливают, какая из них опасна. Не всегда, однако, удастся отдать предпочтение одной из точек. В таких случаях проверяют прочность материала в нескольких местах опасного сечения.

Обычно задачу упрощают. В стержнях массивного сечения, как правило, не учитывают касательные напряжения от поперечных сил, а иногда и нормальные напряжения, соответствующие продольной силе. Вопрос о возможности тех или иных упрощений решается в зависимости от конкретных условий.

В качестве иллюстрации приемов, используемых при поиске опасной точки и напряжений в ней, рассмотрим два типа сечения – круглое и прямоугольное.

10.3.1. Общий случай нагружения стержня круглого сечения

Будем считать, что по эпюрам внутренних силовых факторов установлено положение опасного сечения, найдены в нем величины и направления N , Q_x , Q_y , M_x , M_y и M_z (рис. 10.13 а). Круг – сечение массивного типа. Действие поперечных сил не учитываем.

Построим эпюры напряжений в сечении отдельно нормальных от растяжения и изгиба и касательных от кручения.

При осевом растяжении нормальные напряжения $\sigma_z(N)$ распределены по сечению равномерно. Во всех точках $\sigma_z(N) = N/A$. Эпюра показана на рис. 10.13 б.

Напряжения от изгиба. В круге любая центральная ось – главная, косоу изгиб невозможен. Моменты M_x и M_y просуммируем и заменим результирующим изгибающим моментом $M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

Наибольшие нормальные напряжения $\max \sigma_z(M_b) = M_b/W$ (W – осевой момент сопротивления круга (7.14)). Они возникают в точках 1 и 2, лежащих в плоскости изгиба (определение положения плоскости действия результирующего

момента проиллюстрировано в примере 10.2).

Наибольшие касательные напряжения (рис. 10.13 г) от кручения возникают на границе сечения (6.7);

$$\max \tau_{zs}(M_z) = M_z/W_p$$

(W_p – полярный момент сопротивления сечения (6.8)).

Несложный анализ показывает, что опасной может быть точка 1 или 2. В точке 1 $\max \sigma_z = N/A + M_b/W$; в 2 $\sigma_z = N/A - M_b/W$; в обеих точках $\max \tau_{zs} = M_z/W_p$. При $R_t \leq R_c$ опасна первая точка. Если же $R_t > R_c$, опасной может быть и та, и другая в зависимости от отношений напряжений и расчетных сопротивлений.

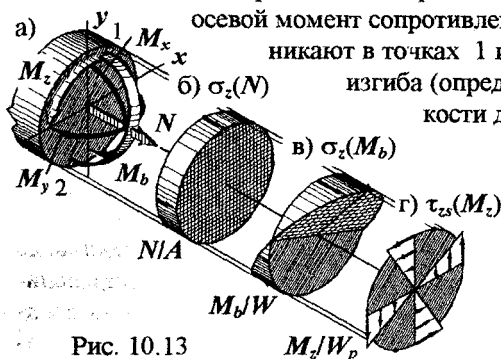


Рис. 10.13

10.3.2. Общий случай нагружения стержня прямоугольного сечения

Второй тип сечения – прямоугольник. Пусть внутренние силовые факторы, величины которых полагаем известными, направлены так, как показано на рис. 10.14 а. Сопоставим напряженные состояния в разных точках с целью выбора опасной из них. Для конкретности рассуждений будем считать, что расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие одинаковы.

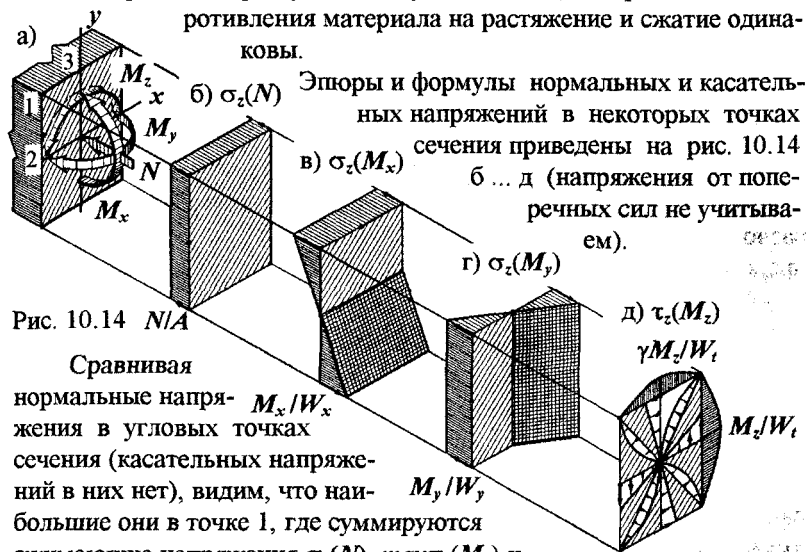


Рис. 10.14 N/A

Сравнивая нормальные напряжения в угловых точках сечения (касательных напряжений в них нет), видим, что наибольшие они в точке 1, где суммируются сжимающие напряжения $\sigma_z(N)$, $\max \sigma_z(M_x)$ и $\max \sigma_z(M_y)$. Величина наибольшего сжимающего напряжения

$$\max \sigma_z = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y.$$

Из точек, лежащих на оси x , опаснее точка 2, в которой суммируются $\sigma_z(N)$ и $\max \sigma_z(M_y)$. Кроме того, здесь возникают наибольшие касательные напряжения от M_z (6.16) $\max \tau_{zy} = M_z/W_t$ (W_t – момент сопротивления прямоугольного сечения при кручении (6.17)).

Сопоставляя напряжения в точках оси y , выделим из них точку 3, где также к сжатию от N ($\sigma_z(N) = N/A$) добавляется сжатие от M_x ($\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x$). Касательное напряжение в точке 3 (6.18) $\max \tau_{zx} = \gamma M_z/W_t$.

Итак, в качестве опасных намечаем три точки: 1, 2 и 3.

Точка 1: $\sigma_z = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y$, $\tau_z = 0$.

Точка 2: $\sigma_z = N/A + M_y/W_y$, $\tau_{zy} = M_z/W_t$.

Точка 3: $\sigma_z = N/A + M_x/W_x$, $\tau_{zx} = \gamma M_z/W_t$.

Какая из них опаснее, ответить нельзя. Для этого нужно знать численные значения напряжений в них и характеристики прочности материала. В конкретных задачах это обычно известно, есть возможность выделить из трех точек одну.

Может оказаться, что действительная опасная точка не попала в названные, а располагается где-то в другом месте. Отсутствие формулы касательных напряжений в точках сечения от крутящего момента лишает возможности более строгого ее поиска с использованием аналитических методов. Приходится ограничиваться выборочной проверкой прочности материала. Впрочем, более строгое (естественно, более трудоемкое) исследование зачастую нецелесообразно. Погрешность выборочной проверки обычно укладывается в пределы, допускаемые в прочностных инженерных расчетах.

10.3.3. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии

Для иллюстрации условий, в которых приходится обращаться к теориям предельных напряженных состояний, мотивов и действий при оценке прочности материала, рассмотрим примеры.

Пример 10.7. Определим допустимую нагрузку на раму, показанную на рис. 10.15 а. Материал – чугун СЧ-15 (расчетные сопротивления $R_t = 55 \text{ МПа}$, $R_c = 160 \text{ МПа}$, нормативные – $R_{нт} = 110 \text{ МПа}$, $R_{нс} = 220 \text{ МПа}$). Сечения стержней прямоугольные с $b = 25 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$; $l = 1,2 \text{ м}$.

Первый этап решения задачи – построение эпюр внутренних силовых факторов. Они изображены на рис. 10.15 б ... д. Из эпюр следует, что нужно проверить два сечения – 1 и 2.

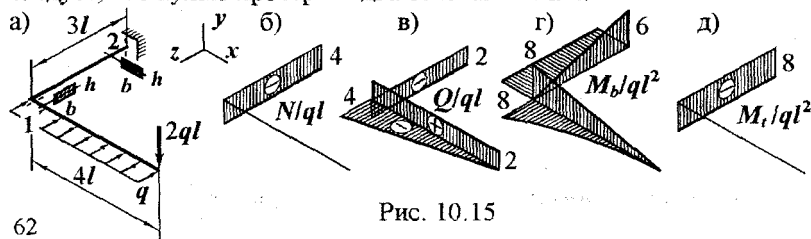


Рис. 10.15

Сечение 1.

Величины и направления внутренних силовых факторов, возникающих в сечении, показаны на рис. 10.16 а. Поскольку сечение массивное, поперечные силы в расчетах учитывать не будем (на рисунке они не изображены). Изгибающие моменты в сечении: $M_y = M_z = 8ql^2$.

Напряжения $\sigma_x(M_z)$ (рис. 10.16 б). В точках верхнего и нижнего краев

$$\begin{aligned}\sigma_x(M_z) &= M_z/W_z = \\ &= 8ql^2/(bh^2/6) = \\ &= 8q \cdot 120^2/(25 \cdot 10^2/6) = 276q/\text{см}\end{aligned}$$

От момента M_y , нормальные напряжения на вертикальных краях

$$\begin{aligned}\sigma_x(M_y) &= M_y/W_y = 8ql^2/(hb^2/6) = \\ &= 8q \cdot 120^2/(10 \cdot 25^2/6) = 111q/\text{см}\end{aligned}$$

Опасная точка в сечении – а. Напряжение в ней $\sigma_x = 276q + 111q = 387q/\text{см}$, напряженное состояние – линейное (рис. 10.16 г).

Сечение 2.

В сечении действуют (рис. 10.17 а)

– изгибающие моменты $M_x = 6ql^2$ и $M_y = 8ql^2$;

– продольная сила $N = 4ql$;

– крутящий момент $M_z = 8ql^2$;

Поперечную силу Q_y не учитываем.

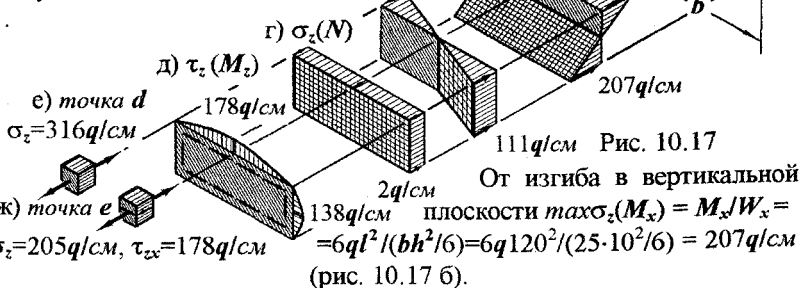


Рис. 10.17

От изгиба в вертикальной

плоскости $\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x = 6ql^2/(bh^2/6) = 6q \cdot 120^2/(25 \cdot 10^2/6) = 207q/\text{см}$ (рис. 10.17 б).

Изгибающий момент в горизонтальной плоскости вызывает напряжения $\max \sigma_z(M_y) = M_y/W_y = 8ql^2/(hb^2/6) = 8q \cdot 120^2/(10 \cdot 25^2/6) = 111q/\text{см}$ (эпюра показана на рис. 10.17 в).

Нормальные напряжения от продольной силы (рис. 10.17 г)

$$\sigma_z(N) = N/A = 4ql/(bh) = 4q \cdot 120/(25 \cdot 10) = 2q/\text{см}.$$

Касательные напряжения от крутящего момента (рис. 10.17 д):
в точке e $\max \tau_{zx} = M_z/W_t = 8ql^2/(\beta h^3) = 8q120^2/(0,647 \cdot 10^3) = 178q/\text{см}$;
посередине вертикальных сторон

$$\tau_{zy} = \gamma \cdot \max \tau_{zx} = 0,774 \cdot 178q = 138q/\text{см},$$

(коэффициенты β и γ взяты из таблицы 6.1).

Сравним напряжения в трех точках d , e и f .

Точка d : $\sigma_z = 207q + 111q - 2q = 316q/\text{см}$; напряженное состояние – одноосное растяжение (рис. 10.17 е).

Точка f : $\sigma_z = 207q + 111q + 2q = 320q/\text{см}$; напряженное состояние – одноосное сжатие.

Сравнивая, с одной стороны, напряжения в точках d и f и, с другой, расчетные сопротивления на растяжение R_t и сжатие R_c , видим – точка d опаснее.

Точка e (рис. 10.17 ж): $\sigma_z = 207q - 2q = 205q/\text{см}$, $\tau_{zx} = 178q/\text{см}$; напряженное состояние плоское. Нормальные и касательные напряжения одного порядка: $0,1 \leq \tau_{zx}/\sigma_z = 178q/(207q) = 0,86 \leq 10 \Rightarrow$ напряженное состояние в точке e сложное. Для оценки опасности состояния материала необходимо привлечь теорию прочности.

Материал рамы – чугун:

- хрупкий материал;
- с разными, но соизмеримыми пределами прочности на растяжение R_{tt} и сжатие R_{uc} ;
- при смешанном плоском напряженном состоянии.

В этих условиях следует использовать теорию прочности О.Мора.

Главные напряжения:

$$\sigma_{113} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zx}^2})/2 = (205 \pm \sqrt{205^2 + 4 \cdot 178^2})q/2:$$

$$\sigma_1 = 308q/\text{см}, \quad \sigma_3 = -103q/\text{см}.$$

Эквивалентное напряжение (9.19) –

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - (R_{tt}/R_{uc})\sigma_3 = (308 - (110/220)(-103)q) = 355q/\text{см}.$$

Сопоставляя напряжения в точках a , d и e , видим, что опасна точка a . Напряжение в ней $\sigma_x = 387q/\text{см}$.

Условие прочности при одноосном растяжении $\sigma_x \leq R_t$ приводит к результату $387q \leq 5,5$; $q \leq 0,0142 \text{ кН/см}$.

64 Принимаем допустимую нагрузку $[q] = 14 \text{ Н/см}$.

Пример 10.8. Для рамы, рассмотренной в примере 10.7 (рис. 10.15 а), подберем круглое сечение из стали 09Г2С ($R = 335 \text{ МПа}$) при $q = 14 \text{ Н/см}$.

Сечение 1 (рис. 10.18). Изгибающие моменты в сечении $M_y = M_z = 8ql^2$. Просуммируем их:

$$M_b = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} ql^2 = 11,3 ql^2.$$

Нормальное напряжение в точке a

$$\max \sigma_x = M_b / W = 11,3 ql^2 / (\pi D^3 / 32) = 362 ql^2 / (\pi D^3).$$

Напряженное состояние – одноосное растяжение.

Сечение 2 (рис. 10.19). В нем действуют

– продольная сила $N = 4ql$;

– изгибающие моменты: $M_x = 6 ql^2$, $M_y = 8ql^2$; $M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} ql^2 = 10ql^2$;

– крутящий момент $M_z = 8ql^2$.

Нормальное напряжение в точке d –

$$\begin{aligned} \max \sigma_z &= N/A + M_b/W = \\ &= 4ql / (\pi D^2 / 4) + 10ql^2 / (\pi D^3 / 32) = \\ &= 16ql / (\pi D^2) + 320ql^2 / (\pi D^3). \end{aligned}$$

Касательное напряжение в точке d –

$$\max \tau_{zx} = M_z / W_p = 8 ql^2 / (\pi D^3 / 16) = 128 ql^2 / (\pi D^3).$$

Напряжения соизмеримы, напряженное состояние сложное, необходимо обратиться к теории прочности.

Сталь 09Г2С – пластичный материал с равными расчетными сопротивлениями при растяжении и сжатии. Для таких материалов рекомендуют третью или четвертую теорию (для стержневых элементов они практически равноправны). Воспользуемся третьей.

Условие прочности (9.14) в рассматриваемой точке

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zx}^2} = \sqrt{(16ql / (\pi D^2) + 320ql^2 / (\pi D^3))^2 + 4(128ql^2 / (\pi D^3))^2} \leq R.$$

Из него нужно найти диаметр D .

В форме равенства это полное кубическое уравнение. Решение его трудоемко. Упростим процедуру решения, отбросив напряжения от продольной силы, равные $16ql / (\pi D^2)$. Теперь условие прочности запишется так: $\sqrt{(320ql^2 / (\pi D^3))^2 + 4(128ql^2 / (\pi D^3))^2} \leq R$, или после вычислений $410ql^2 / (\pi D^3) \leq R$.

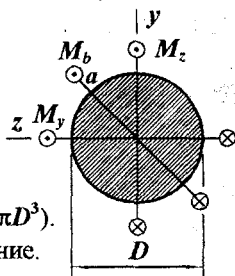


Рис. 10.18

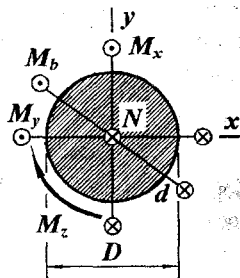


Рис. 10.19

Сравнивая левую часть условия с напряжением в точке *a*, видим, что точка *d* опаснее. Итак,
 $D^3 \geq 410ql^2/(\pi R) = 410 \cdot 0,014 \cdot 120^2 / (3,14 \cdot 33,5) = 786 \text{ см}^3$, $D \geq 9,2 \text{ см}$.
 Пусть $D = 10 \text{ см}$.

Поскольку результат получен без учета продольной силы, проверим условие прочности, приняв ее во внимание:

$$\sigma_z = 16ql/(\pi D^2) + 320ql^2/(\pi D^3) =$$

$$= 16 \cdot 0,014 \cdot 120 / (3,14 \cdot 10^2) + 320 \cdot 0,014 \cdot 120^2 / (3,14 \cdot 10^3) = 20,6 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{zs} = 128 ql^2/(\pi D^3) = 128 \cdot 0,014 \cdot 120^2 / (3,14 \cdot 10^3) = 8,21 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zs}^2} = \sqrt{20,6^2 + 4 \cdot 8,21^2} = 26,3 < 33,5 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности выполняется.

Расчет показал, что сравнительно небольшое увеличение диаметра по отношению к требуемому вполне скомпенсировало напряжения от неучтенной продольной силы. В то же время использованное упрощение процесса решения кубического уравнения позволило уменьшить объем вычислительных операций во много раз.

Итак, расчет на прочность состоит из

- построения эпюр внутренних силовых факторов с целью выбора опасного сечения, определения величин и направлений обобщенных усилий в нем;
- поиска опасной точки в сечении и вычисления напряжений в ней;
- проверки условия прочности (при простых напряженных состояниях – одноосном растяжении или сжатии по (5.9), чистом сдвиге по (6.3); в случае сложного напряженного состояния условие имеет вид $\sigma_{eq} \leq R$ с эквивалентным напряжением соответствующим материалу и напряженному состоянию материала).

10.4. Условия применимости принципа суперпозиции

Принцип суперпозиции (наложения, независимости действия сил), намного облегчает решение задач прочности и жесткости, позволяя результат сложного воздействия получить суммированием результатов простых воздействий, составляющих сложное. Естественно возникает вопрос об условиях, при которых названный принцип можно использовать.

Пусть Z результат воздействия переменных Y_i ($i=1, 2, \dots, m$). Не вдаваясь в доказательство (оно, впрочем, очевидно), отметим, что принцип суперпозиции применим, если Z является линейной однородной функцией переменных Y_i :

$$Z = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_i Y_i + \dots + a_m Y_m, \quad (10.10)$$

где a_i – постоянные коэффициенты.

Если переменные Y_i сами являются линейными однородными функциями параметров X_j ($j=1, 2, \dots, n$) –

$$Y_i = b_{i1} X_1 + b_{i2} X_2 + \dots + b_{ij} X_j + \dots + b_{in} X_n,$$

то зависимость Z от X_j также будет линейной однородной:

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_j X_j + \dots + c_n X_n.$$

Рассмотрим с высказанных позиций некоторые ранее полученные зависимости.

Внутренние силовые факторы, рассмотренные в разд. 3, являются линейными однородными функциями параметров внешней нагрузки. Следовательно, к ним и их эпюрам можно применять принцип наложения.

Зависимость напряжения в точке (см., например, формулы (5.10), (6.4), (7.3)) от внутреннего силового фактора также линейна однородна. Принцип можно использовать, что и реализовано при сложном сопротивлении. Из отмеченного в этом и предыдущем абзацах следует справедливость принципа наложения и в связи нагрузка–напряжение.

Энергетические характеристики напряженно-деформированного состояния (5.8), (5.23), (5.24) и аналогичные им являются квадратичными функциями. Для их определения принцип независимости действия сил неприменим (скажем, работа двух сил не равна сумме работ каждой силы, действующей отдельно).

Критерий (10.10) позволяет в каждом конкретном случае решить, можно ли применить принцип наложения к той или иной характеристике напряженно-деформированного состояния конструкции.

11. Основы технической теории тонкостенных стержней открытого профиля

Стержни (рис. 11.1, $d/l \leq 0,1$), у которых больший размер сечения значительно превышает толщину стенки ($d/\delta \geq 10$), называют тонкостенными.

В шестом разделе были отмечены некоторые особенности поведения тонкостенных стержней открытого профиля при кручении:

- деформация поперечного сечения;
- большие напряжения и деформации;
- разновидности кручения (свободное или стесненное) в зависимости от возможности деформации сечения.

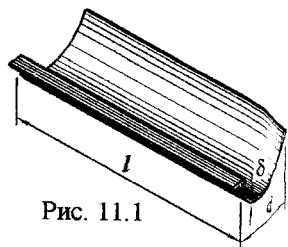


Рис. 11.1

Приведенный перечень не является исчерпывающим и не отражает всей специфики их реакции на внешнюю нагрузку. Ознакомимся с элементами технической теории тонкостенных стержней открытого профиля, разработанной В.З.Власовым¹.

11.1. Исходные предпосылки. Расчетные уравнения

Используемые термины.

- *Срединная поверхность* - поверхность, проходящая посередине толщин пластинок образующих стержень.

¹ Василий Захарович Власов (1906-1958) - выдающийся советский ученый в области строительной механики, автор многих оригинальных работ по тонкостенным пространственным конструкциям.

– *Образующая* – прямая, параллельная продольной оси и принадлежащая срединной поверхности.

– *Профильная (контурная) линия* – линия пересечения срединной поверхности с поперечной плоскостью.

Техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля построена на следующих геометрических гипотезах:

– стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;

– деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют.

11.1.1. Геометрические соотношения

Поперечные перемещения точек сечения.

На рис. 11.2 изображена контурная линия до (сплошными линиями) и после деформации (пунктирные линии). Из рисунка следует:

$$\begin{aligned} u &= u_b - (y - y_b)\varphi, \\ v &= v_b + (x - x_b)\varphi, \end{aligned} \quad (a)$$

где u и v – горизонтальное и вертикальное перемещения произвольной точки k ;

u_b и v_b – горизонтальное и вертикальное перемещения точки c_b , жестко связанной с сечением;

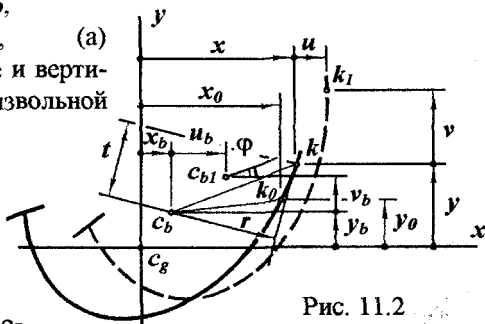


Рис. 11.2

x и y – координаты произвольной точки в главных центральных осях сечения;

x_b и y_b – координаты точки c_b ;

φ – угол поворота сечения вокруг точки c_b .

Введем цилиндрические координаты $z\rho s$ и выразим перемещение произвольной точки через составляющие ξ – вдоль оси s и ζ – вдоль ρ (рис. 11.3 а):

$$\begin{aligned} \xi &= u \cos \alpha + v \sin \alpha, \\ \zeta &= u \sin \alpha - v \cos \alpha. \end{aligned} \quad (б)$$

После подстановки равенств (а) в (б) имеем

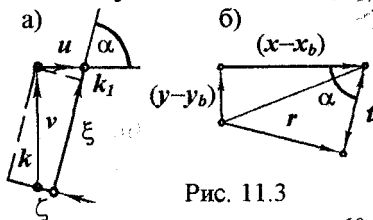


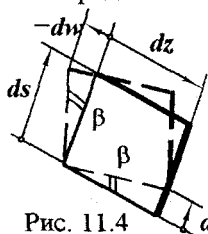
Рис. 11.3

$$\begin{aligned}\xi &= (u_b - (y - y_b)\varphi)\cos\alpha + (v_b + (x - x_b)\varphi)\sin\alpha, \\ \zeta &= (u_b - (y - y_b)\varphi)\sin\alpha - (v_b + (x - x_b)\varphi)\cos\alpha.\end{aligned}\quad (B)$$

По рис. 11.3 б $(x - x_b)\sin\alpha - (y - y_b)\cos\alpha = r$, $(y - y_b)\sin\alpha + (x - x_b)\cos\alpha = t$.
Учитывая это, фиксируем равенства (B) в виде

$$\xi = u_b\cos\alpha + v_b\sin\alpha + r\varphi, \quad \zeta = u_b\sin\alpha - v_b\cos\alpha - t\varphi. \quad (Г)$$

Продольные перемещения точек сечения.



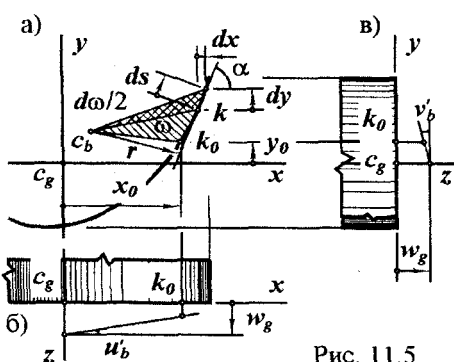
Выделим элемент срединной поверхности и воспользуемся второй гипотезой (рис. 11.4):

$\operatorname{tg}\beta = d\xi/dz = -dw/ds$, откуда $dw = -(d\xi/dz)ds$. Согласно равенствам (Г)

$$dw = -(u'_b\cos\alpha + v'_b\sin\alpha + r\varphi')ds. \quad (Д)$$

Проинтегрируем равенство (Д) (рис. 11.5) от не-

Рис. 11.4 точки k : $\int_{k_0}^k dw = -\int_{k_0}^k u'_b\cos\alpha ds + \int_{k_0}^k v'_b\sin\alpha ds + \int_{k_0}^k r\varphi' ds$. Но $\cos\alpha ds = dx$,



$\sin\alpha ds = dy$, произведение rds представляет собой удвоенную площадь элементарного сектора (он дважды заштрихован на рис. 11.5 а):

$rds = d\omega$. Таким образом, $w - w_0 = -u'_b(x - x_0) - v'_b(y - y_0) - \varphi'\omega$.
Учитывая равенство (рис. 11.5 б, в) $w_0 = w_g - u'_b x_0 - v'_b y_0$, приходим к выражению $w = w_g - u'_b x - v'_b y - \varphi'\omega$. (Е)

В этом равенстве ω - *секториальная координата* произвольной точки k , отсчитываемая от k_0 .

Абсолютное удлинение элементарного отрезка продольного волокна (рис. 11.6) $\Delta dz = w + (\partial w/\partial z)dz - w = (\partial w/\partial z)dz$.

Относительное - $\varepsilon_z = \Delta dz/dz = \partial w/\partial z$. Дифференцируя равенство (Е) по z , получаем

$$\varepsilon_z = w'_g - u''_b x - v''_b y - \varphi''\omega. \quad (Ж)$$

Это и есть геометрическое равенство, описывающее распределение деформаций по сечению.

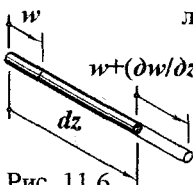


Рис. 11.6

11.1.2. Физические и статические уравнения

Предпосылки, связанные с нормальными напряжениями:

- продольные волокна друг на друга не давят: $\sigma_s = \sigma_p = 0$;
- нормальные напряжения σ_z по толщине стенки распределены равномерно. Согласно закону Гука $\sigma_z = E\varepsilon_z$. (и)

Условия статической эквивалентности -

$$\int_A \sigma_z dA = N, \quad \int_A \sigma_z x dA = M_y, \quad \int_A \sigma_z y dA = M_x. \quad (\kappa)$$

Уравнения (ж), (и), (к) позволяют описать распределение нормальных напряжений по сечению стержня.

11.2. Нормальные напряжения в сечении

Из равенств (ж), (и) следует

$$\sigma_z = E(w'_g - u''_b x - v''_b y - \varphi'' \omega). \quad (\lambda)$$

Подставив это равенство в условия (к), получаем выражения

$$\begin{aligned} Ew'_g \int_A dA - Eu''_b \int_A x dA - Ev''_b \int_A y dA - E\varphi'' \int_A \omega dA &= N, \\ Ew'_g \int_A x dA - Eu''_b \int_A x^2 dA - Ev''_b \int_A xy dA - E\varphi'' \int_A \omega x dA &= M_y, \\ Ew'_g \int_A y dA - Eu''_b \int_A xy dA - Ev''_b \int_A y^2 dA - E\varphi'' \int_A \omega y dA &= M_x. \end{aligned} \quad (\mu)$$

В них сформировались известные и новые геометрические характеристики.

Известные:

$$\int_A dA = A - \text{площадь поперечного сечения};$$

$\int_A x dA = S_y$ и $\int_A y dA = S_x$ - статические моменты сечения относительно осей x и y ; но так как эти оси - центральные, $S_x = 0$, $S_y = 0$;

$\int_A x^2 dA = J_y$ и $\int_A y^2 dA = J_x$ - осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей x и y ;

$\int_A xy dA = J_{xy}$ - центробежный момент инерции сечения относительно осей x и y ; но так как эти оси - главные, $J_{xy} = 0$.

Новые:

$\int_A \omega dA = S_\omega$ - *секториальный статический момент*, его размерность m^4 и т.п.;

$\int_A \omega x dA = S_{\omega x}$ и $\int_A \omega y dA = S_{\omega y}$ - *секториально-линейные статические моменты*, их размерность m^5 и т.п.

Для упрощения расчетных формул воспользуемся возможностью произвольного выбора положений точек k_0 и c_b . Точку k_0 и координаты x_b и y_b выберем так, чтобы выполнялись условия

$$S_\omega = 0, S_{\omega x} = 0, S_{\omega y} = 0. \quad (11.1)$$

Точку k_0 будем называть *главной секториальной нулевой точкой*, а полюс c_b — *центром изгиба сечения*.

При равенствах (11.1) выражения (м) примут вид

$$Ew'_g A = N, -Eu''_b J_y = M_y, -Ev''_b J_x = M_x,$$

или $w'_g = N/(EA), u''_b = -M_y/(EJ_y), v''_b = -M_x/(EJ_x).$

Заменив этими равенствами производные перемещений в формуле (л), придаем ей вид

$$\sigma_z = N/A + M_y x/J_y + M_x y/J_x - E\varphi'' \omega. \quad (н)$$

Формула нормальных напряжений упрощается и принимает типовой вид, если ввести новое понятие обобщенного усилия

$$B = \int_A \sigma_z \omega dA. \quad (11.2)$$

Новый силовой фактор носит название *бимомент*.

Подставим равенство (л) в выражение (11.2) с учетом (11.1):

$$B = Ew'_g \int_A \omega dA - Eu''_b \int_A \omega x dA - Ev''_b \int_A \omega y dA - E\varphi'' \int_A \omega^2 dA = -E\varphi'' \int_A \omega^2 dA. \quad (п)$$

Интеграл представляет собой новую геометрическую характеристику

$$\int_A \omega^2 dA = J_\omega, \quad (11.3)$$

называемую *секториальным моментом инерции сечения*. Его размерность m^6 и т.п. Теперь $B = -EJ_\omega \varphi''$, откуда

$$E\varphi'' = -B/J_\omega. \quad (11.4)$$

После подстановки этого равенства в выражение (н) приходим к формуле нормальных напряжений

$$\sigma_z = N/A + M_y x/J_y + M_x y/J_x + B\omega/J_\omega. \quad (11.5)$$

Первые три слагаемых в правой части формулы (11.5) соответствуют обычной теории сложного сопротивления, базирующейся на гипотезе плоских сечений. Последний член этой формулы определяет величину дополнительных *секториальных напряжений* $\sigma_\omega = B\omega/J_\omega$, которые возникают вследствие переменной по длине деформации сечения. Напряжения σ_ω распределяются в сечении по закону секториальной координаты ω и образуют самоуравновешенную систему внутренних усилий, приводящуюся к двум равным противоположно направленным парам. Методом сечений бимомент определен быть не может.

11.3. Бимомент

Для иллюстрации понятия бимомента рассмотрим пример силового воздействия на двутавр.

Пусть двутавр подвержен двум моментам, как показано на рис. 11.7. В любом сечении $N = M_x = M_y = 0$. Тем не менее в двутавре возникнут напряжения вследствие изгиба полок. Эти напряжения определяются последним членом формулы (11.5) $\sigma_\omega = B\omega/J_\omega$.

Бимомент равен произведению пары сил на расстояние между плоскостями их действия:

$$B = Mh.$$

Размерность бимомента и Nm^2 и т. п.

Вычисление бимомента сосредоточенной силы также рассмотрим на примере (рис. 11.8).

Пусть в некоторой точке k действует сила F . Добавив в точках k_0 , a и c_b по две взаимно противоположных силы F , получим $B = Fsh$. Но $sh = \omega$, откуда $B = F\omega$. *Бимомент сосредоточенной силы относительно полюса c_b равен произведению силы на секториальную координату точки ее приложения.*

Теперь можно объяснить смысл интеграла $\int_A \sigma_z \omega dA$: $\int_A \sigma_z \omega dA = \int_A \omega dF = \int_A dB = B$. Он представляет собой сумму бимоментов элементарных нормальных сил по всему поперечному сечению.

11.4. Касательные напряжения в сечении

Предпосылки о касательных напряжениях (рис. 11.9):

– в любой точке поперечного сечения касательные напряжения параллельны касательной к профильной линии;

– по толщине стенки касательные напряжения линейно переменны (рис. 11.9 а).

Разложим касательные напряжения на две составляющие – косимметричные и симметричные. Остановимся на них.

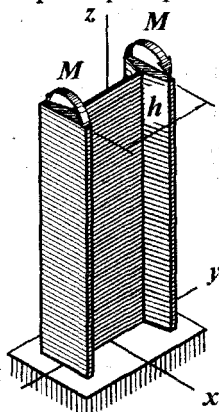


Рис. 11.7

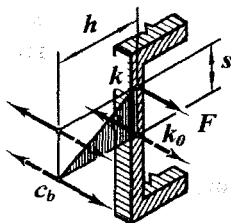


Рис. 11.8

11.4.1. Кососимметричные касательные напряжения

Эти напряжения приводятся к моменту M_t и связаны с ним формулой (6.21), которая в используемых здесь обозначениях имеет вид

$$\tau_{\phi} = M_t \delta / J_t, \quad (11.6)$$

где

$$J_t = \sum_1^n b_i \delta_i^3 / 3. \quad (11.7)$$

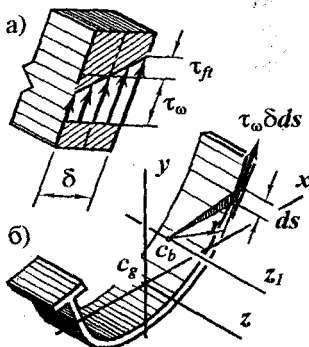


Рис. 11.9

11.4.2. Симметричные касательные напряжения

Момент внутренних касательных напряжений равен моменту внешних сил (рис. 11.9 б): $M_{z_1} = M_t + \int_A \tau_{\omega} \delta ds \cdot r$. Обозначим $\int_A \tau_{\omega} \delta ds \cdot r = \int_A \tau_{\omega} \delta d\omega = M_{\omega}$. Тогда

$$M_{z_1} = M_t + M_{\omega}. \quad (11.8)$$

Здесь M_{z_1} – момент внешних сил относительно оси z_1 , проходящей через центр изгиба; M_t – момент свободного кручения (часть крутящего момента, воспринимаемая кососимметричными касательными напряжениями);

$$M_{\omega} = \int_A \tau_{\omega} \delta d\omega. \quad (11.9)$$

– **изгибно-крутящий момент** (часть крутящего момента, воспринимаемая симметричными касательными напряжениями).

Для определения величины касательных напряжений τ_{ω} воспользуемся методом Д.И. Журавского (рис. 11.10):

$$\Sigma Z = \int_{A_{ct}} (\sigma_z + (\partial \sigma_z / \partial z) dz) dA - \int_{A_{ct}} \sigma_z dA - \tau_{\omega} \delta d\omega = 0.$$

Отсюда
$$\tau_{\omega} = \int_{A_{ct}} (\partial \sigma_z / \partial z) dA / \delta.$$

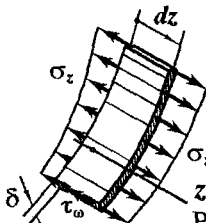


Рис. 11.10

Но $\sigma_z = N/A + M_y x / J_y + M_x y / J_x + B \omega / J_{\omega}$, т.е. $\partial \sigma_z / \partial z = N' / A + M'_y x / J_y + M'_x y / J_x + B' \omega' / J_{\omega}$.

Таким образом,

$$\tau_{\omega} = (N' \int_{A_{ct}} dA / A + M'_y \int_{A_{ct}} x dA / J_y + M'_x \int_{A_{ct}} y dA / J_x + B' \int_{A_{ct}} \omega dA / J_{\omega}) / \delta.$$

А так как при отсутствии продольной распределенной нагрузки

$$N' = 0, M'_y = -Q_x, M'_x = -Q_y, \text{ то}$$

$$\tau_{\omega} = -Q_x S_y^c / (J_y \delta) - Q_y S_x^c / (J_x \delta) + B' S_{\omega}^c / (J_{\omega} \delta). \quad (p)$$

Остановимся теперь на производной B' . По равенству (11.2) $B = \int_A \sigma_z \omega dA$. Следовательно, $B' = \int_A (\partial \sigma_z / \partial z) \omega dA$. Но из равновесия элемента тонкостенного стержня (рис. 11.11) вытекает:

$\Sigma Z = \sigma_z \delta ds + (\partial(\sigma_z \delta ds) / \partial z) dz - \sigma_z \delta ds - \tau_\omega \delta dz + \tau_\omega \delta dz + (\partial(\tau_\omega \delta dz) / \partial s) ds = 0$, что после приведения подобных членов приводит к равенству $(\partial(\sigma_z \delta ds) / \partial z) dz + (\partial(\tau_\omega \delta dz) / \partial s) ds = 0$. Вынося за знаки производных δ и ds , не зависящие от z , а также dz , не зависящий от s , приходим к равенству $\partial \sigma_z / \partial z = -(\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta$. Таким образом,

$$\begin{aligned} B' &= \int_A (\partial \sigma_z / \partial z) \omega dA = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta \omega dA = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta \omega ds = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) \omega ds. \end{aligned}$$

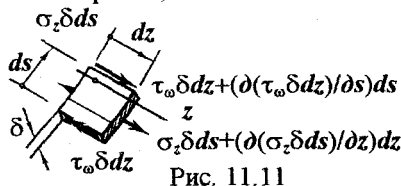


Рис. 11.11

Возьмем интеграл по частям, приняв $U = \omega$, $dV = (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) ds = d(\tau_\omega \delta)$. Отсюда $dU = d\omega$; $V = \tau_\omega \delta$; $B' = -\tau_\omega \omega \delta \Big|_A + \int_A \tau_\omega \delta d\omega$. Первое слагаемое обращается в нуль, так как на границе сечения $\tau_\omega = 0$. Но

по равенству (11.9) $B' = M_\omega$. (11.10)

Формула касательных напряжений (p) принимает вид

$$\tau_\omega = -Q_x S_y^{\alpha} / (J_y \delta) - Q_y S_x^{\alpha} / (J_x \delta) + B' S_\omega^{\alpha} / (J_\omega \delta). \quad (11.11)$$

11.5. Деформации стержня.

Обобщенные усилия в сечении

Деформации представляют самостоятельный интерес, поскольку позволяют оценить жесткость стержня. В тонкостенных же стержнях, где бимомент и изгибно-крутящий момент не могут быть найдены из условий равновесия, знание деформаций позволяет определить и эти обобщенные усилия в сечении.

11.5.1. Дифференциальное уравнение угла закручивания и его решение

Согласно формулам (11.4) $B = -EJ_\omega \varphi''$; (11.10) $M_\omega = B' = -EJ_\omega \varphi''$; (6.25) $M_t = GJ_t \varphi'$; (11.8) $M_z = M_t + M_\omega$. Подстановка второго и третьего равенства в последнее дает выражение $-EJ_\omega \varphi'' + GJ_t \varphi' = M_{z_t}$, дифференцирование, которого по z , приводит к уравнению

$$\varphi^{IV} - \alpha^2 \varphi'' = -M'_z / (EJ_\omega), \quad (11.12)$$

в котором обозначено $\alpha^2 = GJ_t / (EJ_\omega).$ (11.13)

Общее решение дифференциального уравнения (11.12) -

$$\varphi = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z + C_3 z + C_4 + \varphi_{par}, \quad (11.14)$$

где φ_{par} - частное решение уравнения (11.12).

Постоянные $C_1 \dots C_4$ определяются из граничных условий.

11.5.2. Граничные условия

Граничные условия отражают кинематические ограничения, накладываемые связями, и усилия на краю стержня. В реальных конструкциях кинематические и силовые взаимодействия элементов настолько многообразны, что охватить все случаи практически невозможно. Поэтому ограничимся простейшими примерами, проиллюстрировав методику назначения граничных условий.

Защемленный край

Этот тип закрепления (рис. 11.12 а) препятствует повороту и деформации сечения: $\varphi = 0$; $\varphi' = 0$.

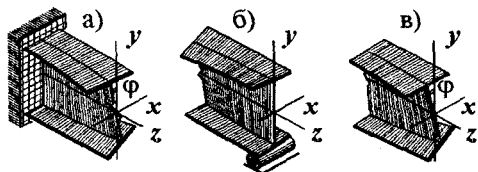


Рис. 11.12

Шарнирно

закрепленный край

Край, опирающийся шарнирно, (рис. 11.12 б) не имеет возможности поворо-

та вокруг продольной оси. Второе условие вытекает из отсутствия нормальных напряжений σ_ω , из чего следует $B = 0$. Но $B = -EJ_\omega \varphi''$. Итак, на шарнирной опоре $\varphi = 0$; $\varphi'' = 0$.

Свободный конец

На свободном краю (рис. 11.12 в) отсутствуют напряжения σ_ω , момент $M_z = 0$. Следовательно, здесь должны выполняться условия

$$\varphi'' = 0, \quad EJ_t \varphi' - EJ_\omega \varphi'' = 0.$$

Если на стержне несколько участков, то для определения постоянных интегрирования используются условия неразрывности перемещений. В каждом конкретном случае, анализируя силовые и кинематические условия взаимодействия участков, можно обоснованно назначить достаточное количество граничных условий.

11.6. Секториальные геометрические характеристики

11.6.1. Секториальная координата

Секториальная координата точки k при полюсе T и начале k_0 представляет собой удвоенную площадь сектора Tk_0k (рис. 11.13).

Размерность секториальной координаты m^2 и т.п.

На рисунке Tk_0 – неподвижный (начальный) радиус; Tk – подвижный (текущий) радиус.

Секториальную координату будем считать возрастающей, если подвижный радиус поворачивается против хода часовой стрелки.

Если начало отсчета перенести из точки k_0 в точку k_1 , то из рис. 11.13 очевидно, что

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega, \quad (11.15)$$

где ω_1 – секториальная координата точки k при начале отсчета k_1 ;

ω_0 – секториальная координата точки k_0 при начале отсчета k_0 ;

ω – секториальная координата точки k при начале отсчета k_0 .

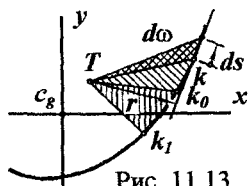


Рис. 11.13

11.6.2. Изменение секториальной координаты при переносе полюса

Перенесем полюс из точки c_d в точку c_b (рис. 11.14) и установим, как изменится при этом секториальная координата точки k .

Разность длин перпендикуляров

$r_d - r_b = (x_b - x_d)\sin\alpha - (y_b - y_d)\cos\alpha$, откуда $r_b = r_d - (x_b - x_d)\sin\alpha + (y_b - y_d)\cos\alpha$.

Дифференциалы секториальных координат: при полюсе c_d

$d\omega_d = r_d ds$; с полюсом в точке c_b

$$d\omega_b = r_b ds =$$

$$= r_d ds - (x_b - x_d)\sin\alpha ds + (y_b - y_d)\cos\alpha ds.$$

Но $\sin\alpha ds = dy$, $\cos\alpha ds = dx$. Таким образом,

$$d\omega_b = d\omega_d - (x_b - x_d)dy + (y_b - y_d)dx.$$

Проинтегрируем равенство от некоторой фиксированной точки f до произвольной k :

$$\int_f^k d\omega_b = \int_f^k d\omega_d - (x_b - x_d) \int_f^k dy + (y_b - y_d) \int_f^k dx.$$

Отсюда $\omega_b - \omega_{bf} = \omega_d - \omega_{df} - (x_b - x_d)(y - y_f) + (y_b - y_d)(x - x_f)$. (11.16)

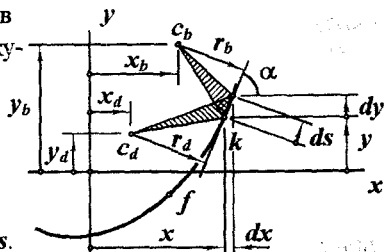


Рис. 11.14

11.6.3. Определение положения центра изгиба и главной нулевой точки

Центр изгиба и главная нулевая точка выбираются так, чтобы выполнялись равенства (11.1): $S_{\omega x} = 0$, $S_{\omega y} = 0$, $S_{\omega} = 0$.

Назначим произвольно начало отсчета в точке f , а полюс в точке c_d ; оси x и y – главные центральные. Воспользуемся первым условием, подставив в него зависимость (11.16):

$$S_{\omega x} = \int_A \omega_b x dA = \omega_{bf} \int_A x dA + \int_A \omega_d x dA - \omega_{df} \int_A x dA - (x_b - x_d) \int_A y x dA + (x_b - x_d) y_f \int_A x dA + (y_b - y_d) \int_A x^2 dA - (y_b - y_d) x_f \int_A x dA = 0.$$

Но $\int_A x dA = 0$, $\int_A y x dA = 0$. Учитывая это, имеем

$$\int_A \omega_d x dA + (y_b - y_d) \int_A x^2 dA = 0.$$

Обозначив геометрические характеристики

$$\int_A \omega_d x dA = S_{\omega x}^d, \quad \int_A x^2 dA = J_x,$$

приходим к равенству

$$y_b = y_d - S_{\omega x}^d / J_x. \quad (11.17)$$

Из второго требования – $S_{\omega y} = 0$ вытекает аналогичное равенство

$$x_b = x_d + S_{\omega y}^d / J_y. \quad (11.18)$$

Равенство нулю секториального статического момента:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA = \int_A (\omega_I - \omega_{\theta}) dA = \int_A \omega_I dA - \omega_{\theta} \int_A dA = 0$$

определяет секториальную координату главной нулевой точки –

$$\omega_{\theta} = S_{\omega}^I / A. \quad (11.19)$$

Условию (11.19) могут удовлетворять несколько точек в сечении. Главной нулевой точкой будем считать ближайшую к центру изгиба.

11.7. Пример расчета

Консольная балка длиной $l = 1$ м (рис. 11.15) подвержена равномерному давлению $p = 4$ Н/см². Сечение – прокатный швеллер № 10. Построим эпюры напряжений в опасном сечении.

11.7.1. Геометрические характеристики сечения

Для упрощения вычислений заменим элементы швеллера прямоугольниками (рис. 11.16 а). Берем из таблицы: $h = 10$ см, $b = 4,6$ см, $\delta = 0,45$ см, $t = 0,76$ см, $x_d = 1,22$ см (табличное $x_0 = 1,44$ см минус $\delta/2 = 0,225$ см), $J_x = 174$ см⁴, $J_y = 20,4$ см⁴. Главные центральные оси – x , y .

Положение центра изгиба определяется формулами (11.17) и (11.18). Чтобы найти входящие в них секториально-линейные статические моменты $S_{\omega_x}^d$ и $S_{\omega_y}^d$, построим эпюры абсцисс точек профильной линии x (рис. 11.16 б):

$$x_1 = x_4 = b - x_g = 4,6 - 1,44 = 3,16 \text{ см},$$

$$x_2 = x_3 = -x_g + \delta/2 = -1,44 + 0,45/2 = -1,22 \text{ см},$$

ординат y (рис. 11.16 в):

$$y_1 = y_2 = h/2 - t/2 =$$

$$= 10/2 - 0,76/2 = 4,62 \text{ см}, y_3 = y_4 = -4,62 \text{ см},$$

а также секториальных координат ω_d , приняв полюс в точке c_d и начало отсчета в той же точке, но обозначенной буквой f (рис. 11.16 г):

$$\omega_{d2} = \omega_{d3} = 0, \omega_{d1} = -y_1(x_1 - x_d) = -4,62(3,16 + 1,22) = -20,2 \text{ см}^2, \omega_{d4} = 20,2 \text{ см}^2.$$

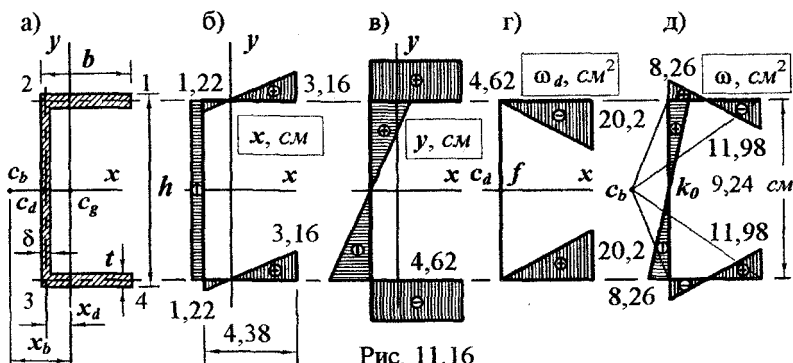


Рис. 11.16

Секториально-линейный статический момент $S_{\omega_x}^d = \int_A \omega_d x dA = 0$, так как эпюра x симметрична, а ω_d — кососимметрична. Из этого равенства и формулы (11.17) следует, что центр изгиба лежит на оси x : $y_b = y_d - S_{\omega_x}^d / J_y = y_d$.

Другой момент $-S_{\omega_y}^d \neq 0$. Вычислим его: $S_{\omega_y}^d = \int_A \omega_d y dA =$

$$= 2 \int_{-1,22}^{3,16} \omega_d y_1 t dx = 2 y_1 t \int_{-1,22}^{3,16} \omega_d dx = -2 \cdot 4,62 \cdot 0,76 \cdot 4,38 \cdot 20,2/2 = -311 \text{ см}^5.$$

Теперь по формуле (11.18) $x_b = x_d + S_{\omega_y}^d / J_x = -1,22 - 311/174 = -3,01 \text{ см}$. Таким образом, центр изгиба находится в точке c_b (рис. 11.16 а, д).

Секториальные координаты при полюсе c_b и начале отсчета f (рис. 11.16 д):

- точка принадлежит стенке $-\omega = (x_d - x_b) y$:

$$\omega_2 = (-1,22 + 3,01) \cdot 4,62 = 8,26 \text{ см}^2, \quad \omega_3 = -8,26 \text{ см}^2;$$

- точка принадлежит верхней полке $-\omega = \omega_2 - (x - x_2) y_2$:

$$\omega_1 = 8,26 - (3,16 + 1,22) \cdot 4,62 = -11,98 \text{ см}^2;$$

- в нижней полке эпюра аналогична, но с обратным знаком.

Эпюра секториальных координат кососимметрична. Очевидно, что секториальный статический момент $S_\omega = \int_A \omega dA = 0$. Начало отсчета k_θ следует принять в точке f .

Секториальный момент инерции:

$$J_\omega = \int_A \omega^2 dA = 2 \int_0^{y_2} ((x_d - x_b) y)^2 \delta dy + 2 \int_{x_2}^{x_1} (\omega_2 - (x - x_2) y_2)^2 t dx =$$

$$= 2 \int_0^{4,62} ((-1,22 + 3,01) y)^2 0,45 dy + 2 \int_{-1,22}^{3,16} (8,26 - (x + 1,22) 4,62)^2 0,76 dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем $J_\omega = 345 \text{ см}^6$.

Секториальный статический момент отсеченной части

$$S_\omega^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA:$$

- точка расположена в полке: $S_\omega^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA = t \int_x^{x_1} (\omega_2 - (x - x_2) y_2) dx =$

$$= 0,76 \int_x^{3,16} (8,26 - (x + 1,22) \cdot 4,62) dx.$$

После интегрирования имеем

$$S_\omega^{ct} = -11,29 - 1,99x + 1,76x^2.$$

Секториальный статический момент всей полки $S_\omega^{1-2} = -6,24 \text{ см}^4$.

- точка расположена в стенке: $S_\omega^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA = S_\omega^{1-2} + \delta \int_y^{y_2} (x_d - x_b) y dy =$

$$= -6,24 + 0,45 \int_y^{4,62} (-1,22 + 3,01) y dy = 2,36 - 0,403y^2.$$

Статический момент отсеченной части $S_x^{ct} = \int_{A_{ct}} y dA:$

- точка расположена в полке: $S_x^{ct} = \int_{A_{ct}} y dA = y_2 t \int_x^{x_1} dx = 4,62 \cdot 0,76 \int_x^{3,16} dx.$

После интегрирования имеем $S_x^{ct} = 11,09 - 3,51x$.

Статический момент всей полки $S_x^{1-2} = 15,4 \text{ см}^3$.

- точка принадлежит стенке: $S_x^{ct} = S_x^{1-2} + \delta \int_y^{y_2} y dy = 15,4 + 0,45 \int_y^{4,62} y dy$.

В результате $S_x^{ct} = 20,3 - 0,225y^2$.

Момент инерции при свободном кручении (6.22), (11.7)

$$J_t = \sum_1^3 b_i \delta_i^3 / 3 = (2,4 \cdot 38,0 \cdot 76^3 + 9,24 \cdot 0,45^3) / 3 = 1,56 \text{ см}^4.$$

11.7.2. Дифференциальное уравнение углов поворота сечений. Решение уравнения

Момент внешней нагрузки относительно линии центров изгиба

$$M_z = -pb(b/2 - \delta/2 - x_b + x_d)(l-z) =$$

$$= -4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,6(4,6/2 - 0,45/2 + 3,01 - 1,22)(100-z) = -7,11 \cdot 10^{-2}(100-z) \text{ кНсм}$$

Обозначим $-M_z = m$. Из предыдущего равенства $m = -7,11 \cdot 10^{-2} \text{ кН}$.

Дифференциальное уравнение (11.12) примет вид

$$\varphi^{IV} - \alpha^2 \varphi'' = m/(EJ_\omega).$$

Его общее решение (11.14) $\varphi = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + C_3 z + C_4 + \varphi_{par}$.

При постоянной правой части частное решение ищем в виде $\varphi_{par} = az^2$. Подставив его в уравнение, находим $a = -m/(2\alpha^2 EJ_\omega)$. Теперь

$$\varphi = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + C_3 z + C_4 - mz^2/(2\alpha^2 EJ_\omega),$$

$$\varphi' = \alpha C_1 \text{ch}\alpha z + \alpha C_2 \text{sh}\alpha z + C_3 - mz/(\alpha^2 EJ_\omega),$$

$$\varphi'' = \alpha^2 C_1 \text{sh}\alpha z + \alpha^2 C_2 \text{ch}\alpha z - m/(\alpha^2 EJ_\omega),$$

$$\varphi''' = \alpha^3 C_1 \text{ch}\alpha z + \alpha^3 C_2 \text{sh}\alpha z.$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0;$$

$$\varphi' = 0 \text{ при } z = 0 \Rightarrow \alpha C_1 + C_3 = 0;$$

$$B = -EJ_\omega \varphi'' = 0 \text{ при } z = l \Rightarrow \alpha^2 C_1 \text{sh}\alpha l + \alpha^2 C_2 \text{ch}\alpha l - m/(\alpha^2 EJ_\omega) = 0;$$

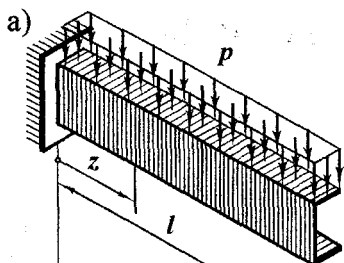
$$EJ_\omega \varphi' - EJ_\omega \varphi''' = 0 \text{ при } z = l \Rightarrow \alpha^2 \varphi' - \varphi''' = 0 \Rightarrow C_3 - m/(\alpha^2 EJ_\omega) = 0.$$

Решение этой системы: $C_1 = -m/(\alpha^3 EJ_\omega)$;

$$C_2 = m(1 + \alpha l \cdot \text{sh}\alpha l)/(\alpha^4 EJ_\omega \text{ch}\alpha l); C_3 = m/(\alpha^2 EJ_\omega);$$

$$C_4 = -m(1 + \alpha l \cdot \text{sh}\alpha l)/(\alpha^4 EJ_\omega \text{ch}\alpha l).$$

Коэффициент (11.13) $\alpha^2 = GJ_t / (EJ_\omega) = 8 \cdot 10^3 \cdot 1,56 / (2 \cdot 10^4 \cdot 345) = 1,809 \cdot 10^{-3} \text{ л/см}^2$. Отсюда: $\alpha = 0,0425 \text{ л/см}$; $\alpha l = 0,0425 \cdot 100 = 4,25$; $\text{sh}\alpha l = \text{sh}4,25 = 35,04$; $\text{ch}\alpha l = 35,06$. При этих значениях постоянные интегрирования равны: $C_1 = 1,341 \cdot 10^{-2}$; $C_2 = -1,351 \cdot 10^{-2}$; $C_3 = -5,70 \cdot 10^{-4} \text{ л/см}$; $C_4 = 1,351 \cdot 10^{-2}$.



Угол поворота сечения и его производные описываются выражениями

$$\varphi = 1,341 \cdot 10^{-2} \text{sh}\alpha z - 1,351 \cdot 10^{-2} \text{ch}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} z + 1,351 \cdot 10^{-2} + 2,849 \cdot 10^{-6} z^2,$$

$$\varphi' = 5,699 \cdot 10^{-4} \text{ch}\alpha z - 5,742 \cdot 10^{-4} \text{sh}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} + 5,698 \cdot 10^{-6} z,$$

$$\varphi'' = 2,426 \cdot 10^{-5} \text{sh}\alpha z - 2,444 \cdot 10^{-5} \text{ch}\alpha z + 5,698 \cdot 10^{-6},$$

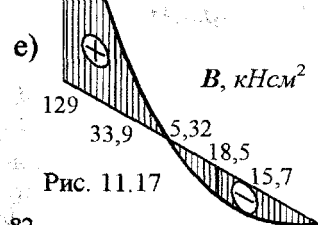
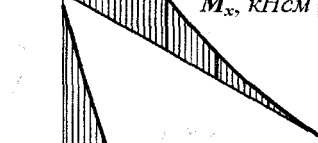
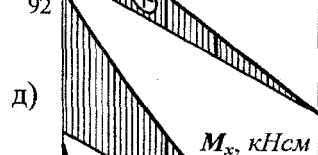
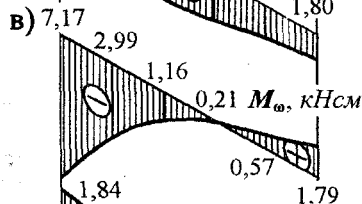
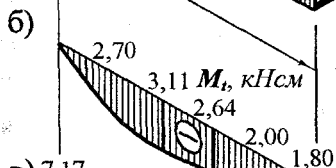
$$\varphi''' = 1,029 \cdot 10^{-6} \text{ch}\alpha z - 1,037 \cdot 10^{-6} \text{sh}\alpha z.$$


Рис. 11.17

11.7.3. Обобщенные усилия в стержне.

Напряжения в опасном сечении

Нагрузка, изображенная на рис. 11.17 а, вызывает в сечениях стержня обобщенные силы:

M_t – момент свободного кручения;

M_ω – изгибно-крутящий момент;

Q_y – поперечную силу;

M_x – изгибающий момент;

B – бимомент.

Момент свободного кручения (6.25)

$$M_t = GJ\varphi' = 8 \cdot 10^3 1,56(5,699 \cdot 10^{-4} \text{ch}\alpha z - 5,742 \cdot 10^{-4} \text{sh}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} + 5,698 \cdot 10^{-6} z) = 7,112 \text{ch}\alpha z - 7,166 \text{sh}\alpha z - 7,114 + 7,111 \cdot 10^{-2} z \text{ кНсм.}$$

Эпюра момента изображена на рис. 11.17 б.

Изгибно-крутящий момент $M_\omega = M_z - M_t$ по равенству (11.8) –

$$M_\omega = 7,166 \text{sh}\alpha z - 7,112 \text{ch}\alpha z \text{ кНсм.}$$

Эпюра M_ω приведена на рис. 11.17 в.

Поперечная сила Q_y (рис. 11.17 г) и изгибающий момент M_x (рис. 11.17 д) определяются из условий равновесия:

$$Q_y = pb(l-z) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,6(100-z) = 1,84 \cdot 10^{-2}(100-z) \text{ кН.}$$

$$M_x = pb(l-z)^2/2 = 1,84 \cdot 10^{-2}(100-z)^2/2 \text{ кНсм.}$$

Бимомент (11.4) $B = -EJ_{\omega}\varphi'' = -2 \cdot 10^4 \cdot 345(2,426 \cdot 10^{-5} \text{sh}\alpha z - 2,444 \cdot 10^{-5} \text{ch}\alpha z + 5,698 \cdot 10^{-6}) = 168,6 \text{ch}\alpha z - 167,4 \text{sh}\alpha z - 39,3 \text{ кНсм}^2$

а) $\sigma_z(M_x)$, кН/см² (рис. 11.17 е).

Большая часть внутренних силовых факторов достигает максимальных значений в месте защемления балки. Построим эпюры напряжений для левого сечения.

Нормальные напряжения в сечении.

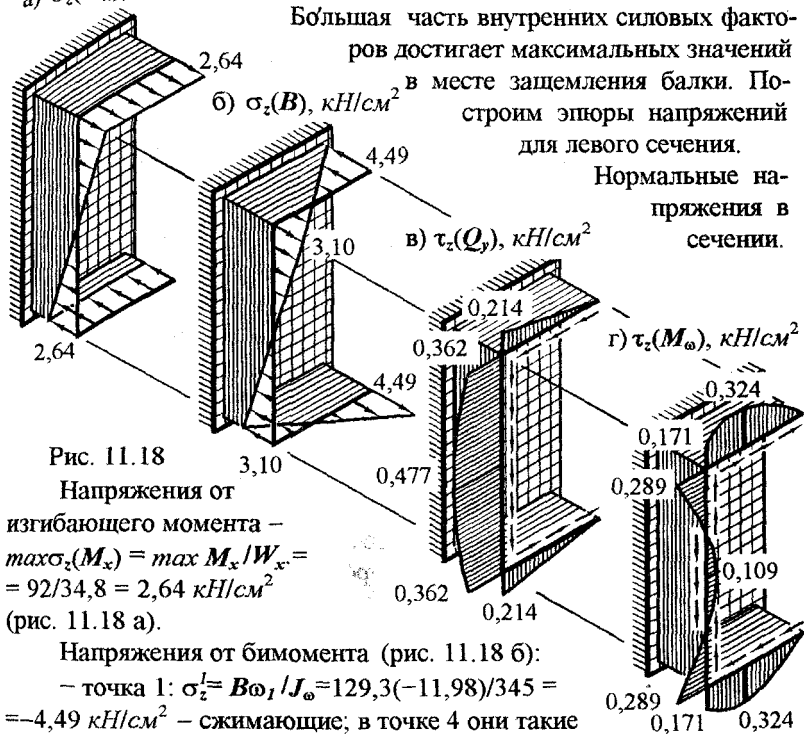


Рис. 11.18

Напряжения от изгибающего момента —
 $\max \sigma_z(M_x) = \max M_x / W_x = 92/34,8 = 2,64 \text{ кН/см}^2$
 (рис. 11.18 а).

Напряжения от бимомента (рис. 11.18 б):

— точка 1: $\sigma_z^1 = B\omega_1 / J_{\omega} = 129,3(-11,98)/345 = -4,49 \text{ кН/см}^2$ — сжимающие; в точке 4 они такие же по величине, но растягивающие.

— точка 2: $\sigma_z^2 = B\omega_2 / J_{\omega} = 129,3 \cdot 8,26/345 = 3,10 \text{ кН/см}^2$; $\sigma_z^3 = -\sigma_z^2(B)$.
 Касательные напряжения.

Напряжения от поперечной силы (рис. 11.18 в):

— точка 2: $\tau_{zx} = Q_y S_x^{\text{ct}} / (J_x \delta)$; $S_x^{\text{ct}} = S_x^{1-2} = 15,4 \text{ см}^3$; $\tau_{zx} = 1,84 \cdot 15,4 / (174 \cdot 0,76) = 0,214 \text{ кН см}^2$; $\tau_{zy} = Q_y S_x^{\text{ct}} / (J_x \delta)$; $\tau_{zy} = 1,84 \cdot 15,4 / (174 \cdot 0,45) = 0,362 \text{ кН см}^2$.

— максимальные напряжения в точках оси x: $\max \tau_{zy} = Q_y S_x^{\text{ct}} / (J_x \delta)$; $S_x^{\text{ct}} = 20,3 \text{ см}^3$; $\tau_{zx} = 1,84 \cdot 20,3 / (174 \cdot 0,45) = 0,477 \text{ кН/см}^2$. 83

Напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 11.18 г):

- точка расположена в полке:

$$\tau_x = M_\omega S_\omega^{ct} / (J_\omega \delta); S_\omega^{ct} = -11,29 - 1,99x + 1,76x^2, \max S_\omega^{ct} = 11,85 \text{ см}^4;$$

$$\max \tau_x = 7,166 \cdot 11,85 / (345 \cdot 0,76) = 0,324 \text{ кН/см}^2;$$

в точке 2 $\tau_x = 7,166 \cdot 6,24 / (345 \cdot 0,76) = 0,171 \text{ кН/см}^2$;

- точка принадлежит стенке:

$$\tau_y = M_\omega S_\omega^{ct} / (J_\omega \delta); S_\omega^{ct} = 2,36 - 0,403y^2;$$

в точке 2 $S_\omega^{ct} = 6,24 \text{ см}^4$, $\tau_y = 7,166 \cdot 6,24 / (345 \cdot 0,45) = 0,289 \text{ кН/см}^2$;

напряжения в точках оси x $\tau_{zy} = 7,166 \cdot 2,36 / (345 \cdot 0,45) = 0,109 \text{ кН/см}^2$.

В рассмотренном сечении швеллера момент чистого кручения равен нулю. Для полноты анализа подсчитаем касательные напряжения $\max_x(M_t)$ в сечении с $\max M_t$:

$$\max_x(M_t) = \max M_t \delta_{\max} / J_t = 3,11 \cdot 0,76 / 1,56 = 1,52 \text{ кН/см}^2.$$

Напряжения невелики. В месте защемления напряженное состояние опаснее.

Изложенная техническая теория, построенная на более общих предпосылках, обнаруживает качественно новые эффекты в распределении напряжений по сечению и деформировании тонкостенного стержня открытого профиля. В результате она позволяет прогнозировать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций на более высоком теоретическом уровне.

12. Устойчивость

12.1. Понятие устойчивости

Термин "устойчивость" используется практически во всех областях естествознания. Устойчивость

- движения планет, космических кораблей, ракет и самолетов;
- электронных оболочек атома;
- ламинарного течения жидкости;
- высокотемпературной плазмы;
- биологической клетки;
- системы автоматического регулирования и энергетических систем.

Этот далеко не полный перечень показывает, как широк диапазон применения понятия устойчивости.

В сопротивлении материалов рассматривается устойчивость тех процессов и состояний, которые изучаются в этой дисциплине, – устойчивость *деформированных состояний и равновесия*.

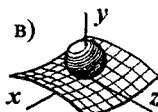
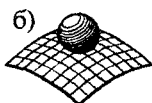
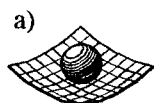
Реальные объекты и их расчетные схемы отличаются друг от друга. В природе не существует идеально упругих тел, абсолютно прямых стержней, статических состояний. Введение этих понятий обусловлено желанием доступными средствами установить связи между наиболее существенными характеристиками внешнего воздействия и параметрами состояния системы. А так как в реальных условиях всегда есть причины, побуждающие к отклонениям от рассматриваемых гипотетических состояний, возникает вопрос о реакции конструкции на малые возмущения внешнего воздействия. Задачи подобного рода рассматриваются в теориях устойчивости.

Под устойчивостью будем понимать способность системы сохранять свое состояние при малых возмущающих воздействиях.

Если малые возмущения вызывают малые отклонения от рассматриваемого состояния или не вызывают их вообще, состояние устойчиво.

Оценивая устойчивость, нельзя говорить о системе вообще. Следует иметь в виду вполне определенное состояние этой системы. Кроме того, необходимо ясно определиться, по отношению к какому классу возмущений проверяется устойчивость. Так например, равновесие весоного шарика на идеально гладкой кривой поверхности (рис. 12.1) в случаях

а) устойчиво по отношению к любым малым отклонениям;



б) неустойчиво во всех направлениях;

в) устойчиво в плоскости xy и неустойчиво в плоскости yz .

Рис. 12.1

От содержания, вкладываемого в каждом частном случае в понятие устойчивости, зависит выбор метода решения задачи и толкование результатов. Из практики исследований и расчетов конструкций известны случаи, когда нечеткая трактовка задачи приводила к ошибкам в ее решении. Поэтому вопрос об устойчивости выходит за рамки методической, логической и дидактической сфер.

12.2. Устойчивость прямолинейной формы равновесия центрально сжатого упругого стержня (вывод формулы Эйлера)

Рассмотрим прямой стержень, сжатый центральной силой F (рис. 12.2).

Допустим, что от случайного воздействия в стержне появились малые прогибы v , а вместе с ними и изгибающие моменты $M_x = -Fv$ (минус – результат правил знаков для моментов и прогибов). При искривлении оси возникает момент упругих сил $M_{xe} = EJ_x v''$. M_x и M_{xe} – противоположающиеся факторы. Первый стремится изгибать стержень, второй – выпрямлять.

Если в некотором сечении стержня $EJ_x v'' > -Fv$, то случайно появившаяся кривизна уменьшится. Равновесие стержня в изогнутом положении возможно тогда, когда во всех сечениях будет соблюдаться равенство $EJ_x v'' = -Fv$.

Введем обозначение

$$F/(EJ_x) = k^2. \quad (a)$$

Теперь условие равновесия изогнувшегося стержня принимает вид

$$v'' + k^2 v = 0. \quad (б)$$

Задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия свелась к однородному дифференциальному уравнению второго порядка.

Обратим внимание на своеобразие математической формулировки задачи. Нас интересует такое значение силы $F = F_{cr}$ (она содержится в коэффициенте k), при котором сохранится равновесие изогнувшегося стержня. Задача ставится так: найти значение k и вид функции $v(z) \neq 0$, при которых удовлетворяется уравнение (б).

Общее решение уравнения (б) имеет вид $v = C_1 \operatorname{sink}z + C_2 \operatorname{cosk}z$. Условия закрепления стержня таковы, что при $z = 0$ и при $z = l$ прогиб $v = 0$. Из первого условия находим: $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$v = C_1 \operatorname{sink}z. \quad (в)$$

Второе условие приводит к равенству $C_1 \operatorname{sinkl} = 0$. Оно имеет два качественно различных решения: $C_1 = 0$ и $\operatorname{sinkl} = 0$. В первом случае из равенства (в) следует, что $v \equiv 0$. Этот вариант не соответствует поставленной задаче, и его отбрасываем. Из второго решения находим: $kl = n\pi$, где n – любое целое число. Учитывая обозначение (а), получаем

$$F_{cr} = n^2 \pi^2 EJ_x / l^2. \quad (г)$$

Практическое значение имеет наименьшая отличная от нуля величина силы F_{cr} , которая отвечает $n = 1$:

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_x / l^2. \quad (12.1)$$

Эта сила носит название *критической* или *эйлеровой*¹ силы.

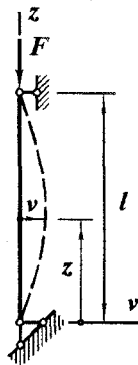


Рис. 12.2

¹ Формула (12.1) была получена в 1744 г. великим математиком Л. Эйлером.



Рис. 12.3

При $n = 1$ произведение $kl = \pi$. Уравнение изогнутой оси (в) имеет вид $v = C_1 \sin(\pi z/l)$. (12.2)

При значении силы (12.1) возможно равновесие стержня, изогнувшегося по полуволне синусоиды. Постоянная C_1 определяет максимальный прогиб.

При любом целом n изогнутая ось описывается выражением $v = C_1 \sin(n\pi z/l)$ и представляет n полуволн синусоиды в пределах длины стержня (рис. 12.3).

Полученное решение содержит ряд особенностей, которые необходимо пояснить.

Во-первых, остается неопределенной постоянная интегрирования C_1 . Из вывода следует, что она может быть любой – при любом прогибе соблюдается равенство моментов сил упругости и критической силы.

Таким образом, полученное решение описывает лишь форму потери устойчивости, не выявляя зависимости прогиба от величины сжимающей силы.

Второй особенностью полученного решения является совершенно нереальное отражение закритического поведения стержня. Действительно, результат (г) устанавливает бесчисленное множество критических значений сжимающей силы, соответствующих $n = 1, 2, 3, \dots$. При этих значениях стержень может находиться в равновесии, будучи изогнутым. При величинах же силы, отличных от (г), произведение $kl \neq n\pi$ и, следовательно, $C_1 = 0$ – стержень прямой. Отмеченные особенности означают, что в процессе возрастания силы F стержень

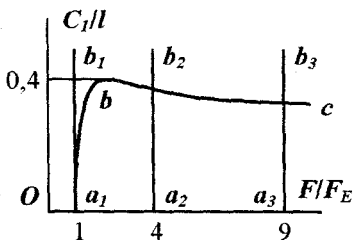


Рис. 12.4

– вначале остается прямым (участок Oa_1 на рис. 12.4),

– при первом критическом значении силы изгибается по одной полуволне синусоиды с произвольным по величине прогибом (прямая a_1b_1),

– при дальнейшем увеличении нагрузки вновь выпрямляется (a_1a_2).

Прямолинейная форма равновесия сохраняется до второго критического значения, вчетверо превышающего первое. При нем происхо-

дит прогиб по двум полуволнам, и снова стержень выпрямляется с ростом силы. Такое поведение стержня противоречит не только опыту, но и здравому смыслу.

Отмеченная специфика решения и ошибочное количественное и качественное отражение закритического поведения стержня являются результатом приближенного выражения момента упругих сил (точнее, кривизны оси). Если принять $M_{xe} = EJ_x r = EJ_x v'' / (1+(v')^2)^{3/2}$ и решить задачу на основе дифференциального уравнения $EJ_x v'' / ((1+(v')^2)^{3/2}) = -Fv$, то зависимость прогиба от силы будет описываться кривой a_1bc . Очертания оси, соответствующие состояниям докритическому, a_1 , b и c изображены на рис. 12.5.

Таким образом, полученное решение задачи об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня верно отражает поведение стержня в докритической стадии, правильно описывает форму потери устойчивости и дает критическое значение силы. Поэтому оно вполне приемлемо для расчетов сжатых элементов конструкций. Отмеченные же недостатки относятся к той области работы, которая в реальных сооружениях обычно не допускается.

12.3. Зависимость критического значения силы от условий закрепления стержня

Формула (12.1) выведена для стержня с шарнирными опорами на концах. Необходимо охватить и иные условия закрепления.

Для каждой конкретной схемы задача о критическом значении сжимающей силы может быть решена аналогично описанному выше. В то же время критическую силу можно найти по механико-геометрической аналогии, минуя процедуру составления и решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим, например, стержень, защемленный одним концом (рис. 12.6 а). Его ось, изогнувшуюся при потере устойчивости, можно привести зеркальным отражением к виду, изображенному на рис. 12.6 б.

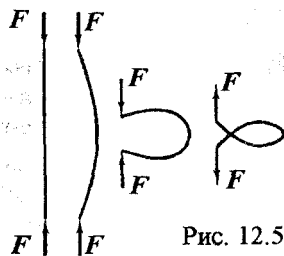


Рис. 12.5

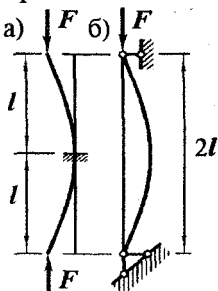
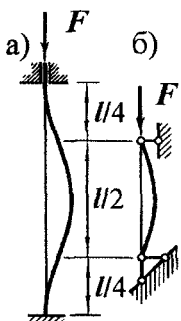


Рис. 12.6

Критические силы у заземленного стержня длиной l и у шарнирно закрепленного длиной $2l$ одинаковы. Подставив в формулу (12.1) $2l$ вместо l , получаем $F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (2l)^2$.



Рассмотрим еще одну схему (рис. 12.7 а). Средняя часть стержня длиной $l/2$ будет в таких же условиях, как стержень с шарнирными опорами (в точках перегиба моменты равны нулю). Заменив в формуле (12.1) l на $l/2$, получим $F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (l/2)^2$.

Поступая аналогично при других условиях закрепления и обобщая формулы, запишем формулу критической силы в виде

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (\mu l)^2. \quad (12.3)$$

Это обобщенная формула Эйлера для критической силы. В формуле:

Рис. 12.7

E – модуль упругости материала;

J_x – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба;

l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины.

Произведение μl носит название *приведенной длины*.

На рис. 12.8 показано несколько видов закрепления стержней и даны соответствующие им коэффициенты приведения длины.



Рис. 12.8

Критическую силу (12.3) естественно следует классифицировать как предельную, определяющую несущую способность сжатого стержня. Полученный результат обнаруживает весьма своеобразную связь критической силы с механическими и геометрическими параметрами стержня. Из формулы (12.3) видно, что критическое значение сжимающей силы

– пропорционально изгибной жесткости, которая в расчетах на прочность при сжатии не фигурирует;

– обратно пропорционально квадрату длины, которая также не влияет на напряжения при сжатии;

– не зависит от характеристик прочности материала (так например, два геометрически одинаковых стержня – один из малоуглеродистой стали, другой из высокопрочной потеряют устойчивость при равных силах, поскольку модуль упругости у них практически одинаков). Последний вывод, впрочем, справедлив, если потеря устойчивости происходит при упругих деформациях. Ниже это будет показано.

12.4. Пределы применимости формулы Эйлера

До критического состояния сжатый стержень остается прямым. Напряжения в сечениях стержня распределены равномерно. В момент потери устойчивости они равны $\sigma_{cr} = F_{cr}/A$. Преобразуем это равенство с помощью формулы (12.3):

$$\sigma_{cr} = F_{cr}/A = \pi^2 EJ/((\mu l)^2 A).$$

Учитывая, что $J/A = i^2$ (10.8), можно записать $\sigma_{cr} = \pi^2 E i^2 / (\mu l)^2$.

Обозначим $\mu l / i = \lambda$. (12.4)

Здесь λ – безразмерная величина, называемая *гибкостью стержня*. После обозначения (12.4) приходим к выражению

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2, \quad (12.5)$$

которое называют *формулой Эйлера для критического напряжения*. При выводе формулы Эйлера использован закон Гука (моменту сжимающей силы противопоставлен момент упругих сил). Следовательно, формулы (12.1), (12.3) и (12.5) применимы, если потеря устойчивости происходит при упругих деформациях стержня. Область справедливости обсуждаемых результатов ограничивается условием $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$, где σ_{pr} – предел пропорциональности материала.

Для удобства практического пользования это условие обычно записывают в ином виде, преобразованном с помощью формулы (12.5): $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{pr}$. Отсюда $\lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_{pr}}$. Обозначив

$$\pi \sqrt{E / \sigma_{pr}} = \lambda_u, \quad (12.6)$$

получаем ограничение на гибкость стержня –

$$\lambda \geq \lambda_u. \quad (12.7)$$

Фигурирующая в выражениях (12.6) и (12.7) λ_u носит название *предельной гибкости*.

Стержни, гибкость которых удовлетворяет условию (12.7), называют стержнями большой гибкости. При оценке их устойчивости можно использовать формулы Эйлера. В стержнях меньшей гибкости потеря устойчивости сопровождается пластическими деформациями. Критическую силу для стержней малой гибкости определяют иначе.

Как видно по равенству (12.6) предельная гибкость зависит от модуля упругости и предела пропорциональности, а следовательно, не только от материала, но и от его марки. Для некоторых материалов и их марок величины $\lambda_{и}$ приведены в справочных таблицах. Однако многие из таблиц устарели и в приближенных практических расчетах можно принять $\sigma_{pr} \approx R_c$. Тогда возможность использования формулы Эйлера будет ограничена условием

$$(12.7) \text{ при } \lambda_{и} = \pi \sqrt{E/R_c}. \quad (12.8)$$

Так например, у стали 18 кп, модуль упругости которой $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, а расчетное сопротивление на сжатие $R_c = 220 \text{ МПа}$; предельная гибкость $\lambda_{и} = \pi \sqrt{E/R_c} = 3,14 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 220} = 95$. Аналогично можно найти предельные гибкости $\lambda_{и}$ для других материалов и их марок.

12.5. Экспериментальные данные о потере устойчивости за пределом упругости.

Эмпирическая формула

12.5.1. Как отмечено выше формулы Эйлера справедливы, если критическое напряжение не превосходит предела пропорциональности. Между тем элементы реальных конструкций не всегда удовлетворяют условию (12.7). Поэтому необходимо исследование устойчивости при неупругих деформациях.

Результаты опытов (рис. 12.9) показывают, что при потере устойчивости в упругой стадии экспериментальные точки ложатся близко к гиперболе Эйлера (12.5), чем подтверждают ее достаточную точность (определяющий критическое напряжение модуль упругости – сравнительно стабильная константа). У стержней же, теряющих устойчивость при пластических

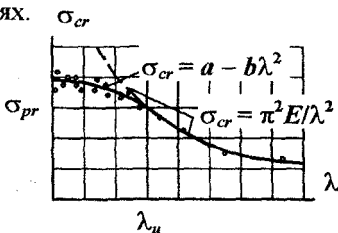


Рис. 12.9

деформациях, экспериментальные результаты сильно разбросаны (это объясняется разбросом диаграмм сжатия) и расположены значительно ниже гиперболы (12.5) (диаграммы сжатия в упругопластической стадии расположены значительно ниже прямой Гука).

12.5.2. Для расчетов на устойчивость при неупругих деформациях разными авторами предложены различные эмпирические формулы, основанные на подборе кривых, приближающихся к результатам опытов. Вполне приемлема из них

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda^2, \quad (12.9)$$

где a и b – константы, имеющие размерность напряжения.

Значения коэффициентов a и b обычно приводят в справочниках по устойчивости. Однако с появлением новых материалов такие справочники не удовлетворяют практические запросы. В приближенных расчетах можно принять $a = R_{nc}$ (нормативному сопротивлению на сжатие); коэффициент b найти из условия равенства критических напряжений по формулам (12.5) и (12.9) при предельной гибкости: $\sigma_{cr} = a - b\lambda_u^2 = R_{nc} - b\lambda_u^2 = \pi^2 E / \lambda_u^2 = R_c$, откуда

$$b = (R_{nc} - R_c) / \lambda_u^2. \quad (12.10)$$

К недостаткам эмпирических формул следует отнести прежде всего необходимость проведения серии опытов на устойчивость, требующих тщательной постановки испытаний и более сложных установок и образцов. Кроме того, из-за большого разброса диаграмм сжатия требуется большое количество испытаний для статистически достоверного обобщения.

С целью иллюстраций изложенной части теории рассмотрим примеры.

Пример 12.1. Стержень (рис. 12.10) сжат силой F . Длина стержня $l = 4,8$ м, сечение кольцо с $D = 100$ мм и $d = 80$ мм; материал – сталь 18 кп. Найдем критическое значение сжимающей силы.

Осевой момент инерции сечения
 $J = \pi D^4(1 - (d/D)^4)/64 = 3,14 \cdot 10^4(1 - 0,8^4)/64 = 290 \text{ см}^4$;
 площадь $A = \pi D^2(1 - (d/D)^2)/4 = 3,14 \cdot 10^2(1 - 0,8^2)/4 = 28,3 \text{ см}^2$;
 радиус инерции $i = \sqrt{J/A} = \sqrt{290/28,3} = 3,21 \text{ см}$.

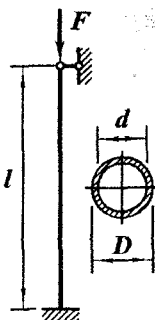
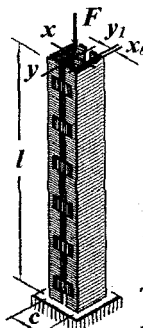


Рис. 12.10

По рис. 12.8 коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$. Тогда гибкость $\lambda = \mu l / i = 0,7 \cdot 480 / 3,21 = 105$. Она больше предельной

предельной гибкости (см. пример к формуле (12.8), где $\lambda_u = 95$). Для вычисления критической силы можно использовать формулу Эйлера (12.3) $F_{cr} = \pi^2 EJ / (\mu l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 290 / (0,7 \cdot 480)^2 = 506 \text{ кН}$.

Пример 12.2. Стойка, составленная из двух швеллеров № 27 (рис. 12.11) при $c = 25 \text{ см}$, несет груз $F = 1,6 \text{ МН}$. Высота $l = 3 \text{ м}$; материал сталь 09Г2. Найдём коэффициент запаса устойчивости n_{st} .



Радиусы инерции сечения: $i_x = 10,9 \text{ см}$;

$$i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{2(J_{y1} + (c/2 - x_0)^2 A_1) / (2A_1)} = \sqrt{i_{y1}^2 + (c/2 - x_0)^2} = \sqrt{2,73^2 + (25/2 - 2,47)^2} = 10,4 \text{ см}.$$

Большая гибкость $\lambda_{max} = \mu l / i_{min} = 2 \cdot 300 / 10,4 = 57,7$.

По формуле (12.8) предельная гибкость

$$\lambda_u = \pi \sqrt{E / R_c} = 3,14 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 305} = 80,4.$$

Так как $\lambda_{max} < \lambda_u$, критическое напряжение определяем по эмпирической формуле (12.9) $\sigma_{cr} = a - b \lambda^2$: $a = R_{nc} = 315 \text{ МПа}$, по равенству (12.10) $b = (R_{nc} - R_c) / \lambda_u^2 = (315 - 305) / 80,4^2 = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$. Теперь $\sigma_{cr} = 315 - 1,55 \cdot 10^{-3} \cdot 57,7^2 = 310 \text{ МПа}$.

Критическая сила $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 31 \cdot 2 \cdot 35,2 = 2180 \text{ кН}$. Коэффициент запаса устойчивости $n_{st} = F_{cr} / F = 2180 / 1600 = 1,36$.

Пример 12.3. Стержень закреплен, как показано на рис. 12.12: в плоскости zy защемление внизу и скользящая заделка сверху; в плоскости zx нижний конец также защемлен, верхний же свободен. Материал стержня сосна; размеры: $l = 1,2 \text{ м}$; $h = 6 \text{ см}$. Найдём допустимую нагрузку с коэффициентом запаса устойчивости $n_{st} = 3$.

Гибкости стержня.

Плоскость zy . Радиус инерции $i_x = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{2 h h^3 / (12 \cdot 2 h h)} = h / \sqrt{12} = 6 / 3,46 = 1,73 \text{ см}$. Гибкость $\lambda_{zy} = \mu_{zy} l / i_x = 0,5 \cdot 120 / 1,73 = 34,7$.

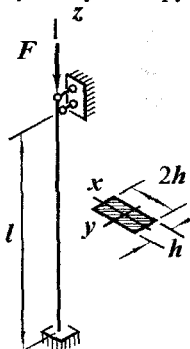
Плоскость zx . Радиус инерции $i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{h (2h)^3 / (12 \cdot 2 h h)} = 2h / \sqrt{12} = 2 \cdot 6 / 3,46 = 3,46 \text{ см}$.

Гибкость $\lambda_{zx} = \mu_{zx} l / i_y = 2 \cdot 120 / 3,46 = 69,4$. Так как $\lambda_{zx} > \lambda_{zy}$, расчет ведем для плоскости zx .

Найдём предельную гибкость λ_u (12.8). У сосны $E = 10^4 \text{ МПа}$, $R_c = 13 \text{ МПа}$:

$$\lambda_u = \pi \sqrt{E / R_c} = 3,14 \sqrt{10^4 / 13} = 87.$$

Поскольку $\lambda_{zx} < 87$, используем формулу (12.9).



94 Рис. 12.12

Примем $a = R_{nc} = 30 \text{ МПа}$; $b = (R_{nc} - R_c)/\lambda_u^2 = (30 - 13)/87^2 = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$. Критическое напряжение $\sigma_{cr} = a - b\lambda^2 = 30 - 2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 69,4^2 = 19,2 \text{ МПа}$. Критическая сила $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 1,92 \cdot 6 \cdot 12 = 138 \text{ кН}$.

Допустимое значение сжимающей силы при заданном трехкратном запасе устойчивости $[F] = F_{cr}/n_{st} = 138/3 = 46 \text{ кН}$.

12.6. Критическое значение сжимающей силы при потере устойчивости за пределом упругости.

Теория приведенного модуля

Задача о критическом значении силы, сжимающей упругопластический стержень, рассматривалась различными авторами с разных позиций. До сих пор не сформировалась единая точка зрения о процессе потери устойчивости сжатого элемента конструкции, происходящей за пределом упругости. Рассмотрим одно из наиболее признанных решений задачи¹.

Шарнирно закрепленный стержень (рис. 12.13 а) с диаграммой сжатия материала, изображенной на рис. 12.13 б, подвержен силе F_{cr} . В результате случайного воздействия стержень получил малое отклонение от прямолинейной формы. Найдем значение сжимающей силы, способной удержать стержень в изогнутом состоянии.

Пока стержень был прямым, напряжения в его поперечных сечениях были распределены равномерно. Перед изгибом они имели значение σ_{cr} (рис. 12.13 в). На диаграмме сжатия (рис. 12.13 б) это состояние стержня характеризуется точкой *a*.

Рассмотрим поперечное сечение произвольного положения. Из-за искривления оси стержня в сечении возникает изгибающий момент. В одной части сечения напряжения возрастут на $\Delta\sigma_c$, в другой уменьшатся на $\Delta\sigma_t$. Вместе с ними изменятся и продольные деформации волокон.

В соответствии с гипотезой плоских сечений (рис. 12.13 в; см. также формулу (7.1)) $\Delta\epsilon_c = \Delta\epsilon_t = \Delta\epsilon = y_I/r = y_I\nu''$. (а)

В той части сечения A_c , где сжимающие напряжения и деформации возрастают, $\Delta\sigma_c = \text{tg}\alpha_{tg} \cdot \Delta\epsilon$. (б)

¹ Описываемое здесь решение впервые предложено в 1895 г. Ф.С.Ясинским, профессором Петербургского института инженеров путей сообщения.

Если же напряжения уменьшаются (это происходит в части сечения A_t), то по закону упругой разгрузки $\Delta\sigma_t = \text{tg}\alpha \cdot \Delta\varepsilon$. (в)

Учитывая, что $\text{tg}\alpha = E$, введем обозначение $\text{tg}\alpha_{\text{tg}} = E_{\text{tg}}$ и будем называть его *касательным модулем*. Используя введенное обозначение и равенство (а), запишем выражения (б) и (в) так:

$$\Delta\sigma_c = E_{\text{tg}} y_1 v'', \quad \Delta\sigma_t = E y_1 v''. \quad (\text{г})$$

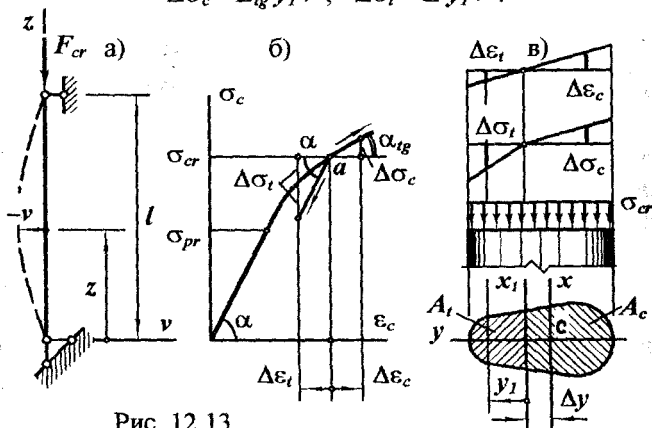


Рис. 12.13

Допустим, что при изгибе стержня сжимающая сила не изменилась. Тогда равнодействующая дополнительных напряжений равна нулю:

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_A \Delta\sigma dA = \int_{A_c} \Delta\sigma_c dA + \int_{A_t} \Delta\sigma_t dA = E_{\text{tg}} v'' \int_{A_c} y_1 dA + E v'' \int_{A_t} y_1 dA = \\ &= v'' (E_{\text{tg}} S_c + E S_t) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E_{\text{tg}} S_{x_1}^c + E S_{x_1}^t = 0$. (12.11)

Здесь $S_{x_1}^c$ и $S_{x_1}^t$ — статические моменты догружаемой и разгружаемой частей сечения относительно оси x_1 , разделяющей их. Из равенства (12.11) может быть найдено положение оси (отрезок Δy). Решение уравнения (12.11) зависит от формы сечения, а также от величины напряжения. Имея равенство (12.11), будем считать, что положение оси x , известно.

Равновесие изогнутого стержня возможно, если моменты внешних и внутренних сил равны. Приравняем моменты сил, приложенных к части стержня длиной z , относительно оси x_1 :

$$F_{cr}(-v + \Delta y) = \sigma_{cr} A \Delta y + \int_A \Delta \sigma y_1 dA = 0.$$

Учитывая, что $F_{cr} = \sigma_{cr} A$, и разбив интеграл по площади A на два — по A_c и A_t , находим: $\int_{A_c} \Delta \sigma_c y_1 dA + \int_{A_t} \Delta \sigma_t y_1 dA + F_{cr} v = 0$. Подставим в полученное уравнение равенства (г):

$$E_{tg} v'' \int_{A_c} y_1^2 dA + E v'' \int_{A_t} y_1^2 dA + F_{cr} v = v'' (E_{tg} J_{x_1}^c + E J_{x_1}^t) + F_{cr} v = 0.$$

Здесь $J_{x_1}^c$ и $J_{x_1}^t$ — моменты инерции догружаемой и разгружаемой частей сечения относительно оси x_1 . Итак,

$$v'' (E_{tg} J_{x_1}^c + E J_{x_1}^t) + F_{cr} v = 0.$$

Поделим левую часть полученного уравнения на J_x и обозначим

$$(E_{tg} J_{x_1}^c + E J_{x_1}^t) / J_x = E_{red}. \quad (12.12)$$

E_{red} носит название *приведенного модуля*. С учетом введенного обозначения дифференциальное уравнение равновесия принимает вид $v'' + F_{cr} v / (E_{red} J_x) = 0$. Решение уравнения, подобного полученному, и анализ результатов детально рассмотрены в разд. 12.2. Поэтому, не повторяя математических выкладок, запишем обобщенный итог:

$$F_{cr} = \pi^2 E_{red} J_x / (\mu l)^2; \quad \sigma_{cr} = \pi^2 E_{red} / \lambda^2. \quad (12.13)$$

Формулы (12.13), определяющие значения критической силы и напряжения, аналогичны формулам Эйлера. Но сюда входит не обычный, а приведенный модуль.

Пример 12.4. Порядок определения приведенного модуля проиллюстрируем примером прямоугольного сечения (рис. 12.14).

Равенство (12.11) для этого типа сечения запишется так: $E_{tg} (h/2 + \Delta y)^2 / 2 = E (h/2 - \Delta y)^2 / 2$.

Далее, $J_{x_1}^c = b (h/2 + \Delta y)^3 / 3$, $J_{x_1}^t = b (h/2 - \Delta y)^3 / 3$;

$$J_x = bh^3 / 12.$$

Выражение (12.12) после подстановки полученных равенств и исключения Δy примет вид

$$E_{red} = 4EE_{tg} / (\sqrt{E} + \sqrt{E_{tg}})^2. \quad (12.14)$$

Вычисления приведенного модуля показали, что влияние формы сечения на него невелико.

Поэтому формулу (12.14) можно использовать для сечений других форм.

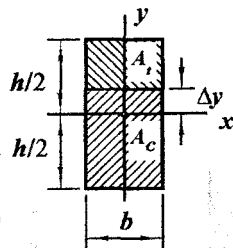


Рис. 12.14

Величина приведенного модуля зависит от критического напряжения (через касательный модуль). Если $\sigma_{cr} < \sigma_{pr}$, то $E_{tg} = E$ и $E_{red} = E$. Формулы (12.13) совпадают соответственно с (12.3) и (12.5). Задачу Эйлера можно расценивать как частный случай задачи, рассмотренной здесь. При $\sigma_{cr} > \sigma_{pr}$ модуль $E_{tg} < E$, а отсюда $E_{red} < E$. По мере возрастания критического напряжения приведенный модуль уменьшается.

Определение критического напряжения по формуле (12.13) обычно производится методом подбора:

- задаются некоторым значением σ_{cr} ;
- по диаграмме сжатия определяют касательный модуль E_{tg} ;
- по формуле (12.14), вычисляют приведенный модуль E_{red} ;
- по равенству (12.13) находят величину критического напряжения σ_{cr} .

Сопоставляя предварительно выбранное и полученное значения σ_{cr} , судят об удачности попытки. При необходимости расчет повторяют.

Теоретические формулы (12.13) обладают тем преимуществом перед эмпирическими, что опираются на экспериментальную диаграмму сжатия, получить которую значительно проще, нежели провести серию опытов на устойчивость.

12.7. Диаграмма критических напряжений.

Расчет сжатых стержней

по коэффициенту уменьшения расчетного сопротивления

12.7.1. Формулы (12.5) и (12.13) устанавливают зависимость критического напряжения от гибкости стержня (рис. 12.15, линия со штриховкой).

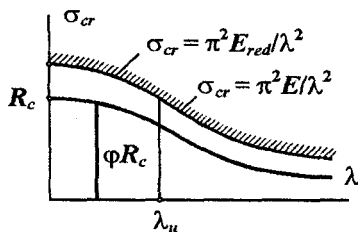


Рис. 12.15

По кривой критических напряжений введением коэффициента запаса строят кривую напряжений, допускаемых в стержне из условия его устойчивости (нижняя линия на рисунке). В нормах расчета и проектирования строительных конструкций ординаты этой кривой обозначают в виде произведения ϕR_c , где R_c – расчетное сопротивление

материала на сжатие; $\varphi = \varphi(\lambda)$ – безразмерный множитель, называемый *коэффициентом уменьшения расчетного сопротивления*.

По графику видно, что $1 \geq \varphi > 0$. Величина коэффициента φ зависит не только от гибкости, но и от материала стержня. В нормативной и справочной литературе значения этого коэффициента приведены в виде таблиц, графиков или формул.

12.7.2. Коэффициенты φ уменьшения расчетного сопротивления

Таблица 9.1

12.7.2.1. Сталь

Гиб- кость λ	Марка стали			
	18 кп 18 пс	09Г2, 14Г2, 15ХСНД, 10Г2С1, 10ХНДП	10ХСНД	15Г2СФ
10	0,987	0,984	0,983	0,982
20	0,962	0,955	0,952	0,949
30	0,931	0,917	0,911	0,905
40	0,894	0,873	0,863	0,854
50	0,852	0,822	0,809	0,796
60	0,805	0,766	0,749	0,721
70	0,754	0,687	0,654	0,623
80	0,686	0,602	0,566	0,532
90	0,612	0,522	0,483	0,447
100	0,542	0,448	0,408	0,369

Гиб- кость λ	Марка стали			
	18 кп 18 пс	09Г2, 14Г2, 15ХСНД, 10Г2С1, 10ХНДП	10ХСНД	15Г2СФ
110	0,478	0,381	0,338	0,306
120	0,419	0,321	0,287	0,260
130	0,364	0,276	0,247	0,223
140	0,315	0,240	0,215	0,195
150	0,276	0,211	0,189	0,171
160	0,244	0,187	0,167	0,152
170	0,218	0,167	0,150	0,136
180	0,196	0,150	0,135	0,123
190	0,177	0,136	0,122	0,111
200	0,161	0,124	0,111	0,101

12.7.2.2. Древесина

При $\lambda < 70$ $\varphi = 1 - 8 \cdot 10^{-5} \lambda^2$; если $\lambda \geq 70$, $\varphi = 3100/\lambda^2$.

Величины коэффициентов φ принимают такими, чтобы был обеспечен необходимый запас устойчивости. При этом учитываются разбросы диаграмм сжатия и физико-механических характеристик материала, наличие геометрических несовершенств в стержнях, эксцентриситетов прикладываемых сил, начальных напряжений, возникающих при изготовлении элементов конструкций, и т.п. Методика назначения величин коэффициентов φ достаточно сложна и рассматривается индивидуально в курсах устойчивости строительных конструкций.

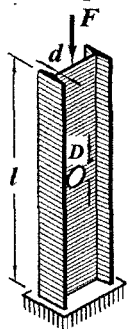
12.7.3. Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид

$$F/A \leq \varphi R_c. \quad (12.15)$$

Оно требует, чтобы напряжения в сечении сжатого стержня не превосходили значения, допускаемого для данного материала и гибкости.

В практических расчетах сжатых элементов строительных конструкций нередко приходится учитывать наличие местных ослаблений в стержне. Под местными подразумеваются такие ослабления, которые имеют небольшую протяженность по длине стержня. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что ослабления подобного рода практически не влияют на величину критической силы. Поэтому в расчетах на устойчивость они не учитываются. В условии (12.15) фигурирует площадь неослабленного сечения. Но при этом наряду с проверкой устойчивости по ограничению (12.15) необходима проверка условия прочности.

Пример 12.5. Центрально сжатая стойка высотой $l = 3$ м выполнена из двутавра № 50 (рис. 12.16), материал сталь 10ХСНД. В стенке двутавра имеется отверстие с $D = 60$ мм; оси отверстия и двутавра пересекаются. Найдем величину допускаемой сжимающей силы $[F]$.



Минимальный радиус инерции сечения $i_{\min} = 3,23$ см. Наибольшая гибкость $\lambda_{\max} = \mu l / i_{\min} = 2 \cdot 300 / 3,23 = 186$. По таблице 12.7.2.1 находим $\varphi = 0,127$. Площадь двутавра $A = 100$ см². Расчетное сопротивление стали $R_c = 355$ МПа.

Согласно условию устойчивости (12.15)

$$F \leq \varphi R_c A = 0,127 \cdot 35,5 \cdot 100 = 452 \text{ кН.}$$

Рис. 12.16

В ослабленном сечении – центральное сжатие. Проверим выполнение условия прочности. Площадь ослабленного сечения

$$A_n = A - Dd = 100 - 6 \cdot 1 = 94 \text{ см}^2.$$

По условию прочности $F \leq R_c A_n = 35,5 \cdot 94 = 3337$ кН.

Сила F не должна превышать 452 кН. Примем $[F] = 450$ кН.

Пример 12.6. Стержень, изображенный на рис. 12.17, сжат силой $F = 150$ кН. Длина стержня $l = 1,4$ м; сечение квадрат со стороной b ; материал сталь 09Г2С. Подберем размер сечения.

При отсутствии аналитической зависимости φ от λ задачи в подобной постановке решают методом последовательных приближений. Один из вариантов расчета таков.

Первая попытка.

Задаемся начальным значением коэффициента φ_b , например, $\varphi_b = 0,5$ (среднее из возможных величин). Тогда из условия (12.15)

$$A \geq F/(\varphi_b R_c) = 150/(0,5 \cdot 33,5) = 8,96 \text{ см}^2,$$

$$b = \sqrt{A} \geq \sqrt{8,96} = 3 \text{ см}.$$

Проверим удачность выбора.

Радиус инерции

$$i = \sqrt{J/A} = \sqrt{b^4/(12 \cdot b^2)} = b/\sqrt{12} = 3/3,46 = 0,864 \text{ см}.$$

Гибкость $\lambda = \mu l/i = 1 \cdot 140/0,864 = 162$. По таблице (12.7.2.1) $\varphi_e = 0,183$. Расхождение велико. Повторяем расчет.

Вторая попытка.

Задаемся $\varphi_b = 0,3$. Тогда $A \geq F/(\varphi_b R_c) = 150/(0,3 \cdot 33,5) = 14,9 \text{ см}^2$, $b = \sqrt{A} \geq \sqrt{14,9} = 3,86 \text{ см}$. Округляя, принимаем $b = 4 \text{ см}$.

Проверяем:

– радиус инерции $i = b/\sqrt{12} = 4/3,46 = 1,16 \text{ см}$;

– гибкость $\lambda = \mu l/i = 1 \cdot 140/1,16 = 120$;

– коэффициент $\varphi_e = 0,321$.

Значения коэффициента φ_b и φ_e во второй попытке близки.

Левая часть условия устойчивости $F/A = 150/16 = 9,38 \text{ кН/см}^2$; правая часть $\varphi_e R_c = 0,321 \cdot 33,5 = 10,8 \text{ кН/см}^2$. Условие устойчивости выполнено. Считаем вторую попытку окончательной. Итак, $b = 4 \text{ см}$.

Выбранная в примере последовательность решения задачи не является единственно возможной. Можно, например, в начале попытки задаваться не коэффициентом φ , а, скажем, размером b . Тогда очередность действий в пределах одной попытки будет выглядеть так: $b \rightarrow i \rightarrow \lambda \rightarrow \varphi \rightarrow A \rightarrow b$ с последующим сопоставлением начального и конечного размеров b . Возможны и другие вычислительные последовательности. Расчет заканчивают тогда, когда выполняется условие устойчивости (12.15) и достигается обусловленная близость левой и правой его частей.

Если зависимость φ от λ задана формулой, необходимость в процедуре последовательных приближений отпадает.

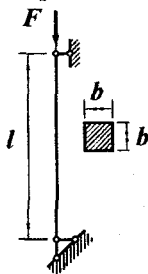


Рис. 12.17

12.8. Устойчивость плоской формы изгиба

Предыдущий материал посвящен устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня. Однако потеря устойчивости возможна не только при сжатии, но и при других видах нагружения, в частности, при изгибе. Так, балка, нагруженная моментами на краях (рис. 12.18 а), испытывает чистый прямой изгиб в плоскости $\eta\xi$. Пока значения моментов меньше критического, плоская форма изгиба устойчива. Как только моменты достигнут критической величины M_{cr} , случайные малые отклонения не исчезнут; устойчивой станет иная форма (она показана на рис. 12.18 а).

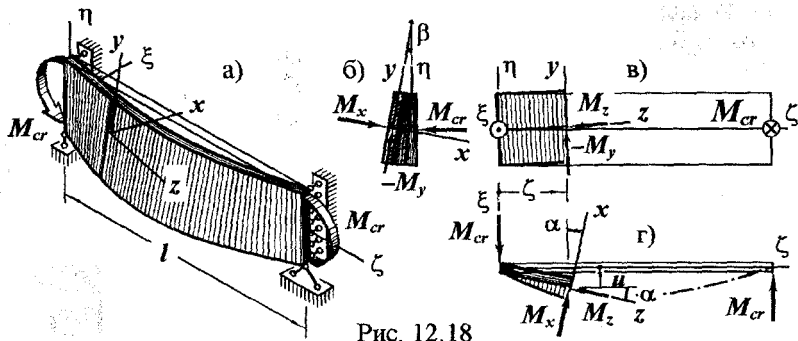


Рис. 12.18

Поставим задачу аналогично Эйлеровой. В балке, испытывающей чистый прямой изгиб, закрепленной, как изображено на рис. 12.18 а, возникли случайные малые отклонения, сопровождающиеся изгибом в горизонтальной плоскости и закручиванием. Найдем критическое значение моментов и новую устойчивую форму равновесия.

На рис. 12.18 б ... г изображены проекции балки до потери устойчивости (тонкие линии) и части балки, перешедшей в новую форму равновесия; моменты изображены векторами.

Моменты восстанавливающих упругих сил —

$$M_y = EJ_y u''; \quad (a)$$

$$M_z = GJ_t \beta'; \quad (б)$$

где β' — относительный угол закручивания.

Внешний момент, способный удержать балку в новом деформированном состоянии, должен удовлетворять условия равновесия.

Просуммируем моменты, приложенные к левой части балки, относительно осей y и z : $-M_y - M_{cr} \sin \beta = 0$ (рис. 12.18 б); $M_z - M_{cr} \sin \alpha = 0$ (рис. 12.18 г). Учитывая малость перемещений, считаем: $\sin \beta = \beta$; $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = u'$. Тогда

$$M_y = -M_{cr} \beta; \quad (\text{в})$$

$$M_z = M_{cr} u'. \quad (\text{г})$$

Уравнения (а) ... (г) позволяют решить сформулированную задачу.

Подставляя выражения (а) и (б) в уравнения равновесия (в) и (г), получаем $u'' + M_{cr} \beta / (EJ_y) = 0$; $GJ_t \beta' / M_{cr} - u' = 0$. После дифференцирования второго уравнения по ζ и суммирования его с первым имеем $GJ_t \beta'' / M_{cr} + M_{cr} \beta / (EJ_y) = 0$.

$$\text{Введем обозначение } M_{cr}^2 / (EJ_y GJ_t) = k^2. \quad (\text{д})$$

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид $\beta'' + k^2 \beta = 0$.

$$\text{Общее решение уравнения } \beta = C_1 \operatorname{sink} \zeta + C_2 \operatorname{cosk} \zeta.$$

Углы поворота сечений $\beta = 0$ при $\zeta = 0$ и при $\zeta = l$. Из первого условия следует, что $C_2 = 0$, а $\beta = C_1 \operatorname{sink} \zeta$.

Второе условие приводит к равенству $C_1 \operatorname{sinkl} = 0$. Отсюда, отбрасывая вариант $C_1 = 0$, получаем $\operatorname{sinkl} = 0$, что означает

$$kl = \pi. \quad (\text{ж})$$

Учитывая обозначение (д), находим критическую величину изгибающего момента

$$M_{cr} = \pi \sqrt{EJ_y GJ_t} / l. \quad (12.16)$$

Из равенств (е) и (ж) следует

$$\beta = C_1 \sin(\pi \zeta / l). \quad (12.17)$$

По закону Гука (б) крутящий момент $M_z = C_1 \pi GJ_t \cos(\pi \zeta / l) / l$. Подставив полученное выражение в уравнение (в) и проинтегрировав последнее, находим $u = C_1 l \sqrt{GJ_t} / (EJ_y) \sin(\pi \zeta / l) / \pi + C_3$. Учитывая, что при $\zeta = 0$ и $\zeta = l$ прогиб в горизонтальной плоскости $u(0) = 0$ и $u(l) = 0$, устанавливаем, что $C_3 = 0$, после чего

$$u = C_1 l \sqrt{GJ_t} / (EJ_y) \sin(\pi \zeta / l) / \pi. \quad (12.18)$$

Таким образом, при значении изгибающего момента (12.16) плоская форма изгиба становится неустойчивой к изгибно-крутильным возмущениям. Устойчивым будет равновесие в деформированном состоянии, соответствующем перемещениям (12.17) и (12.18).

Существенно то, что величина критического момента (12.16) зависит от изгибной и крутильной жесткостей, которые на напряжения и деформации при изгибе в плоскости ζy не влияют. Кроме того, в формуле (12.16) нет характеристик прочности материала.

Воспользовавшись методом приведения длины, как это было сделано для сжатых стержней, можно найти критические значения моментов при чистом изгибе по-иному закрепленных балок.

Анализ устойчивости балок в условиях поперечного изгиба приводит к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, более сложным в поиске решения. В специальной и справочной литературе приводятся критические значения внешних сил для некоторых наиболее распространенных схем нагружения.

12.9. Заключение к разделу

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что в процессе потери устойчивости нагрузка остается неизменной как по величине, так и по направлению. Это обстоятельство существенно с точки зрения возможности использования полученных решений для анализа работы и расчетов элементов конструкций.

Внешние силы на сжатые или изогнутые элементы стержневых конструкций – это усилия от соседних частей. Геометрические изменения в конструкции сопровождаются изменениями усилий. Поэтому, строго говоря, полученные выше решения не применимы к расчету стержневых систем. Однако, если изменения усилий невелики и слабо влияют на поведение конструкции, ими можно пренебречь. Такое возможно в статически определимых и многих из статически неопределимых системах, при нагрузках гравитационной природы.

Если внешняя нагрузка изменяется в процессе потери устойчивости, поведение сжатых и изогнутых элементов может существенно отличаться от описанного выше. Так, при нагрузке, неизменной по направлению, но возрастающей в процессе изгиба стержня, потеря устойчивости может произойти раньше предсказываемого формулами (12.3) и (12.13), и сопровождаться динамическими эффектами. Если в процессе потери устойчивости сила сохраняет величину, но изменяет направление, возможен переход стержня из состояния покоя в режим движения, неустойчивым становится *равновесие*.

Исследования ученых обнаружили множество разновидностей потери устойчивости, выявили критерии чувствительности деформируемых систем к различным возмущениям. Современная теория устойчивости вооружила инженера средствами прогнозирования реакции конструкции на отклонения внешних воздействий от проектных.

13. Понятие о расчете по деформированной схеме

Большинство задач сопротивления материалов решается без учета влияния деформаций конструкции на ее расчетную схему. Обычно вполне обоснованно считают, что из-за малости деформаций геометрическое очертание конструкции до и после нагружения практически одно и то же. Положения точек приложения и линий действия внешних сил остаются неизменными. Неизменными остаются взаимные положения внешних нагрузок и главных центральных осей любого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы в сечениях не зависят от деформаций и перемещений.

Использование таких упрощений расчетной схемы уменьшает трудоемкость расчетов. Задачи в подобных случаях описываются сравнительно простыми математическими уравнениями.

В то же время отметим, что игнорирование влияния перемещений на расчетную схему конструкции не всегда допустимо.

Рассмотрим, например, внецентренно сжатый стержень (рис. 13.1). Пренебрегая искривлением оси, считаем, что изгибающий момент в сечениях $M_x = Fe$. Но, строго говоря, плечо силы равно $e + f - v$. Если перемещение f конца стержня окажется соизмеримым с эксцентриситетом e , то пренебрежение деформациями количественно недопустимо. К тому же добавим, что вносимая предположением погрешность, идет не в запас прочности.

Специфика расчетов по деформированной схеме состоит в том, что при составлении уравнений равновесия учитывают деформации конструкции.

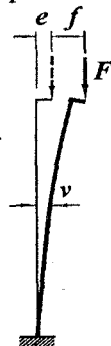


Рис. 13.1

Для обсуждаемого внецентренно сжатого стержня при расчете по деформированной схеме следует записать $M_x = F(e + f - v)$.

13.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси при продольно-поперечном изгибе

Рассмотрим стержень, подверженный поперечной нагрузке q

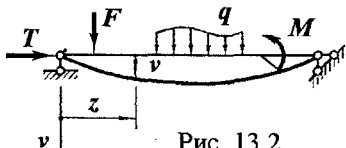


Рис. 13.2

и продольной силе (рис. 13.2). При составлении уравнения учтем то, что в изогнутом стержне продольная сила вызывает момент: $M_x = M_{cx} - Tv$, (а) где M_{cx} — изгибающий момент в сечении стержня от поперечных сил. Пренебрегая сближением концов стержня при его изгибе (оно на порядок меньше прогибов), можно считать, что M_{cx} в сжато-изогнутом стержне изменяется по длине так же как и при отсутствии силы T .

Согласно закону Гука $M_x = EJ_x v''$. (б)

Соединяя выражения изгибающего момента (а) и (б), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси $EJ_x v'' = M_{cx} - Tv$. Обозначим $T/EJ_x = k^2$. После этого уравнение примет вид

$$v'' + k^2 v = M_{cx}/(EJ_x). \quad (13.1)$$

Решив уравнение (13.1), можно найти прогибы от совместного действия продольной и поперечных сил, а затем внутренние силовые факторы и напряжения.

Пример 13.1. Расчетная схема балки изображена на рис. 13.3.

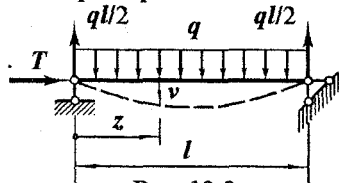


Рис. 13.3

Его общее решение $v = C_1 \text{sink}z + C_2 \text{cosk}z + q(z^2 - lz - 2/k^2)/(2k^2 EJ_x)$.

Постоянные интегрирования найдем из условий закрепления балки: прогиб $v = 0$ при $z = 0$ и при $z = l$. Из первого условия находим $C_2 = q/(k^4 EJ_x)$, а из второго $C_1 = q(1 - \text{coskl})/(k^4 EJ_x \text{sink}l)$. Теперь $v = q((1 - \text{coskl})\text{sink}z/\text{sink}l - 1 + \text{cosk}z + k^2(z^2 - lz)/2)/(k^4 EJ_x)$.

Наибольший прогиб $v = v_{max}$ при $z = l/2$:

$$v_{max} = q((1 - \text{coskl})/(2\text{cos}(kl/2)) - 1 + \text{coskl}/2 + k^2 l^2/8)/(k^4 EJ_x).$$

Изгибающий момент $M_x = EJ_x v'' = q((\text{coskl} - 1)\text{sink}z/\text{sink}l - \text{cosk}z + 1)/k^2$.

При $z = l/2$ $M_x = \text{max}M_x = q((\text{cos}(kl/2) - 1)/(k^2 \text{cos}(kl/2)))$.

Наибольшие нормальные напряжения в среднем сечении балки:

$$\max \sigma_z = T/A + \max M_x / W_x.$$

При более сложных нагрузках решение дифференциального уравнения (13.1) становится трудоемким, так как его правая часть описывается разными функциями на разных участках. Наибольшую сложность при этом представляет определение постоянных интегрирования. Кроме того, в общем случае требуется исследование на экстремум выражений прогиба и изгибающего момента. Это препятствует применению метода в практических расчетах.

13.2. Приближенный метод расчета сжато-изогнутых стержней

Цель приближенного метода – уменьшение трудоемкости решения уравнения (13.1).

Представим прогиб стержня в виде суммы (рис. 13.4) $v = v_c + \Delta v$, (а) где v_c – прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой; Δv – дополнительный прогиб от момента продольной силы.

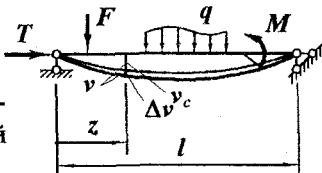


Рис. 13.4

Зададимся приближенным выражением дополнительного прогиба в виде полуволны синусоиды:

$$\Delta v = f \cdot \sin(\pi z / l). \quad (б)$$

Подставим выражение (б) в равенство (а), а затем (а) в (13.1):

$$v_c'' - \pi^2 f \sin(\pi z / l) / l^2 + k^2 v_c + k^2 f \sin(\pi z / l) = M_{cx} / (EJ_x).$$

Учитывая, что $v_c'' = M_{cx} / (EJ_x)$, и заменяя произведение $f \cdot \sin(\pi z / l)$ на Δv , получаем равенство $(T - F_E) \Delta v + T v_c = 0$, откуда $\Delta v = T v_c / (F_E - T)$. Здесь введено обозначение $F_E = \pi^2 EJ_x / l^2$ – критическая сила по формуле Эйлера (12.1). Подставив полученное выражение дополнительного прогиба в равенство (а), после преобразований получаем формулу

$$v = v_c / (1 - T / F_E). \quad (13.2)$$

Формула (13.2) позволяет найти прогиб в сжато-изогнутом стержне по прогибу, вызванному только поперечной нагрузкой. Определить последний значительно легче. Во-первых, решение дифференциального уравнения изогнутой балки проще чем сжато-изогнутой, во-вторых, существуют методы, позволяющие найти v_c в заданном месте балки, минуя дифференциальное уравнение.

Равенство (13.2) справедливо не только для шарнирно опертой балки. Аналогичные решения для иначе закрепленных балок привели к такому же результату. Но под F_E следует понимать соответствующее критическое значение сжимающей силы, определяемое формулой (12.3): $F_E = \pi^2 EJ_x / (\mu l^2)$.

Погрешность приближенной формулы (13.2) зависит от вида поперечной нагрузки и величины сжимающей силы. В литературе отмечают, что при прогибах от поперечной нагрузки, имеющих один знак, и сжимающей силе $T \leq 0,7F_E$ формула вполне пригодна для практических расчетов.

С целью получения количественной информации о результатах расчетов различными методами рассмотрим пример.

Пример 13.2. Стойка высотой $l = 3,5$ м (рис. 13.5) выполнена из двутавра № 18. На краю сечения ($e = 9$ см) к ней приложена внецентренная продольная сила F . Материал – сталь 18 пс ($R_c = 230$ МПа). Устойчивость в плоскости $z x$ обеспечена. При этих исходных данных решим такие задачи:

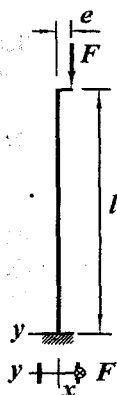


Рис. 13.5

- определим допустимую нагрузку $[F]$ из расчета на прочность по недеформированной схеме;
- при найденном значении силы F вычислим $\max \sigma_z$, пользуясь точным методом расчета по деформированной схеме;
- выполним то же, что и во втором задании, но приближенным методом.

Определение допустимой нагрузки из расчета на прочность по недеформированной схеме.

В сечениях стержня возникают сжимающая продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_x = Fe$.

При изгибе со сжатием

$$\max \sigma_z = N/A + M_x/W_x = F/A + Fe/W_x.$$

По условию прочности $\max \sigma_z \leq R_c$, или $F/A + Fe/W_x \leq R_c$, откуда $F \leq R_c / (1/A + e/W_x)$. Используя таблицы сортаментов, находим $F \leq 23 / (1/23,4 + 9/143) = 218$ кН. Принимаем допустимое значение силы $[F] = 218$ кН.

**Определение наибольших нормальных напряжений
на основе дифференциального уравнения изогнутой оси
(точный метод расчета по деформированной схеме)**

Принимая во внимание перемещения, вызванные изгибом оси (рис. 13.6), констатируем, что в сечениях стержня возникают сжимающая продольная сила, которую из-за малости прогибов считаем постоянной, $N = F$, и изгибающий момент $M_x = F(f + e - v)$ с наибольшим значением в нижнем сечении: $\max M_x = F(f + e)$.

Итак, определение максимального момента сводится к вычислению перемещения f верхнего конца стойки.

Изгибающий момент в сечениях $M_x = F(f + e - v)$. С другой стороны, $M_x = EJ_x v''$. Отсюда $EJ_x v'' + Fv = F(f + e)$. Если обозначить отношение $F/EJ_x = k^2$, уравнение примет вид $v'' + k^2 v = k^2(f + e)$.

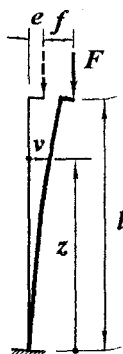


Рис. 13.6

Общее решение дифференциального уравнения —

$$v = C_1 \operatorname{sink}z + C_2 \operatorname{cosk}z + f + e.$$

Углы поворота сечений $v' = C_1 k \operatorname{cosk}z - C_2 k \operatorname{sink}z$.

Постоянные интегрирования должны удовлетворять условиям закрепления стержня: при $z = 0$ прогиб $v(0) = 0$ и угол поворота $v'(0) = 0$. Из второго условия $C_1 = 0$; из первого $C_2 = -(f + e)$. Уравнение изогнутой оси стержня —

$$v = (f + e)(1 - \operatorname{cosk}z).$$

Так как при $z = l$ прогиб $v(l) = f$, то $f = (f + e)(1 - \operatorname{coskl})$.

Отсюда $f = e(1 - \operatorname{coskl})/\operatorname{coskl}$.

Теперь вычисляем:

$$k = \sqrt{F/EJ_x} = \sqrt{218/(2 \cdot 10^4 \cdot 1290)} = 0,2905 \cdot 10^{-2} \text{ л/см};$$

$$kl = 0,2905 \cdot 10^{-2} \cdot 350 = 1,017; \operatorname{coskl} = \operatorname{cos}1,017 = 0,526.$$

$$f = e(1 - \operatorname{coskl})/\operatorname{coskl} = 9(1 - 0,526)/0,526 = 8,11 \text{ см.}$$

Зная прогиб наверху, находим

$$\max M_x = F(f + e) = 218(8,11 + 9) = 3730 \text{ кНсм};$$

$$\max \sigma_z = F/A + \max M_x / W_x = 218/23,4 + 3730/143 = 35,4 \text{ кН/см}^2.$$

Напряжение превысило расчетное сопротивление более чем наполовину. Это — результат погрешности определения изгибающего момента по недеформированной схеме.

Определение наибольших нормальных напряжений приближенным методом расчета по деформированной схеме.

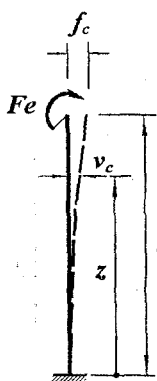


Рис. 13.7

Найдем перемещение верхнего конца стойки по формуле (13.2), которая в данной ситуации имеет вид

$$f = f_c / (1 - F/F_E),$$

где f_c – прогиб стержня на конце от поперечной изгибающей нагрузки. Роль такой нагрузки выполняет момент силы F (рис. 13.7): $M_{cx} = Fe$.

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в условиях поперечного изгиба (7.23):

$$v''_c = M_{cx} / EJ_x = Fe / EJ_x.$$

Последовательное двукратное интегрирование приводит к равенствам

$$v'_c = Fez / EJ_x + C_1; \quad v_c = Fez^2 / (2EJ_x) + C_1z + C_2.$$

Из условий закрепления – $v_c(0) = 0$ и $v'_c(0) = 0$ находим $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, изогнутая ось описывается выражением $v_c = Fez^2 / (2EJ_x)$.

Прогиб на конце от поперечной изгибающей нагрузки

$$f_c = v_c(l) = Fel^2 / (2EJ_x) = 218 \cdot 9 \cdot 350^2 / (2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1290) = 4,66 \text{ см.}$$

Эйлерово значение сжимающей силы (12.3) в плоскости yz

$$F_E = \pi^2 EJ_x / (2l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1290 / (2 \cdot 350)^2 = 520 \text{ кН.}$$

Прогиб на конце при совместном действии момента Fe и силы F по используемой формуле

$$f = f_c / (1 - F/F_E) = 4,66 / (1 - 218/520) = 8,02 \text{ см.}$$

Завершение расчета аналогично предыдущему:

$$\max M_x = F(f + e) = 218(8,02 + 9) = 3710 \text{ кНсм};$$

$$\max \sigma_z = F/A + \max M_x / W_x = 218/23,4 + 3710/143 = 35,3 \text{ кН/см}^2.$$

Результаты точного и приближенного методов практически совпали. Трудоемкость же последнего значительно ниже.

В заключение отметим, что возможность вычисления Эйлеровой силы по формуле (12.3) не ограничивается гибкостью стержня (условием (12.7)). Формула (13.2) справедлива для стержней и меньшей гибкости. Область применимости приближенного метода – упругая стадия. Возникающие в стержне напряжения не должны превышать предел пропорциональности.

13.3. О применении принципа суперпозиции при расчете сжато-изогнутых стержней

При продольно-поперечном изгибе выражения, связывающие характеристики напряженно-деформированного состояния стержня с внешними силами, вообще говоря, нелинейны. Они не удовлетворяют условию (10.10). Поэтому, также говоря вообще, принцип суперпозиции в расчетах по деформированной схеме применять нельзя. Действительно, если вычислить моменты в стержне отдельно от поперечной нагрузки и продольной силы, будет потеряно слагаемое Tv . В то же время большие расчетные преимущества, появляющиеся при использовании принципа наложения, побуждают к поиску хотя бы ограниченных возможностей его применения. Они есть.

Рассмотрим балку, нагруженную поперечной F_1 и продольной T силами (рис. 13.8 а). Дифференциальное уравнение для этого случая имеет вид $v_1'' + k^2 v_1 = M_{1cx} / (EJ_x)$. (а) Его решение $v_1(z)$ его удовлетворяет всем граничным условиям.

Если балка нагружена другой поперечной силой $-F_2$ и той же продольной (рис. 13.8 б), уравнение аналогично —

$$v_2'' + k^2 v_2 = M_{2cx} / (EJ_x). \quad (б)$$

Решение этого уравнения $v_2(z)$ также удовлетворяет всем граничным условиям.

Если просуммировать уравнения (а) и (б), получим

$$(v_1'' + v_2'') + k^2 (v_1 + v_2) = (M_{1cx} + M_{2cx}) / (EJ_x). \quad (в)$$

Но $M_{1cx} + M_{2cx}$ — изгибающий момент от суммарной поперечной нагрузки $F_1 + F_2$. Следовательно, уравнение (в) отвечает схеме, изображенной на рис. 13.8 в. Сумма решений уравнений (а) и (б) — $(v_1 + v_2)$ является решением уравнения (в).

Так как $M_1 = EJ_x v_1''$, $M_2 = EJ_x v_2''$, а $M_1 + M_2 = EJ_x (v_1'' + v_2'')$, эпюра моментов в балке (в) равна сумме эпюр моментов балок (а) и (б).

Из проведенного анализа следует, что прогибы и моменты в сжато-изогнутом стержне от сложной поперечной нагрузки равны сумме соответственно прогибов и моментов от отдельных поперечных нагрузок, входящих в состав сложной, при условии, что каждая из них действует совместно с продольной силой. На рис. 13.8 это свойство отмечено знаками + и =.

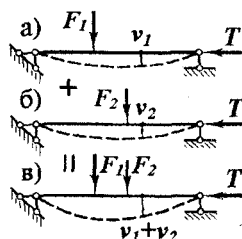


Рис. 13.8

Таким образом, при неизменной продольной силе прогибы и моменты в балке изменяются пропорционально поперечной нагрузке.

Иначе обстоит дело, когда изменяется вся нагрузка. Если она (и поперечные, и продольная) возрастет в n раз, напряжения, деформации и перемещения в балке возрастут более чем в n раз. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при определении запасов прочности в условиях продольно-поперечного изгиба.

Обнаруженная возможность наложения решений для сжато-изогнутых стержней позволяет значительно упростить расчеты. Достаточно иметь решения для некоторых типовых наборов поперечных нагрузок, чтобы суммированием получить эпюры прогибов и моментов при сложном поперечном воздействии.

Для иллюстрации специфики расчетов сжато-изогнутых стержней приведем пример.

Пример 13.3. Стойка, составленная из двух швеллеров № 24 (рис. 13.9), имеет длину $l = 4$ м. Материал швеллеров – сталь 18 пс. Стойка подвержена распределенной нагрузке $q = 2$ кН/м и продольной силе $F = 600$ кН. Найдем коэффициент запаса прочности n_s по напряжению в опасной точке.

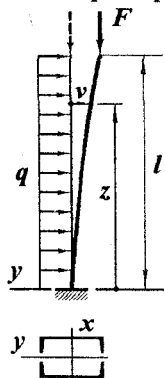


Рис. 13.9

Прежде всего напомним, что коэффициент запаса показывает, во сколько раз можно увеличить нагрузку до возникновения обусловленного предельного состояния.

В поставленной задаче предельное состояние соответствует равенству $\max \sigma_z = R_n$. Поскольку при возрастании нагрузки напряжения растут быстрее ее, коэффициент запаса нельзя определять по отношению напряжений: $n_s < R_n / \max \sigma_z$. Он равен отношению предельной нагрузки к заданной:

$$n_s = F_u / F, \quad (a)$$

где F_u – предельная нагрузка при пропорциональном увеличении всех действующих сил; F – заданная нагрузка.

Решение задачи на основе дифференциального уравнения (13.1) очень трудоемко. Оно сведется к трансцендентному уравнению. Воспользуемся приближенным методом.

Изгибающий момент от поперечной нагрузки $M_{cx} = q(l-z)^2/2$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси $v_c'' = M_{cx}/(EJ_x) = q(l-z)^2/(2EJ_x)$. Интегрируя дважды, получаем $v_c' = -q(l-z)^3/(6EJ_x) + C_1$; $v_c = q(l-z)^4/(24EJ_x) + C_1z + C_2$. Учитывая, что при $z=0$ прогиб $v_c(0) = 0$ и производная $v_c'(0) = 0$, находим $C_1 = ql^3/(6EJ_x)$, $C_2 = -ql^4/(24EJ_x)$. Прогиб на конце балки $max v_c = C_1l + C_2 = ql^4/(8EJ_x)$.

Критическая сила по формуле Эйлера (12.3)

$$F_E = \pi^2 EJ_x / (2l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 2900 / (2 \cdot 400)^2 = 1790 \text{ кН.}$$

Прогиб от совместного действия продольной и поперечной нагрузок $v_{max} = max v_c / (1 - F/F_E) = (ql^4/(8EJ_x)) / (1 - F/F_E)$.

Наибольший изгибающий момент $max M_x = ql^2/2 + F \cdot v_{max} = ql^2/2 + Fql^4/(8EJ_x(1 - F/F_E))$. Напряжение в опасной точке $max \sigma_z = F/A + max M_x/W_x = F/A + (ql^2/2 + Fql^4/(8EJ_x(1 - F/F_E))) / W_x$. (6)

При действующей нагрузке $max \sigma_z = 600 / (2 \cdot 30,6) + (0,02 \cdot 400^2 / 2 + 600 \cdot 0,02 \cdot 400^4 / (8 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 2900 (1 - 600/1790))) / (2 \cdot 242) = 9,804 + (1600 + 3,072 \cdot 10^{11} / (9,28 \cdot 10^8 \cdot 0,6648)) / (2 \cdot 242) = 9,804 + (1600 + 498) / (2 \cdot 242) = 14,14 \text{ кН/см}^2$.

Если увеличить нагрузку в n_s раз, $max \sigma_z$ достигнет нормативного сопротивления стали $R_n = 235 \text{ МПа}$. Используя равенство (6), получаем уравнение

$$max \sigma_z = n_s F/A + (n_s ql^2/2 + n_s F n_s ql^4 / ((8EJ_x)(1 - n_s F/F_E))) / W_x = R_n$$

После подстановки числовых значений оно приобретает вид

$$13,101 n_s + 0,684 n_s^2 / (1 - 0,3352 n_s) = 23,5$$

и приводит к квадратному уравнению $20,9782 n_s - 3,7104 n_s^2 - 23,5 = 0$.

Корни этого уравнения $n_s = 4,11$ и $n_s = 1,54$. Первому из них соответствует предельная нагрузка $q_u = n_s q = 4,11 \cdot 2 = 8,22 \text{ кН/м}$, $F_u = n_s F = 4,11 \cdot 600 = 2466 \text{ кН}$. Предельное значение сжимающей силы оказалось больше критического. Поэтому первый корень отбрасываем. Согласно второму решению $n_s = 1,54$; $q_u = n_s q = 1,54 \cdot 2 = 3,08 \text{ кН/м}$ и $F_u = n_s F = 1,54 \cdot 600 = 924 \text{ кН}$. Итак, коэффициент запаса равен $1,54$ (при действующей нагрузке отношение $R_n / max \sigma_z = 23,5 / 14,14 = 1,66$ - больше действительного запаса прочности).

Необходимость расчетов по деформированной схеме возникает не только в стержневых системах, но и в конструкциях, содержащих пластины и оболочки. Для них разработаны соответствующие методы с соблюдением принципиальных положений, проиллюстрированных выше.

14. Динамическое действие нагрузки

14.1. Понятие о динамическом нагружении

Большинство нагрузок, действующих на сооружения, изменяются во времени. Вместе с ними изменяются напряжения, деформации и перемещения. Если движения точек происходят с ускорениями, возникают силы инерции. От них появляются дополнительные напряжения и деформации.

В тех случаях, когда силы инерции малы и ими можно пренебречь, нагружение считают статическим – в каждый момент времени каждая точка находится в состоянии равновесия. *Если силами инерции пренебречь нельзя, нагружение называют динамическим.*

Характер изменения нагрузок во времени может быть чрезвычайно разнообразным. Не всегда даже удается установить с нужной точностью их параметры. Для упрощения и унификации расчетных методов динамические нагрузки разделяют на различные идеализированные категории.

Одна группа – *это нагрузки, вызванные монотонным движением с ускорением.* К ним относятся, например, силы инерции при прямолинейном ускоренном движении, при вращении и т.п.

Другая группа – *вибрационные нагрузки.* Для них характерна периодичность действия, соизмеримая с периодами колебаний конструкции.

Третья группа – *ударные нагрузки* – нагрузки, действующие в течение короткого промежутка времени.

Приведенная классификация не охватывает всего многообразия динамических нагрузок. Возможны воздействия, имеющие комплексный характер и в перечисленные группы не вписывающиеся.

Расплывчатость границ между отдельными категориями нагрузок порождает пересечение областей применимости расчетных методов, соответствующих воздействиям той или иной группы. Подобные затруднения обычно разрешаются с использованием конкретных условий задачи.

14.2. Учет сил инерции при заданном движении. Простейшие расчеты на динамическое воздействие

14.2.1. Классическая задача о прочности твердого деформируемого тела в условиях динамического воздействия выглядит так. Известны законы движения всех точек тела:

$$u = (x, y, z, t), \quad v = (x, y, z, t), \quad w = (x, y, z, t),$$

где u, v, w – перемещения точки; x, y, z – координаты; t – время.

Принципиальная схема последующих действий ясна:

– двукратным дифференцированием перемещений по времени определяются ускорения точек и зависимость сил инерции от координат и времени;

– устанавливаются зависимости напряжений от тех же переменных;

– методами математического анализа определяется момент времени и координаты опасной точки.

Однако, несмотря на принципиальную ясность, обсуждаемая задача может оказаться чрезмерно громоздкой из-за сложности определения напряжений по силам инерции и трудностей математического анализа.

В практических ситуациях удастся установить законы движения лишь нескольких точек тела, нередко даже одной. Тогда определение сил инерции производится с учетом свойств упругой системы, индивидуальных особенностей объекта на основе приемлемых предпосылок.

Знакомство с таким подходом при решении задач продолжим на конкретных примерах.

Пример 14.1. С помощью троса с ускорением a поднимают груз массой m (рис. 14.1). Найдем силу, растягивающую трос.

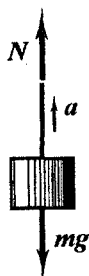


Рис. 14.1

Пренебрегая силами инерции в тросе и возможными вертикальными колебаниями груза в процессе подъема, с помощью принципа Даламбера запишем $N - ma - mg = 0$ (g – ускорение свободного падения). Отсюда $N = m(a + g)$. По найденной силе могут быть вычислены напряжения в тросе и его деформации.

Пример 14.2. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 14.2 а).

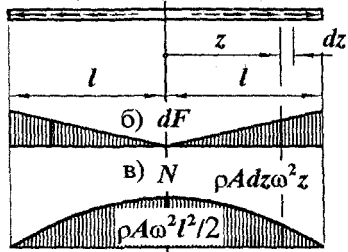


Рис. 14.2

Построим эпюру продольной силы N ; найдем наибольшее нормальное напряжение в стержне.

Сила инерции, действующая на элементарный отрезок стержня, $dF = \rho A dz \omega^2 z$. Здесь ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения. Эпюра сил инерции изображена на рис. 14.2 б.

Продольная сила $N = \int_z^l dF = \int_z^l \rho A z \omega^2 dz = \rho A \omega^2 (l^2 - z^2)/2$. Эпюра продольной силы показана на рис. 14.2 в. Наибольшая сила в сечении на оси вращения.

Напряжения в опасном сечении $\max \sigma_z = \max N/A = \rho \omega^2 l^2/2$.

В аналогичном плане могут быть решены и другие задачи, связанные с напряжениями и деформациями при заданном движении стержня.

14.3. Механическая модель упругой конструкции в задачах динамики.

Коэффициент жесткости системы

14.3.1. Деформируемое тело представляет собой бесчисленное множество материальных точек. Следовательно, деформируемое тело является системой с бесконечным числом степеней свободы. Расчетные уравнения для подобной системы практически нереализуемы. Поэтому в сопротивлении материалов и других дисциплинах, разрабатывающих методы практического расчета реальных конструкций, используются упрощенные модели.

Рассматриваемый объект обычно заменяют системой с конечным числом параметров, определяющих ее деформированное состо-

яние. Для этого выбирают представительные точки и через их перемещения выражают характеристики состояния конструкции. Число степеней свободы такой системы равно сумме степеней свободы представительных точек.

Количество и положения назначаемых точек зависят от поставленной задачи. Мотивы, по которым производят такой выбор, будут описаны ниже.

Не затрагивая пока вопрос о выборе числа степеней свободы и местах представительных точек, познакомимся с процедурой определения параметров механической модели на конкретных примерах.

Пример 14.3. Смоделируем изгибаемую балку (рис. 14.3 а) системой с одной степенью свободы.

Выберем представительную точку посередине пролета. У нее одна степень свободы – возможность вертикального перемещения. Сила, приложенная посередине балки, вызывает прогибы (результаты записаны по формуле (7.26).

$$v_1(z) = Fz(3l^2 - 4z^2)/(48EJ_x) \text{ при } z \leq l/2;$$

$$v_2(z) = F(z(3l^2 - 4z^2) + 8(z - l/2)^3)/(48EJ_x) \text{ при } z \geq l/2.$$

Прогиб под силой $f = v(l/2) = Fl^3/(48EJ_x)$. Отсюда $F = 48EJ_x f/l^3$.

Заменив силу в выражениях прогибов, получаем

$$v(z) = fz(3l^2 - 4z^2)/l^3 \text{ при } z \leq l/2;$$

$$v(z) = f(z(3l^2 - 4z^2) + 8(z - l/2)^3)/l^3 \text{ при } z \geq l/2.$$

Вертикальные перемещения всех точек балки выражены через прогиб в центре.

Внутренние силовые факторы $M_x(z) = EJ_x v''(z)$ и $Q_y(z) = -M_x'(z)$ также могут быть выражены через прогиб f и координату z :

$$M_x(z) = -24EJ_x fz/l^3, \quad Q_y(z) = 24EJ_x f/l^3 \text{ при } z \leq l/2;$$

$$M_x(z) = 24EJ_x f(z - l)/l^3, \quad Q_y(z) = -24EJ_x f/l^3 \text{ при } z \geq l/2.$$

По изгибающему моменту и поперечной силе несложно выразить и напряжения в балке.

Таким образом, геометрический параметр f выбранной механической модели определяет напряженно-деформированное состояние балки. Если он изменяется во времени, то синхронно с ним изменяются напряжения, деформации и перемещения.

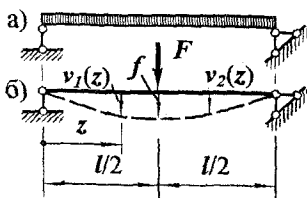


Рис. 14.3

Пример 14.4. Ту же балку (рис. 14.3 а, 14.4 а) смоделируем

системой с двумя степенями свободы.

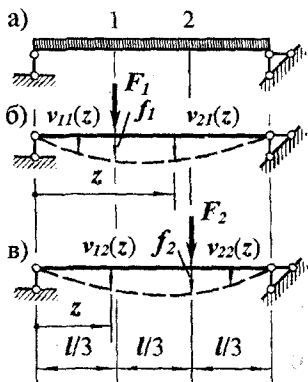


Рис. 14.4

Выберем точки 1 и 2, каждая из которых обладает одной степенью свободы.

Сила F_1 (рис. 14.4 б) вызывает прогибы

$$v_{11}(z) = F_1 z(5l^2 - 9z^2)/(81EJ_x) \text{ при } z \leq l/3;$$

$$v_{21}(z) = F_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3)/(162EJ_x) \text{ при } z \geq l/3.$$

Прогиб $f_1 = v_{11}(l/3) = 4F_1 l^3/(243EJ_x)$. Отсюда $F_1 = 243EJ_x f_1/(4l^3)$. После замены силы в выражениях прогибов имеем

$$v_{11}(z) = 3f_1 z(5l^2 - 9z^2)/(4l^3) \text{ при } z \leq l/3;$$

$$v_{21}(z) = 3f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3)/(8l^3) \text{ при } z \geq l/3.$$

Аналогично находим (рис. 14.4 в)

$$v_{12}(z) = F_2 z(8l^2 - 9z^2)/(162EJ_x) \text{ при } z \leq 2l/3;$$

$$v_{22}(z) = F_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3)/(162EJ_x) \text{ при } z \geq 2l/3;$$

$$f_2 = v_{12}(2l/3) = 4F_2 l^3/(243EJ_x); F_2 = 243EJ_x f_2/(4l^3).$$

После исключения силы F_2

$$v_{12}(z) = 3f_2 z(8l^2 - 9z^2)/(8l^3) \text{ при } z \leq 2l/3;$$

$$v_{22}(z) = 3f_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3)/(8l^3) \text{ при } z \geq 2l/3.$$

Учитывая диапазоны справедливости, из двух групп решений устанавливаем, что прогибы

– на левом участке, где $0 \leq z \leq l/3$,

$$v(z) = v_{11}(z) + v_{12}(z) = 3z(f_1(5l^2 - 9z^2) + f_2(8l^2 - 9z^2)/2)/(4l^3);$$

– на средней трети пролета при $l/3 \leq z \leq 2l/3$

$$v(z) = v_{21}(z) + v_{12}(z) = 3(f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3) + f_2 z(8l^2 - 9z^2))/(8l^3);$$

– на правом отрезке, когда $2l/3 \leq z \leq l$,

$$v(z) = v_{21}(z) + v_{22}(z) = 3(f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3) + f_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3))/(8l^3).$$

При заданных f_1 и f_2 эти выражения однозначно определяют напряженно-деформированное состояние балки.

14.3.2. Если необходимо отразить инерционные свойства конструкции, в выбранные точки системы помещают элементы, обладающие массами. Так, на рис. 14.5 показана механическая модель консольной балки. В ней одна представительная точка. Помещенный же в нее элемент имеет две степени свободы (f и α) и отражает инерционность при вертикальных перемещениях и повороте.

Последовательность выражения характеристик состояния конструкции через параметры перемещений введенного в модель элемента подобна проиллюстрированной в примерах 14.3 и 14.4.

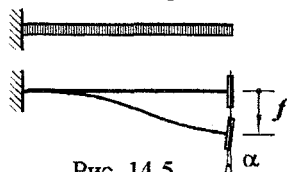


Рис. 14.5

Связь параметров степеней свободы выбранных точек или элементов с перемещениями точек системы устанавливается на основе деформационных свойств конструкции. Обычно (и это проиллюстрировано примерами) принимают, что динамические и статические перемещения геометрически подобны. Это автоматически переходит в подобие эпюр усилий, напряжений, деформаций и перемещений.

14.3.3. Любая точка деформируемой системы не может перемещаться свободно. Ее перемещения сопровождаются изменениями усилий. Сопrotивляемость деформируемой системы перемещениям точки характеризуется *коэффициентом жесткости*.

Коэффициент жесткости представляет собой силу, приходящуюся на единицу перемещения по своему направлению:

$$c = F/f, \quad (14.1)$$

где c – коэффициент жесткости; F – сила; f – перемещение точки приложения силы.

Коэффициент жесткости зависит от

- положения точки;
- направления перемещения;
- вида перемещения (линейное или угловое).

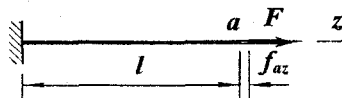


Рис. 14.6

Приведем примеры.

Пример 14.5. Найдем коэффициент горизонтальной жесткости c_{az} на правом конце стержня, изображенного на рис. 14.6.

Горизонтальная сила F вызывает перемещение конца стержня на f_{az} . Но f_{az} равно удлинению Δl . По закону Гука удлинение стержня

$\Delta l = Fl/(EA)$. В итоге $c_{az} = F/f_{az} = F/\Delta l = EA/l$. Размерность коэффициента жесткости – сила/перемещение (например, H/m).

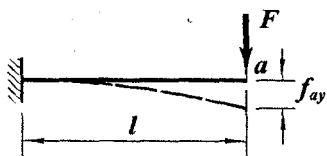


Рис. 14.7

Пример 14.6. Найдем коэффициент жесткости того же стержня (рис. 14.6, 14.7), в той же точке, но в вертикальном направлении – c_{ay} .

Вертикальная сила F вызывает прогиб $f_{ay} = Fl^3/(3EJ_x)$ (см. формулу (7.24)).

Коэффициент поперечной жесткости на конце консольной балки $c_{ay} = F/f_{ay} = 3EJ_x/l^3$.

В конструкциях из линейно упругого материала и малых перемещениях коэффициент жесткости полностью определяется физико-геометрическими параметрами модели (при заданном месте и направлении смещения). Поэтому любую подобную конструкцию независимо от вида нагружения можно рассматривать как условную пружину с заданной жесткостью. Такая абстракция вводит задачи динамики строительных конструкций в круг простых объектов, изучаемых в физике и теоретической механике.

14.4. Колебания упругих систем

Проблема колебаний строительных сооружений является очень важной с практической точки зрения и весьма сложной с теоретических позиций. Нередки случаи, когда конструкция, обладающая большим запасом прочности при статическом воздействии, оказывается непригодной для восприятия периодических сил.

С целью качественного знакомства с реакцией упругой конструкции, выведенной из состояния покоя, рассмотрим ее поведение в режиме движения при разных сопутствующих условиях.

Многие качественные эффекты могут быть обнаружены на простейших моделях конструкции – системах с одной степенью свободы. Не желая усложнять аналитический процесс, ограничимся ими. Естественно, не все особенности могут быть вскрыты такими моделями. Изучение колебаний в последующих спецкурсах дополнит те начальные сведения, которые будут получены ниже.

14.4.1. Свободные колебания

Если упругая конструкция на ограниченном промежутке времени подверглась динамическому воздействию, после чего предоставлена самой себе, в ней возникнут колебания. Колебания, происходящие при отсутствии внешнего силового воздействия, называются свободными или собственными.

Характер движения зависит от многих факторов. Рассмотрим некоторые частные случаи на модели с одной степенью свободы.

14.4.1.1. Свободные колебания без сопротивления движению

Пусть упругая система в ненапряженном состоянии имеет очертание, показанное на рис. 14.8 а. Если на нее положить груз, конструкция сдеформируется и в состоянии равновесия будет иметь вид, изображенный на рис. 14.8 б.

Допустим, что в результате внешнего воздействия система выведена из равновесия и предоставлена самой себе. Выявим вид и характеристики движения тела.

В произвольный момент времени (рис. 14.8 в) на рассматриваемое тело действуют силы (рис. 14.8 г): mg — тяжести; F_{in} — инерции; F_{el} — упругости деформируемой конструкции.

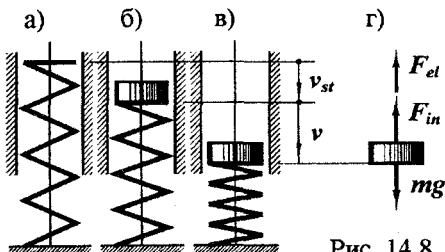


Рис. 14.8

Сила инерции $F_{in} = m\ddot{v}$ (\ddot{v} — вторая производная по времени: $\ddot{v} = d^2v/dt^2$). Сила упругости $F_{el} = c(v_{st} + v)$ (c — коэффициент жесткости системы). Поскольку $F_{in} + F_{el} - mg = 0$, то $m\ddot{v} + c(v_{st} + v) - mg = 0$.

Преобразуем записанное уравнение к канонической форме. Введем обозначение $c/m = \omega^2$, а также учтем, что $cv_{st} = mg$. В итоге приходим к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (14.2)$$

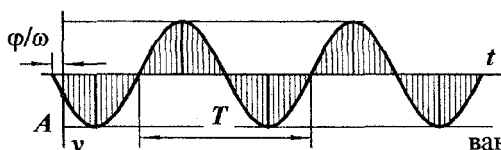
Общее решение этого уравнения $v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$. Если обозначить $C_1/C_2 = \text{ctg} \varphi$, получим

$$v = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (14.3)$$

Выражение (14.3) свидетельствует о том, что при отсутствии

сопротивления упругая система, выведенная из состояния покоя и предоставленная самой себе, будет совершать простые гармонические колебания (рис. 14.9).

Характеристиками этих колебаний являются



- амплитуда A ,
- круговая частота ω ,
- начальная фаза φ .

Постоянные интегрирования A и φ определяются начальными условиями.

Рис. 14.9

Согласно введенному выше обозначению круговая частота

$$\omega = \sqrt{c/m}. \quad (14.4)$$

Период колебаний

$$T = 2\pi/\omega. \quad (14.5)$$

Небезынтересно влияние параметров системы на характеристики колебаний. Формулы (14.4) и (14.5) показывают, что

- с ростом массы тела снижается частота колебаний;
- увеличение жесткости упругой системы повышает частоту.

Противоборствующими факторами, определяющими и поддерживающими колебательное движение, являются силы инерции и силы упругости. В процессе смены их соотношения происходит изменение характера и направления движения.

Пример 14.7. Посередине стальной балки длиной $l = 6$ м из двутавра № 50 закреплен груз массой $m = 14300$ кг (рис. 14.10 а).

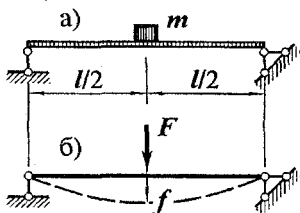


Рис. 14.10

В результате удара он получил начальную скорость $v = 0,7$ м/с.

Пренебрегая массой балки, найдем

- частоту, период и амплитуду свободных колебаний;
- диапазоны изменения прогибов под грузом и $\max \sigma_z$ в балке.

Согласно формуле (7.26 при $b = l/2$)

прогиб под силой $f = Fl^3/(48EJ_x)$. Коэффициент жесткости (14.1)

$$c_y = F/f = 48EJ_x/l^3 = 48 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 39727 \cdot 10^{-8} / 6^3 = 17660 \text{ кН/м.}$$

Круговая частота свободных колебаний (14.4)

$$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{17660/14,3} = 35 \text{ 1/с.}$$

Период колебаний (14.6) $T = 2\pi/\omega = 2 \cdot 3,14/35 = 0,179 \text{ с}$.

Уравнение свободных колебаний (14.4) $v = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Примем за начало отсчета времени тот момент, когда груз получил силовой импульс. В этом случае начальные условия: перемещение $v(0) = 0$; скорость $\dot{v}(0) = 0,7 \text{ м/с}$. Из первого условия следует: $A \sin \varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$.

Скорость движения $\dot{v} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$. Второе условие приводит к равенству $\dot{v}(0) = A\omega$, т.е. $A = \dot{v}(0)/\omega = 0,7/35 = 0,02 \text{ м} = 2 \text{ см}$.

Статический прогиб от груза

$$v_{st} = mg/c = 14300 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} / 17660 = 0,0079 \text{ м} = 0,79 \text{ см}.$$

Таким образом, прогиб будет изменяться в диапазоне

$$v_{st} \mp A - \text{от } 0,79 - 2 = -1,21 \text{ см до } 0,79 + 2 = 2,79 \text{ см}.$$

При статическом действии груза напряжения в среднем сечении $\max \sigma_z^{st} = \max M_x / W_x = mgl / (4W_x) = 140 \cdot 600 / (4 \cdot 1589) = 13,2 \text{ кН/см}^2$.

Поскольку в рассматриваемом варианте теории колебаний одноименные эпюры в статическом и динамическом состояниях подобны и отличающимися лишь масштабным коэффициентом, диапазоны изменения напряжений и прогибов под силой аналогичны.

Если прогибы посередине балки колеблются от

$$v_{st} - A = (1 - A/v_{st}) v_{st} = (1 - 2/0,79) v_{st} = -1,53 v_{st}$$

$$\text{до } v_{st} + A = (1 + A/v_{st}) v_{st} = (1 + 2/0,79) v_{st} = 3,53 v_{st},$$

то и напряжения в рассматриваемых точках будут изменяться от

$$-1,53 \max \sigma_z^{st} = -1,53 \cdot 13,2 = -20,2 \text{ кН/см}^2$$

$$\text{до } 3,53 \max \sigma_z^{st} = 3,53 \cdot 13,2 = 46,6 \text{ кН/см}^2.$$

14.4.1.2. Свободные колебания

при сопротивлении, пропорциональном скорости

На рис. 14.11 а ... в изображена упругая система

- в недеформированном состоянии (рис. 14.11 а);

- в состоянии статического равновесия с телом массой m (рис. 14.11 б);

- в произвольный момент времени (рис. 14.11 в);

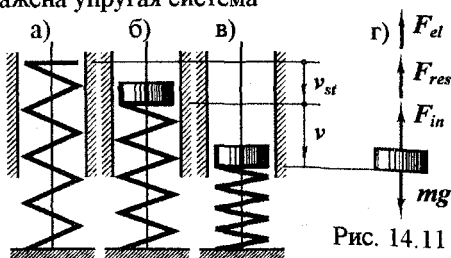


Рис. 14.11

Силы, действующие на движущееся тело в произвольный момент времени показаны на рис. 14.11 г: инерции $F_{in} = m\ddot{v}$, упругости $F_e = c(v_s + v)$ и сопротивления¹ F_{res} , отражающая потери энергии, связанные с внешним и внутренним трением, препятствием среды и т.п. Природа процессов, обуславливающих рассеяние энергии при движении, сложна и не всегда ясна. Обычно силу сопротивления считают пропорциональной скорости движения \dot{v} : $F_{res} = r\dot{v}$ (r – коэффициент сопротивления, имеющий размерность Нс/м).

Условие равновесия $F_{in} + F_{res} + F_{el} - mg = 0$ принимает вид дифференциального уравнения $m\ddot{v} + r\dot{v} + c(v_s + v) - mg = 0$. Обозначив $r/m = 2\alpha$ и $c/m = \omega^2$, а также учитывая равенство $cv_{st} = mg$, приходим к канонической форме

$$\ddot{v} + 2\alpha\dot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (14.6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $Z^2 + 2\alpha Z + \omega^2 = 0$. Корни характеристического уравнения $Z_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Общее решение $v = B_1 e^{Z_1 t} + B_2 e^{Z_2 t}$. (14.7)

Рассмотрим частные случаи, поскольку здесь возможны две качественно различные ситуации: $\alpha < \omega$ и $\alpha \geq \omega$.

Первая ситуация: $\alpha < \omega$ (сила сопротивления мала).

В этом случае решение уравнения (14.6) принимает вид

$$v = e^{-\alpha t} (C_1 \sin \omega_r t + C_2 \cos \omega_r t).$$

После замены постоянных C_1 и C_2 на A_r и φ_r его можно записать так:

$$v = A_r e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_r). \quad (12.8)$$

В рассматриваемом случае

тело также совершает колебания. Но эти колебания затухающие (рис. 14.12). Амплитуда со временем уменьшается. В итоге система практически останавливается в положении статического равновесия.

Круговая частота колебаний

$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (14.9)$$

меньше чем при колебаниях без сопротивления. Период – больше:

$$T_r = 2\pi/\omega_r. \quad (14.10)$$

¹ Индекс от англ. *resistance* – сопротивление.

Факт затухания колебательного процесса определяется множителем $e^{-\alpha t}$ в выражении (14.8). Чем больше α , тем выше скорость уменьшения амплитуд. По этой причине α носит название *коэффициента затухания*.

В литературе по динамике сооружений приведены такие данные: для стальных мостов $\alpha = (0,018 \dots 0,08)\omega_r$; для деревянных $\alpha = (0,022 \dots 0,01)\omega_r$; железобетонных $\alpha = (0,032 \dots 0,016)\omega_r$. При динамических расчетах сооружений на грунтовых основаниях (сейсмостойкость сооружений; вибрацию фундаментов) $\alpha = (0,4 \dots 0,06)\omega_r$. Для большинства строительных конструкций $\alpha < \omega$. Свободные колебания затухают.

Учитывая слабое влияние α на ω_r , в практических расчетах строительных конструкций обычно принимают $\omega_r \approx \omega$, $T_r \approx T$.

Количественной мерой скорости затухания колебаний является отношение отклонений тела в два момента, отличающихся на период: $v(t)/v(t+T) = A_r e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_r) / (A_r e^{-\alpha(t+T)} \sin(\omega_r(t+T) + \varphi_r)) = e^{\alpha T}$.

Отсюда $\ln(v(t)/v(t+T)) = \alpha T$. Обозначим

$$\alpha T = d_{ln}. \quad (14.11)$$

В теории колебаний d_{ln} носит название ¹ *логарифмического декремента затухания*.

Для формирования количественного представления о затухающих колебательных процессах приведем пример.

Пример 14.8. Обратимся к балке, рассмотренной в предыдущем примере 14.7. Определим, как скоро затухнут колебания, возникшие в ней. Логарифмический декремент затухания от рассеяния энергии в балке $d_{ln} = 0,085$. Колебания примем прекратившимися, если амплитуда уменьшилась в 10 раз.

Отношение амплитуд в моменты времени, отличающиеся на период, $A_r(t)/A_r(t+T) = e^{d_{ln}} = e^{0,085} = 1,089$. Через n периодов отношение амплитуд $A_r(t)/A_r(t+nT) = 1,089^n$. Колебания затухнут (в оговоренном выше смысле), если $1,089^n \geq 10$. Отсюда $n > 27$. Приняв период колебаний $T_r = 0,179$ с, находим время возвращения балки к статическому состоянию $nT_r = 27 \cdot 0,179 \approx 5$ с.

¹ От англ. *decrement* – уменьшение.

Вторая ситуация: $\alpha \geq \omega$.

Если силы сопротивления велики, так что $\alpha \geq \omega$, колебания не возникают. Тело, получившее импульс, вначале по инерции отклоняется от исходного положения (участок роста перемещения на рис. 14.13), затем монотонно возвращается обратно под действием сил упругости (асимптотическая ветвь на рисунке).

$$\alpha \geq \omega$$

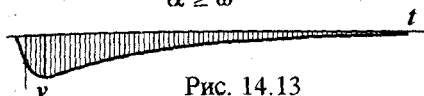


Рис. 14.13

Предпосылка о том, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела, обусловлена возможностью привлечения к количественному анализу простого дифференциального уравнения (14.6). Между тем во многих случаях сопротивление среды весьма неопределенно и многофакторно. Математические сложности, возникающие при уточнении влияния сил сопротивления на характер движения, серьезно затрудняют анализ колебательных процессов. Поэтому практические оценки обычно базируются на полученных выше качественных и количественных соотношениях.

14.4.2. Вынужденные колебания

Колебания, происходящие под действием переменных во времени сил, носят название *вынужденных*.

Рассмотрим поведение упругой конструкции, подверженной переменной во времени силе $F = F(t)$. На рис. 14.14 изображены:

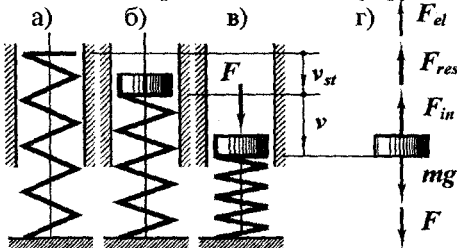


Рис. 14.14

- движущееся тело в произвольный момент t (рис. 14.14 в);
- силы, действующие на тело в это мгновение (г).

Условие динамического равновесия $F + mg - F_{in} - F_{res} - F_{el} = 0$ после преобразований, аналогичных приведенным выше, принимает вид

$$\ddot{v} + 2\alpha\dot{v} + \omega^2 v = F/m. \quad (14.12)$$

Общее решение уравнения (14.12) состоит из двух частей:

$$v = v_{gen} + v_{par}, \quad (14.13)$$

где v_{gen} – общее решение однородного уравнения;

v_{par} – частное решение уравнения (14.12)¹.

Общее решение v_{gen} получено выше. Оно описывает затухающие свободные колебания (14.8). Частное решение v_{par} зависит от вида функции $F = F(t)$. Таким образом, при действии возмущающей силы тело совершает одновременно два движения. Одно из них – собственные колебания, другое определяется характером изменения силы.

Изучение видов движения в при действии переменной силы начнем с наиболее простого и распространенного случая.

14.4.2.1. Колебания при действии гармонической силы

Пусть возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_a \sin \theta t, \quad (a)$$

где F_a – амплитудное значение силы F ;

θ – круговая частота ее изменения.

Частное решение уравнения (14.12) в этом случае имеет вид

$$v_{par} = D_1 \sin \theta t + D_2 \cos \theta t.$$

Постоянные D_1 и D_2 после подстановки v_{par} в уравнение (14.12) и приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях выражаются так:

$$D_1 = F_a(\omega^2 - \theta^2) / (m((\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2));$$

$$D_2 = -2\alpha\theta F_a / (m((\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2)). \quad (б)$$

Введя обозначение $D_2/D_1 = \operatorname{tg} \psi$,

$$D_2/D_1 = \operatorname{tg} \psi, \quad (в)$$

частному решению можно придать вид

$$v_{par} = A_f \sin(\theta t + \psi), \quad (14.14)$$

где амплитуда вынужденных колебаний²

$$A_f = F_a / (m\omega^2 \sqrt{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2/\omega^4}). \quad (г)$$

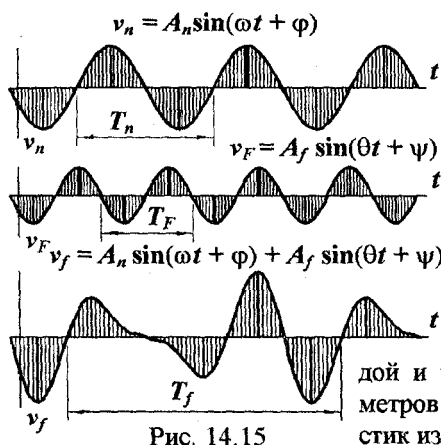
Уравнение движения тела –

$$v = A_e e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_r) + A_f \sin(\theta t + \psi). \quad (14.15)$$

¹ Индексы от англ. *general* – общий, *particular* – частный.

² Индекс от англ. *forced oscillation* – вынужденные колебания.

При действии гармонической возмущающей силы тело совершает периодическое движение, состоящее из



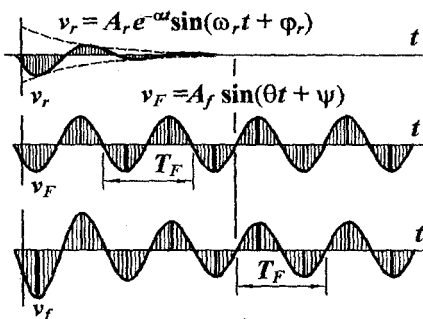
– собственных колебаний с частотой ω_n , амплитудой A_n и начальной фазой φ_n ;

– колебаний с частотой возмущающей силы θ , амплитудой A_f и начальной фазой ψ .

На рис. 14.15 показаны графики колебаний при отсутствии сопротивления. В этом случае колебания незатухающие с постоянными амплитудой и частотой, зависящими от параметров упругой системы и характеристик изменения силы.

Рис. 14.15

Рис. 14.16 иллюстрирует колебания в условиях сопротивления. В процессе движения можно выделить два этапа. Вначале колебания нестабильны: амплитуда переменна – сказываются собственные колебания. Этот этап называют *неустановившимся режимом*



колебаний. По истечении некоторого времени собственные колебания затухают, тело колеблется гармонически с постоянной амплитудой и частотой возмущающей силы – *установившийся режим колебаний*.

Анализ колебательного процесса на неустановившейся стадии связан с исследованием сложной зависимости (14.15). На практике обычно рассматривают стабилизировавшийся процесс, пренебрегая собственными колебаниями.

Движение тела в этом случае описывается выражением (14.14). В дальнейшем ограничимся установившимся режимом.

Рис. 14.16

14.4.2.2. Резонанс при гармоническом воздействии

Сопоставим мгновенные значения силы и перемещения. Из равенств (а) и (14.14) видно, что моменты времени, в которые сила и перемещение достигают наибольших значений, не совпадают. Вынужденные колебания происходят со сдвигом фаз ψ .

По равенствам (б) и (в) находим

$$\operatorname{tg}\psi = D_2/D_1 = -2\alpha\theta/(\omega^2 - \theta^2) = -2(\alpha/\omega)(\theta/\omega)/(1 - (\theta/\omega)^2).$$

Исследуем полученное выражение.

Если сопротивления движению нет ($\alpha = 0$), то при

– $\theta < \omega$ угол $\psi = 0$: сдвига фазы нет – направления силы и перемещения совпадают; одновременно они обращаются в нуль, одновременно достигают экстремальных значений;

– $\theta > \omega$ угол $\psi = -\pi$ – направления силы и перемещения противоположны; одновременно обращаются в нуль, но в тот момент, когда сила достигает наибольшего значения, перемещения перемещение становятся минимальными, и наоборот.

Иллюстрацией отмеченному служит таблица 14.1.

Таблица 14.1

Соотношения мгновенных значений силы и перемещения при отсутствии сопротивления

θ/ω	Фаза θt							
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
< 1								
1								
> 1								

При колебаниях с сопротивлением ($\alpha > 0$) характерны три ситуации:

- первая, $\theta < \omega$ угол $\psi < 0$ – колебания отстают от возмущающей силы; сдвиг фаз менее $\pi/2$;
- вторая, когда $\theta = \omega$, отставание составляет $\pi/2$;
- третья, при $\theta > \omega$ тело не успевает за силой более чем на $\pi/2$.

Таким образом, при наличии сопротивления движению (в реальных конструкциях это всегда так) колеблющееся тело не успевает за силой. Чем выше частота возмущающей силы, тем больше отставание. Зависимость сдвига фаз ψ от отношения частот θ и ω при разных коэффициентах затухания α отражена на рис. 14.17. Колебания с сопротивлением проиллюстрированы также таблицей 14.2.

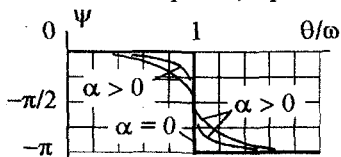


Рис. 14.17

Фазы колебаний ψ от отношения частот θ и ω при разных коэффициентах затухания α отражена на рис. 14.17. Колебания с сопротивлением проиллюстрированы также таблицей 14.2.

Таблица 14.2

Соотношения мгновенных значений силы и перемещения при сопротивлении колебаниям

θ/ω	Фаза θt							
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
< 1								
1								
> 1								

Преобразуем выражение (γ) амплитуды вынужденных колебаний к виду, удобному для практического применения. В этом равенстве $F_d/(m\omega^2) = F_d/c = v_{st}$ – статическое перемещение от F_a . Тогда

$$1/\sqrt{(1-\theta^2/\omega^2)^2+4\alpha^2\theta^2/\omega^4} = k_{din} \quad (14.16)$$

есть *динамический коэффициент*, показывающий, во сколько раз наибольшее перемещений превышает его статическое значение от амплитудного значения возмущающей силы. После введения этого понятия равенство (г) можно записать так:

$$A_f = k_{din} \nu_{st} \quad (14.17)$$

Величина динамического коэффициента зависит от отношений α/ω и θ/ω . Эти зависимости приведены на рис. 14.18. При отсутствии сопротивления ($\alpha = 0$) и равенстве частот свободных и вынужденных колебаний k_{din} обращается в бесконечность. Если $\alpha > 0$ (колебания с сопротивлением), динамический коэффициент ограничен, но в зоне совпадения частот принимает наибольшее значение.

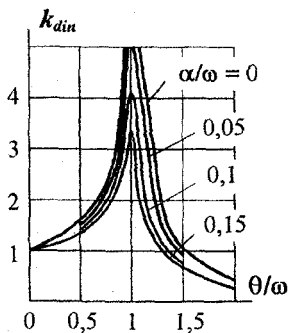


Рис. 14.18

Увеличение амплитуды при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний носит название *резонанса*.

Если в дорезонансном диапазоне динамический коэффициент превышает единицу, то в области $\theta > \omega$ он резко уменьшается. Деформационный эффект действия высокочастотных сил становится практически неощутимым.

Из используемой в теории предпосылки о подобии статических и динамических перемещений, следует подобие эпюр напряжений. Поэтому $\sigma_{din} = k_{din} \sigma_{st}$, где σ_{st} — напряжение от статического действия амплитудной силы.

Пример 14.9. Электродвигатель массой $m = 200$ кг ($2 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{см}$) укреплен на конце консольной балки (рис. 14.19). Его ротор вращается со скоростью $n = 500$ об/мин. При работе двигателя возникает возмущающая сила F ,

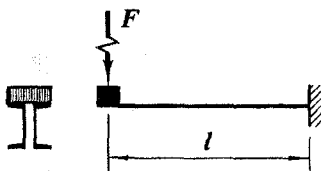


Рис. 14.19

изменяющаяся по гармоническому закону с амплитудным значением $F_a = 600$ Н. Коэффициент сопротивления $r = 8 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}$. Найдём наибольшее нормальное напряжение в балке, если она выполнена из двух швеллеров № 14; длина $l = 1,6$ м. Материал сталь.

Коэффициент поперечной жесткости балки в месте установки двигателя $c_y = 3EJ_x/l^3 = 3 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2.491/160^3 = 14,4 \text{ кН/см}$.

Частота собственных колебаний $\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{14400/2} = 84,8 \text{ 1/с}$.

Частота возмущающей силы $\theta = \pi n/30 = 3,14 \cdot 500/30 = 52,3 \text{ 1/с}$.

Коэффициент затухания $\alpha = r/(2m) = 8/(2 \cdot 2) = 2 \text{ 1/с}$.

Динамический коэффициент $k_{din} = 1/\sqrt{(1-\theta^2/\omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2/\omega^4} = 1/\sqrt{(1-52,3^2/84,8^2)^2 + 4 \cdot 2^2 \cdot 52,3^2/84,8^4} = 1,61$.

Нормальные напряжения $\max \sigma_z = \max M_x/W_x = (mg + k_{din}F_a)/W_x = (2.981 + 1,61 \cdot 600)/160/(2 \cdot 70,2) = 3340 \text{ Н/см}^2 = 3,34 \text{ кН/см}^2$.

14.4.2.3. Колебания в условиях резонанса

Ознакомимся теперь со спецификой колебаний при совпадении частот собственных колебаний и возмущающей силы. При этом рассмотрим самый неблагоприятный случай – колебания без сопротивления ($\alpha = 0$).

Уравнение движения тела без сопротивления имеет вид

$$\ddot{v} + \omega^2 v = (F_a/m) \sin \theta t.$$

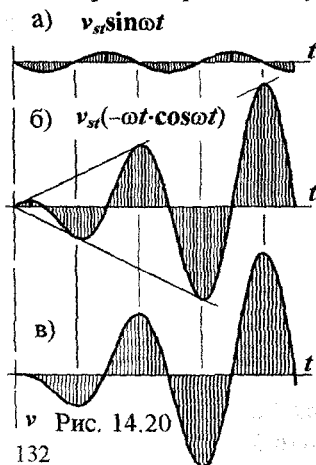
Его общее решение $v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + D_1 \sin \theta t + D_2 \cos \theta t$ с коэффициентами частного решения $D_1 = v_{st}/(1-\theta^2/\omega^2)$ и $D_2 = 0$. Введя начальные условия $v = 0$ и $\dot{v} = 0$ при $t = 0$, запишем его так:

$$v = v_{st}(\sin \theta t - (\theta/\omega) \sin \omega t)/(1-\theta^2/\omega^2).$$

В рассматриваемых условиях резонанса оно представляет собой неопределенность типа $0/0$. Применяя правило Лопитала, получаем

$$v = v_{st}(\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t)/2.$$

Таково уравнение колебаний при резонансе. Первое слагаемое в нем представляет периодическую ограниченную функцию (рис. 14.20 а). Второе – периодическую функцию с амплитудой, возрастающей пропорционально времени (рис. 14.20 б). Таким образом, амплитуда при резонансе растет постепенно. Требуется некоторое время, чтобы “раскачать” систему. График изменения суммарного перемещения показан на рис. 14.20 в.



в Рис. 14.20

В реальных условиях из-за сопротивления движению не происходит неограниченного роста амплитуды. Тем не менее факт увеличения напряжений, деформаций и перемещений при резонансе неоспорим и его необходимо учитывать при расчете конструкций.

Одновременно отметим, что при больших перемещениях становится сомнительной правомерность применения дифференциальных уравнений движения. Сомнительны и сделанные на их основе выводы.

Степень достоверности результатов расчетов конструкции обычно оценивают, анализируя, насколько реальные условия ее работы согласуются с предпосылками примененной теории.

14.4.2.4. Некоторые частные случаи действия возмущающей силы

Рассмотрим три вида непериодического силового воздействия. Во всех случаях будем считать, что коэффициент затухания $\alpha = 0$, а система до приложения нагрузки находилась в состоянии покоя.

Линейный рост силы (рис. 14.21 а).

Сила растет по закону $F = Ft$.

Частное решение уравнения (14.12) имеет

вид $v_{par} = Ft / (m\omega^2) = Ft/c$.

Общее решение: $v = A \sin(\omega t + \varphi) + Ft/c$.

Используя условия: при $t = 0$ начальные

перемещение $v = 0$ и скорость $\dot{v} = 0$, последовательно находим $\varphi = 0$,

$A = -F/(c\omega)$. Итак, $v = (F/c)(t - (\sin\omega t)/\omega)$. График движения тела показан на рис. 14.21 б. Перемещение представляет собой сумму линейно возрастающей статической части Ft/c и синусоидальной динамической добавки с амплитудой $F/(c\omega)$. Из графика движения видно, что полное перемещение (а следовательно, напряжения и деформации) в отдельные моменты времени превышают мгновенные статические значения.

Постоянная внезапно приложенная нагрузка (рис. 14.22 а).

Сила постоянна: $F = F_a$.

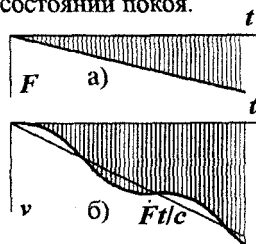


Рис. 14.21

Частное решение уравнения (14.12) — $v_{par} = F_d/(m\omega^2) = F_d/c = v_{st}$

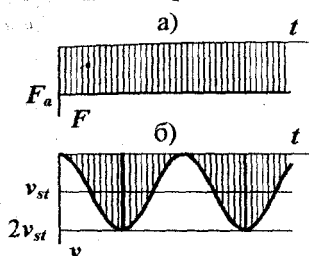


Рис. 14.22

Общее решение $v = A\sin(\omega t + \varphi) + v_{st}$. При оговоренных начальных условиях оно будет иметь вид $v = v_{st}(1 - \cos\omega t)$.

При внезапном приложении силы, остающейся в дальнейшем постоянной, тело совершает гармонические колебания около положения статического равновесия (рис. 14.22 б). Наибольшее перемещение при этом в два раза превышает статическое.

Динамический коэффициент $k_{din} = 2$.

Действие постоянной нагрузки в течение короткого промежутка времени (рис. 14.23 а).

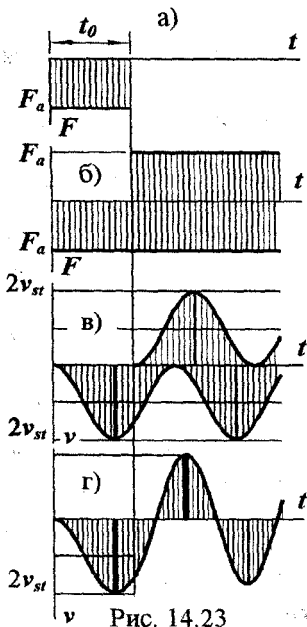


Рис. 14.23

Этот случай можно свести к предыдущему. Представим, что при $t = 0$ к телу внезапно приложена постоянная сила F_a , в дальнейшем остающаяся неизменной. В момент $t = t_0$ на него подействовала такая же сила навстречу первой (рис. 14.23 б). Теперь очевидно, что тело будет участвовать в двух движениях (рис. 14.23 в). Разность их (рис. 14.23 г) и есть зависимость перемещения от времени.

Нетрудно заметить, что величина наибольшего перемещения после разгрузки зависит от продолжительности импульса. Неблагоприятная длительность — полупериод собственных колебаний. При ней динамический коэффициент $k_{din} = 2$.

Рассмотренные частные случаи действия непериодических сил не только дают представление о поведении упругой системы,

но и иллюстрируют методику анализа процессов изменения напряжений, деформаций и перемещений при динамических воздействиях. Используя описанные приемы, можно воспроизвести поведение конструкции при других видах возмущающих сил.

14.5. Ударное воздействие

Под ударом будем понимать внезапное изменение скорости тела, вызванное быстрым изменением сил.

Задача о напряжениях, деформациях и перемещениях, возникающих в упругой конструкции при ударе, может быть решена методами теории колебаний – установлен закон движения тела, найдены моменты времени, когда характеристики напряженно-деформированного состояния достигают экстремумов. Однако в практических расчетах достаточно воспроизвести самое опасное состояние конструкции, не анализируя весь процесс движения. Поэтому в расчетах на удар часто применяют энергетический метод, позволяющий определить максимальные значения динамических сил, а по ним – напряжений, деформаций и перемещений.

Энергетический метод основан на законе сохранения энергии в форме баланса механических ее составляющих.

Метод опирается на следующие предпосылки:

– *удар неупругий*, т.е. соударяемые тела после соприкосновения движутся совместно;

– *контактное взаимодействие упруго*, т.е. энергия пластического деформирования в месте контакта соударяемых тел не учитывается;

– *волны деформаций распространяются мгновенно*, т.е. эпюры статических и динамических перемещений подобны;

– *конструкция испытывает упругие деформации*;

– *силы внутреннего сопротивления и сопротивления среды не учитываются*.

На основе перечисленных предпосылок удастся сформировать достаточно простые методы прогнозирования напряжений, деформаций и перемещений в конструкции, подверженной удару.

14.5.1. Напряжения и деформации в невесомой конструкции при ударе.

Динамический коэффициент

Методику составления уравнения энергетического баланса и способ сведения динамической задачи к задаче статической рассмотрим на примере удара падающего тела по невесомой упругой системе (рис. 14.24).

На рисунке отражены три состояния упругой конструкции:

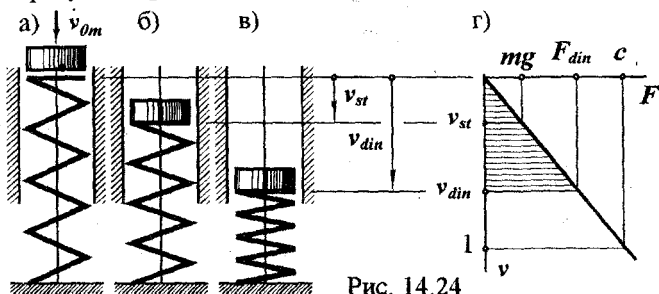


Рис. 14.24

- начальное недеформированное (рис. 14.24 а);
- деформированное при статическом действии тела (рис. 14.24 б);
- при максимальных деформациях после удара (рис. 14.24 в).

В первый момент времени, когда падающее тело коснулось конструкции, но еще не вызвало ее деформаций, механическая энергия равна¹

$$K + P = m\dot{v}_{0m}^2/2 + P.$$

Здесь K – кинетическая энергия ударяющего тела; P – его потенциальная энергия положения (по отношению к некоторому воображаемому уровню); m – масса падающего тела; v_{0m} – скорость тела в момент соударения.

После контакта с упругой системой скорость движения тела уменьшается и в некоторый момент (рис. 14.24 в) достигает нуля – тело на мгновение останавливается перед началом движения вверх. Механическая энергия в этом состоянии

$$P = mg \cdot v_{din} + F_{din} v_{din} / 2,$$

где $P = mg \cdot v_{din}$ – потенциальная энергия положения тела (по отношению к тому же уровню); F_{din} – условная динамическая сила; v_{din} – динамическое перемещение; $F_{din} v_{din} / 2$ – потенциальная энергия деформации упругой конструкции (рис. 14.24 г; ее геометрическим образом является площадь заштрихованного треугольника).

¹ От англ. *kinetic energy* – кинетическая энергия; *potential energy* – потенциальная энергия.

Приравняв значения энергии в рассмотренные моменты времени, приходим к уравнению энергетического баланса

$$mv_{0m}^2/2 + P = P - mgv_{din} + F_{din}v_{din}/2.$$

Введем обозначение $F_{din}/mg = v_{din}/v_{st} = k_{din}$, (14.18) в котором k_{din} — динамический коэффициент; v_{st} — статическое перемещение точки соударения от спокойно лежащего тела.

После несложных алгебраических преобразований условие баланса энергии принимает форму квадратного уравнения относительно динамического коэффициента $k_{din}^2 - 2k_{din} - v_{0m}^2/(gv_{st}) = 0$.

Из него $k_{din} = 1 + \sqrt{1 + v_{0m}^2/(gv_{st})}$ (14.19) (отрицательный корень уравнения отбрасываем).

Теперь задача расчета на ударное воздействие сведена к статической задаче. Например, напряжения при ударе $\sigma_{din} = k_{din}\sigma_{st}$, где σ_{st} — напряжения от статического действия силы, равной весу упавшего тела.

Пример 14.10. На конец двутавровой консольной балки длиной $l = 3$ м падает тело массой $m = 200$ кг с высоты $h = 4$ см (рис. 14.25). Двутавр № 24.

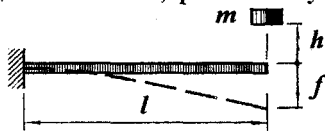


Рис. 14.25

Найдем прогиб на конце и нормальные напряжения от удара.

Квадрат скорости тела $v_{0m}^2 = 2gh$.

Статический прогиб на конце $f_{st} = mgl^3/(3EJ_x) = 200 \cdot 9,81 \cdot 3^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}) = 0,0026$ м = 0,26 см.

Динамический коэффициент

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + v_{0m}^2/(gv_{st})} = 1 + \sqrt{1 + 2hf_{st}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4 / 0,26} = 6,64.$$

Максимальный прогиб на конце балки

$$f_{din} = k_{din}f_{st} = 6,64 \cdot 0,26 = 1,73$$
 см.

Максимальное напряжение от удара $\max \sigma_{din} = k_{din} \cdot \max \sigma_{st} = k_{din} mgl/W_x = 6,64 \cdot 200 \cdot 9,81 \cdot 3 / (289 \cdot 10^{-6}) = 13,5$ кН/см².

14.5.2. Учет массы деформируемой системы при расчете на удар

Нередко в расчетах на удар приходится учитывать массу конструкции. В таких случаях в точку соударения помещают тело массой

m_{red} (рис. 14.26)¹. Оно отражает и инерционные свойства конструкции, которую по-прежнему рассматривают как невесомую. Найдем динамический коэффициент при расчете на удар по этой схеме.

На рис. 14.26 изображены состояния упругой системы:

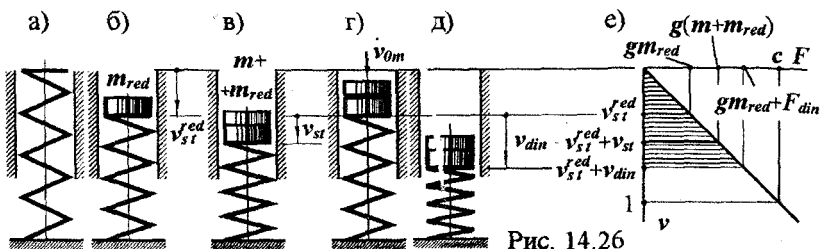


Рис. 14.26

- естественное ненапряженное (рис. 14.26 а);
- статическое деформированное телом, имитирующим массу конструкции (рис. 14.26 б);
- деформированное при статическом действии двух тел - m и m_{red} (рис. 14.26 в);
- в момент соударения (рис. 14.26 г);
- в момент остановки упавшего тела (рис. 14.26 д).

Если падающее тело непосредственно перед соударением имеет скорость v_{0m} , то скорость совместного движения тел можно найти по закону сохранения количества движения:

$$mv_{0m} = (m_{red} + m)v_1,$$

откуда

$$v_1 = mv_{0m} / (m_{red} + m).$$

Механическая энергия при этом равна

$$(m_{red} + m)v_1^2/2 + P + m_{red}gv_{st}^{red}/2,$$

или

$$m^2v_{0m}^2/(2(m_{red} + m)) + P + m_{red}gv_{st}^{red}/2.$$

Последние слагаемые в выражениях энергии - потенциальная энергия деформации упругой конструкции от тела массой m_{red} .

В момент максимальной деформации энергия равна

$$P - (m_{red} + m)gv_{din} + (m_{red}g + F_{din})g(v_{st}^{red} + v_{din})/2.$$

Иллюстрацией к записи последнего слагаемого - потенциальной энергии деформации - служит рис. 14.26 е.

¹ Индекс от англ. *reduction* - приведение; о выборе m_{red} - ниже.

Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\begin{aligned} m^2 v_{0m}^2 / (2(m_{red} + m)) + P + m_{red} g v_{st}^{red} / 2 = \\ = P - (m_{red} + m) g v_{din} + (m_{red} g + F_{din}) g (v_{st}^{red} + v_{din}) / 2. \end{aligned}$$

После преобразований с использованием обозначений (14.18) и соотношения $F_{din} / v_{din} = m_{red} g / v_{st}^{red}$ (см. рис. 14.26 е) приходим к квадратному уравнению $k_{din}^2 - 2k_{din} - m v_{0m}^2 / (v_{st} (m_{red} + m) g) = 0$.

Из него
$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + m v_{0m}^2 / (v_{st} (m_{red} + m) g)}. \quad (14.20)$$

Сопоставление результатов (14.19) и (14.20) показывает, что учет массы деформируемой конструкции приводит к меньшему значению динамического коэффициента.

Из тех же формул видно, что динамический коэффициент всегда больше единицы. В частном случае, когда $v_{0m}^2 = 0$, $k_{din} = 2$. Это соответствует внезапному приложению постоянной нагрузки, рассмотренному выше, и полностью согласуется с результатом, полученным методами теории колебаний.

Эффект ударного воздействия в значительной мере зависит от жесткости конструкции. Чем она жестче (меньше v_{st}), тем больше k_{din} . Так, статические напряжения в гладком стержне, изображенном на рис. 14.27 а, и опасном сечении стержня с местной выточкой (рис. 14.27 б) одинаковы. Динамические же напряжения во втором случае (рис. 14.27 б) будут больше, так как у него меньше статическое перемещение от веса падающего тела.

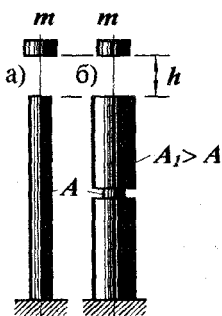


Рис. 14.27

Другой пример (рис. 14.28). Груз, падающий в точку *a* балки, вызовет большие динамические напряжения нежели такой же груз, падающий с такой же высоты, но в точку *b*. Это объясняется тем что

– коэффициент жесткости балки в точке *a* – c_a в 8 раз больше чем c_b (прогиб пропорционален кубу расстояния от точки до защемления);

– статические напряжения в первом случае (удар в точке *a*) всего в два раза меньше чем во втором.

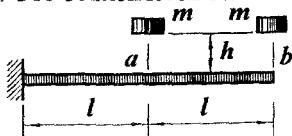


Рис. 14.28

Благодаря простоте, энергетический метод удобен для практических расчетов на удар. Однако точность результатов при этом невысока. Формулы (14.19) и (14.20) дают представление о количественном порядке напряжений, деформаций и перемещений при ударе. Попытки уточнить результаты на расчетных схемах, полнее отражающих динамические свойства конструкции и процесса соударения, приводят к большим трудностям. Невозможно элементарными средствами выявить напряженно-деформированное состояние в зоне контакта и характер изменения его во времени; большие затруднения возникают при учете волнового процесса распространения напряжений и деформаций; трудно поддается анализу и описанию рассеяние энергии при ударе. Поэтому на практике изложенные методы нашли широкое применение. Используя их, следует иметь в виду данный критический анализ.

14.5.3. Понятие о коэффициенте приведения массы

Как было отмечено выше, учет инерционных свойств упругой конструкции воспроизводится введением в место удара элемента, обладающего массой. Естественно возникает вопрос о критерии соответствия точечной массы и массы конструкции. Вообще говоря, такой критерий выбирают в зависимости от поставленной задачи и предпосылок, в рамках которых она решается. Распространенным и часто используемым является эквивалент по кинетической энергии, иногда — по количеству движения. Не исключено использование и других эквивалентов. Возможно применение разных критериев на разных этапах одной задачи.

В тех механических моделях, где инерционные свойства упругой конструкции отображены одним весомым элементом, его масса m_{red} определяется по формуле,

$$m_{red} = k_{red} m_{str},$$

где k_{red} — коэффициент приведения массы;

m_{str} — масса конструкции.

Численное значение коэффициента определяется выбранным критерием отображения.

Методику определения коэффициента приведения массы проиллюстрируем примерами.

Пример 14.11. Допустим, что при расчете на растягивающий удар (рис. 14.29) потребовалось учесть массу стержня. Место удара – нижний конец. Найдем коэффициент приведения массы к точке удара. В качестве критерия примем кинетическую энергию.

Представим стержень, изображенный на рис. 14.29 а, невесомой моделью с точечной массой на нижнем конце (рис. 14.29 б).

От вертикальной силы F , приложенной на свободной конце, перемещение произвольного сечения $w = Fz / (EA)$, а конца стержня $f = Fl / (EA)$.

Отсюда $w = fz/l$. Скорости движения $\dot{w} = fz/l$.

Кинетическая энергия стержня

$$K_{str} = \int_0^l \rho A (\dot{w})^2 dz / 2 = \int_0^l \rho A (fz/l)^2 dz / 2 = \\ = \rho A l (f)^2 / 6 = m_{str} (f)^2 / 6.$$

Точечная масса, двигаясь по тому же закону, что и конец стержня обладает кинетической энергией $K_m = m_{red} (f)^2 / 2 = k_{red} m_{str} (f)^2 / 2$. Из равенства энергий движения $K_{str} = K_m$ находим коэффициент приведения массы $k_{red} = 1/3$.

Пример 14.12. Найдем коэффициент приведения массы к концу балки, подверженной удару на свободном конце (рис. 14.30). Критерий тот же – кинетическая энергия.

От силы F , приложенной на конце, (см. пример 7.9)

$$v = F(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3) / (EJ_x); \quad f = Fl^3 / (3EJ_x).$$

Из этих равенств $v = 3f(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3) / l^3$. Скорость движения точек

оси балки $\dot{v} = 3f(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3) / l^3$. Кинетическая энергия

$$K_{str} = \int_0^l \rho A (\dot{v})^2 dz / 2 = \int_0^l \rho A (3f(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3) / l^3)^2 dz / 2 = 33 m_{str} (f)^2 / 280.$$

У точечной массы $K_m = m_{red} (f)^2 / 2 = k_{red} m_{str} (f)^2 / 2$. Из равенства кинетических энергий следует, что $k_{red} = 33/140$.

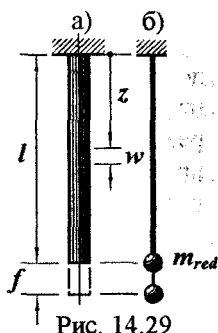


Рис. 14.29

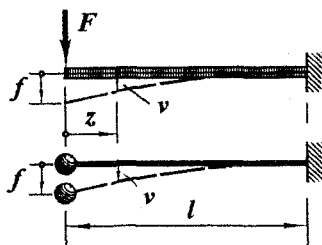


Рис. 14.30

Продемонстрированные примеры показывают, что коэффициент приведения массы зависит от

- точки удара;
- направления движения ударяющего тела;
- критерия эквивалентности.

Овладев техникой вычисления коэффициента k_{red} , можно в каждом конкретном случае, используя дополнительные данные анализируемой ситуации, обоснованно назначить критерий приведения, определить числовое значение коэффициента и дать количественный прогноз результата ударного воздействия нагрузки. Известны случаи, когда такой прогноз приходилось давать, просчитывая конструкцию с разными критериями приведения, – анализируя процесс с разных позиций.

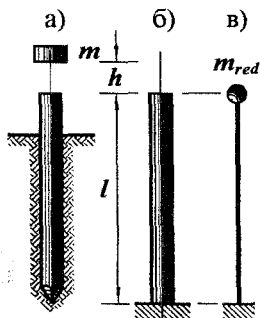


Рис. 14.31

Пример 14.13. Сосновую сваю длиной $l = 6$ м и диаметром $d = 24$ см забивают копровым молотом массой $m = 300$ кг, падающим с высоты $h = 0,5$ м (рис. 14.31 а). Расчетное сопротивление сосны на сжатие $R = 13$ МПа; плотность древесины $\rho = 800$ кг/м³. Проверим сваю на прочность.

Примем простейшую расчетную схему (рис. 14.31 б), полагая, что при ударе нижний конец не смещается (окончание процесса забивания), и пренебрегая трением грунта по боковой поверхности сваи (это предположение вносит ошибку, увеличивающую напряжения). В расчете учтем массу сваи. Механическая модель изображена на рис. 14.31 в.

Статические сжимающие напряжения в свае: $\sigma_{st} = N/A$.

$$N = mg = 300 \cdot 9,81 = 2943 \text{ Н. } A = (\pi d^2/4) = 3,14 \cdot 0,24^2/4 = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

$$\sigma_{st} = 2943/(4,52 \cdot 10^{-2}) = 6,51 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,0651 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент (14.20)

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + m v_{0m}^2 / (v_{st}(m_{red} + m)g)}.$$

Вычислим входящие в него:

– скорость молота перед ударом $v_{0m} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5} = 3,13$ м/с.

– статическое перемещение –

$$v_{st} = \Delta l = Nl/(EA) = 2943 \cdot 6 / (10^{10} \cdot 4,52 \cdot 10^{-2}) = 3,91 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0391 \text{ мм.}$$

– приведенную массу –

$$m_{red} = k_{red} m_{str} = k_{red} \rho A l = 0,333 \cdot 800 \cdot 4,52 \cdot 10^{-2} \cdot 6 = 72,3 \text{ кг.}$$

Теперь $k_{din} = 1 + \sqrt{1 + 300 (3,13)^2 / (3,91 \cdot 10^{-5} (72,3 + 300) 9,81)} = 145$.

Динамические напряжения

$$\sigma_{din} = \sigma_{st} \cdot k_{din} = 0,0651 \cdot 145 = 9,41 \text{ МПа.}$$

Напряжения меньше расчетного сопротивления, разрушения сваи в процессе ее забивания не произойдет (в примере оценено состояние ствола сваи, головка не рассматривалась; сделанный вывод, естественно, этим и ограничивается).

14.6. Прочность материалов

при циклически изменяющихся напряжениях

Многие сооружения, элементы строительных конструкций и машин подвержены циклически изменяющимся напряжениям. Это

– высотные сооружения типа башен, труб, мачт, антенн, подверженных ветровым нагрузкам;

– авто- и железнодорожные мосты, подкрановые балки, элементы погрузочно-разгрузочных эстакад, воспринимающих воздействия подвижных составов;

– движущиеся элементы подъемно-транспортных и строительных машин и т.д.

Прочность таких конструкций не может быть оценена методами статического расчета. Для них требуются специальные экспериментальные исследования и методы расчетов.

14.6.1. Понятие об усталостном разрушении

Конструкции, подверженные циклическим нагрузкам, разрушаются, как правило, при напряжениях, меньших тех, которые способны выдерживать от статического воздействия. Специфичен и характер разрушения:

– отсутствие остаточных деформаций;

– на поверхности излома обычно две области – постепенно развивающейся трещины и мгновенного хрупкого отрыва.

Первые исследователи этого явления предполагали, что под действием циклических напряжений в материале происходят физико-механические изменения он – “устает”. Хотя в последующем такое толкование процесса опровергнуто, этот термин укоренился в

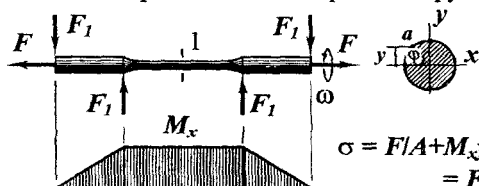
практике. Под усталостью материала в настоящее время понимают процесс накопления повреждений при циклических напряжениях, заканчивающийся хрупким разрушением.

Способность материала воспринимать переменные напряжения, не разрушаясь, носит название выносливости.

Для количественного прогнозирования поведения элементов конструкций в рассматриваемых условиях необходимо ввести новые характеристики воздействия и прочности материалов.

14.6.2. Основные виды и характеристики циклов напряжений

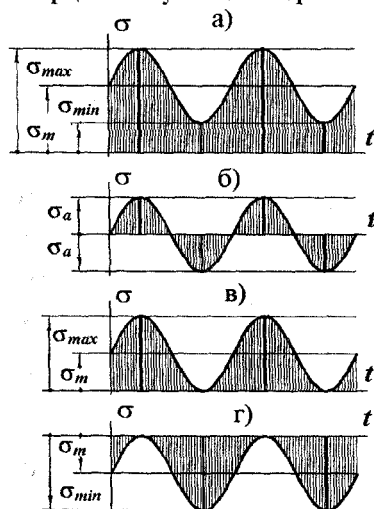
Если вращающийся образец с круглым сечением рабочей части



нагрузить, как показано на рис. 14.32, напряжение в точке *a* сечения 1 будет изменяться:

$$\sigma = F/A + M_x y / J_x = F/A + M_x d \cdot \sin\phi / (2J_x) = F/A + M_x d \cdot \sin\omega t / (2J_x)$$

Рис. 14.32 (*d* – диаметр сечения, *J* – осевой момент инерции ω – угловая скорость вращения образца).



Изменение напряжения за один период называется **циклом напряжений**. График зависимости напряжения от времени показан на рис. 14.33 а. Экстремальные значения напряжений равны

$$\sigma_{max} = F/A + M_x d / (2J_x),$$

$$\sigma_{min} = F/A - M_x d / (2J_x).$$

Они являются количественными характеристиками цикла.

Среднее напряжение и амплитуда цикла соответственно равны

$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2,$$

$$\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2. \quad (14.21)$$

В зависимости от отношения

$$\sigma_{min} / \sigma_{max} = r_{as}, \quad (14.22)$$

которое носит название **коэффициента асимметрии цикла**, циклы

Рис. 14.33

делят на знакопостоянные ($r_{as} > 0$) и знакопеременные ($r_{as} < 0$). Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии называют *подобными*.

Если $r_{as} = -1$, цикл называется *симметричным* (рис. 14.33 б), в противном случае *асимметричным*.

Частными видами асимметричных циклов являются такие, у которых $r_{as} = 0$ при $\sigma_{min} = 0$ или $1/r_{as} = 0$ при $\sigma_{max} = 0$. Они называются *отнулевыми* или *пульсационными*). Графики отнулевых циклов показаны на рис. 14.33 в, г.

Принято считать, что усталостная прочность не зависит от закона изменения напряжения во времени и частоты цикла. В таком случае для оценки выносливости конструкции достаточно характеризовать цикл напряжений лишь двумя величинами — σ_{max} и σ_{min} или σ_m и σ_a .

Перейдем к количественным характеристикам выносливости материала и конструкции.

14.6.3. Понятие о пределе выносливости

Определение механических характеристик выносливости материала производят на специальных машинах и вращающихся образцах, подобных изображенному на рис. 14.32. Варируя силами F и F_1 , задают различные значения σ_{max} и σ_{min} и определяют количество циклов N до разрушения. Наконец, устанавливают такие значения σ_{max} и σ_{min} , при которых разрушение не происходит при любом N . Количественной характеристикой усталостной прочности является *предел усталости*, или *предел выносливости*.

Пределом выносливости называют наибольшее σ_{max} (или σ_{min} , если оно по величине превышает σ_{max}), которое образец выдерживает неограниченное число циклов.

Обозначают предел выносливости σ_r , где r — коэффициент асимметрии цикла. При этом указывают численное значение r . Частные случаи обозначений предела выносливости:

- σ_{-1} — при симметричном цикле;
- σ_0 — при отнулевом.

График, показывающий связь числа циклов до разрушения с максимальным напряжением носит название *кривой выносливости*

(кривой усталости; диаграммы Велера¹). Кривая усталости для симметричного цикла показана на рис. 14.34.

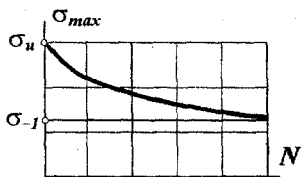


Рис. 14.34

У большинства черных металлов кривая выносливости асимптотически приближается к горизонтали. Поэтому для них термин “предел выносливости” имеет безусловный смысл. У цветных металлов и закаленных до высокой твердости сталей такого предела нет. В подобных случаях вводят понятие *условного предела выносливости* – напряжения, которое образец может воспринимать в течение 10^8 циклов.

14.6.4. Диаграмма усталостной прочности. Запас выносливости образца

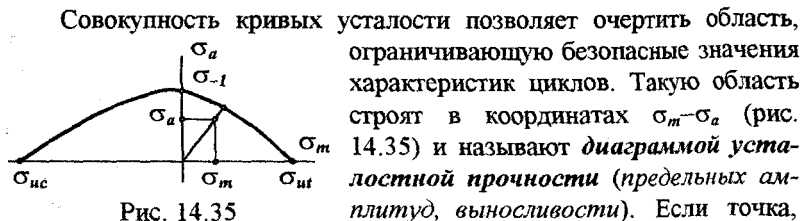


Рис. 14.35

Совокупность кривых усталости позволяет очертить область, ограничивающую безопасные значения характеристик циклов. Такую область строят в координатах σ_m – σ_a (рис. 14.35) и называют *диаграммой усталостной прочности (предельных амплитуд, выносливости)*. Если точка, соответствующая некоторому циклу напряжений со средним напряжением σ_m и амплитудой σ_a , располагается внутри диаграммы, усталостного разрушения не произойдет. Близость отображающей точки к границе характеризует степень опасности цикла.

Построение диаграммы усталостной прочности требует многочисленных и длительных испытаний. Поэтому на практике используют приближенные ее варианты. Широкое применение получила диаграмма (рис. 14.36), построенная по трем точкам, соответствующим пределам выносливости при симметричном (точка *c*) и отнулевом (точка *d*) циклах, а также статическому разрушению (точка *g*).

Через точки *c*, *d* и *g* проводят прямые *c(df)*, *gf* под 45° к оси абсцисс до пересечения. Уравнения прямых:

$$-cf: \sigma_{ua} = \sigma_{-1} + (1 - 2 \sigma_{-1} / \sigma_0) \sigma_{um}; \quad (14.23)$$

¹ Велер (1819–1914) – немецкий ученый и инженер, с работ которого началось экспериментальное изучение усталости материалов.

$$-fg: \quad \sigma_{ua} = \sigma_{ut} - \sigma_{um}. \quad (14.24)$$

В формулах (14.23) и (14.24) σ_{ua} и σ_{um} — предельные значения амплитуды и среднего напряжения.

Если образец подвержен циклическому напряжению с σ_m и σ_a , характеризуемому точкой h , степень безопасности нагружения может быть оценена отношением отрезков Oe/Oh . Это отношение носит название *коэффициента запаса выносливости образца*.

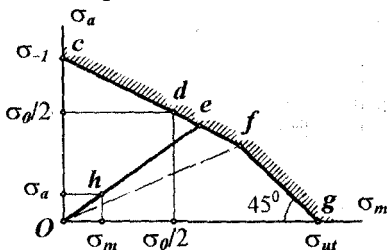


Рис. 14.36

Обозначим его n_{es} . Он показывает, во сколько раз характеристики подобного предельного цикла выше чем у заданного.

Когда отображающая точка h лежит выше прямой Of , определяющей границей является прямая cf . Коэффициент запаса выносливости по равенству (14.33) $n_{es}\sigma_a = \sigma_{-1} + (1 - 2\sigma_{-1}/\sigma_\theta)n_{es}\sigma_m$ равен

$$n_{es} = \sigma_{-1} / (\sigma_a - (1 - 2\sigma_{-1}/\sigma_\theta)\sigma_m). \quad (14.35)$$

Когда ниже, — по равенству (14.34)

$$n_{es} = \sigma_{ut} / (\sigma_a + \sigma_m). \quad (14.36)$$

Действительным является меньший из этих двух значений. Методика определения коэффициента запаса образца проиллюстрирована для положительного (растягивающего) среднего напряжения цикла. Если оно сжимающее, вычисление n_{es} аналогично описанному.

Элемент реальной конструкции, подверженный циклическому напряжению, обладает обычно меньшим запасом выносливости чем образец. Рассмотрим эту сторону обсуждаемого воздействия.

14.6.5. Основные факторы, влияющие на предел выносливости

Предел выносливости зависит от многих геометрических, технологических и других особенностей конструктивного элемента. Остановимся на наиболее важных из них: концентрации напряжений, качестве поверхности, абсолютных размерах.

Влияние концентрации напряжений

Усталостные трещины развиваются, как правило, в местах концентрации напряжений. Влияние этой особенности оценивают коэффициентом чувствительности q . Он зависит от механических

характеристик материала и *теоретического коэффициента концентрации* α_σ . Чем выше предел прочности σ_u , тем больше коэффициент чувствительности. У высокопрочных сталей $q \approx 1$, у углеродистых $q \approx 0,6 \dots 0,8$. У чугуна $q \approx 0$. Графики зависимости коэффициента чувствительности от предела прочности при разных значениях теоретического коэффициента концентрации приведены на рис. 14.37.

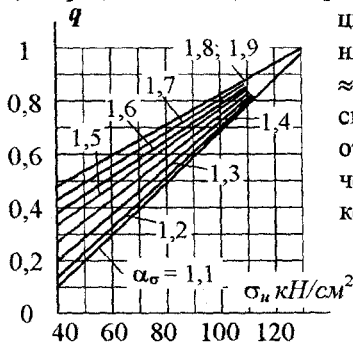


Рис. 14.37

В расчетах на выносливость фигурирует так называемый *эффективный коэффициент концентрации*

$$k_\sigma = 1 + q \cdot (\alpha_\sigma - 1), \quad (14.27)$$

снижающий эффект концентрации за

счет реальных свойств материала.

Влияние качества поверхности детали

Качество поверхности детали сильно влияет на предел выносливости. Степень влияния чистоты поверхности зависит от прочности материала. Иллюстрацией отмеченного служит рис. 14.38. Если принять за 100 % предел выносливости образца с полированной поверхностью (прямая 1), то при более грубой обработке усталостная прочность будет ниже. Степень снижения усиливается с ростом предела прочности.

Кривые относятся к поверхностям:

- 2 — шлифованной;
- 3 — обработанной резцом;
- 4 — имеющей насечку;
- 5 — полученной при прокатке;
- 6 и 7 — корродированным соответственно в обычной и морской воде.

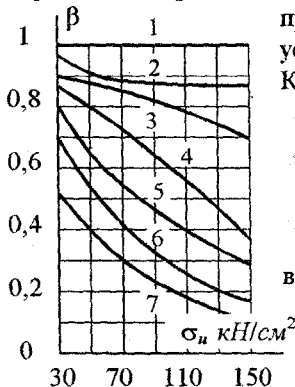
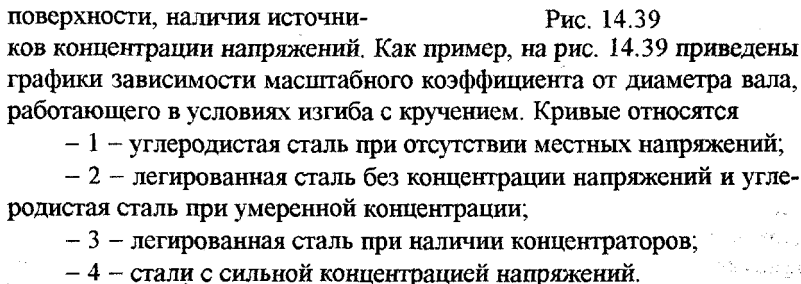


Рис. 14.38

Считают, что на грубой поверхности больше дополнительных концентраторов напряжений. Поэтому поверхности ответственных конструкций тщательно обрабатывают. В расчетах на выносливость качество поверхности оценивают *коэффициентом поверхностной чувствительности* β .

Влияние абсолютных размеров детали

Размеры детали также являются важным фактором, влияющим на предел выносливости. В расчетах он представлен *масштабным коэффициентом* α_m . Числовое значение коэффициента α_m зависит не только от размеров детали, но и от материала, качества обработки поверхности, наличия источников концентрации напряжений. Как пример, на рис. 14.39 приведены графики зависимости масштабного коэффициента от диаметра вала, работающего в условиях изгиба с кручением. Кривые относятся



14.6.6. Расчет на прочность при циклических напряжениях

Условие прочности при переменных напряжениях требует, чтобы *фактический коэффициент запаса выносливости* был не менее допускаемого:

$$n_{es} = [n_{es}]. \quad (14.28)$$

Фактический коэффициент определяют по коэффициенту запаса образца, внося в него коррективы, учитывающие

- концентрацию напряжений,
- чистоту поверхности,
- размеры детали.

Поправочные коэффициенты вносят в амплитудную часть цикла напряжений. С учетом названных поправок формулы фактического коэффициента запаса выносливости имеют вид

$$n_{es} = \sigma_{-1} / (k_{\sigma} \sigma_a / (\beta \alpha_m) - (1 - 2\sigma_{-1} / \sigma_0) \cdot \sigma_m)$$

или

$$n_{es} = \sigma_{ut} / (k_{\sigma} \sigma_a / (\beta \alpha_m) + \sigma_m). \quad (14.29)$$

Как и прежде, действителен меньший коэффициент запаса.

Формулы (14.29), строго говоря, справедливы для одноосного напряженного состояния. Их можно обобщить на чистый сдвиг — простой вид напряженного состояния, легко реализуемый в лабораторных условиях. При сложном напряженном состоянии оценка запаса выносливости оказывается весьма сложной. В настоящее время для практических расчетов при плоском напряженном состоянии используют формулу перехода

$$n_{es} = n_{es\sigma} n_{es\tau} / \sqrt{n_{es\sigma}^2 + n_{es\tau}^2}, \quad (14.30)$$

где n_{es} — искомый коэффициент запаса выносливости; $n_{es\sigma}$ — коэффициент запаса при одноосном напряженном состоянии; $n_{es\tau}$ — то же при чистом сдвиге.

Попытку теоретического разрешения проблемы прочности материалов и конструкций при циклических напряжениях в настоящее время нельзя считать завершенной. Механизмы усталостного разрушения определяются особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Фундаментальные гипотезы сопротивления материалов, в частности, предпосылка о непрерывности не способны вскрыть эти особенности. Привлечение аппарата физики твердого тела также оставляет некоторые вопросы усталости нерешенными. Поэтому приходится идти по пути накопления экспериментальных результатов, введения эмпирических поправок. Отсутствие стройной теории делает производимые расчеты весьма приближенными, требующими внимательного и критического осмысления в каждом конкретном случае.

15. Основы безмоментной теории тонких осесимметрично нагруженных оболочек вращения

Тело, два размера которого одного порядка (H и D на рис. 15.1) и значительно больше третьего (h), называется *оболочкой*. Оболочка – распространенный элемент зданий и сооружений, нередко самостоятельный строительный объект (покрытия, емкости для хранения жидких, газообразных или сыпучих материалов, трубопроводы и т.п.). По этой причине расчет оболочек представляет не только теоретический, но и практический интерес.

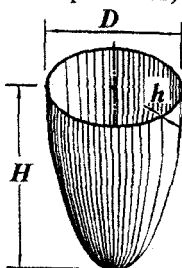


Рис. 15.1

15.1. Основные геометрические понятия

Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединой поверхностью*. У оболочки вращения срединная поверхность является поверхностью вращения (рис. 15.2).

Линия пересечения плоскости, проходящей через ось оболочки, со срединной поверхностью называется *меридианом* или *образующей* (1).

Линия пересечения плоскости, перпендикулярной оси оболочки, со срединной поверхностью носит название *параллели*. Она ограничивает *параллельный круг* (2) радиусом r .

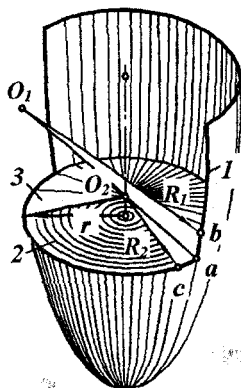


Рис. 15.2

Радиус кривизны меридиана называют *первым главным радиусом* (O_1a), он обозначен R_1 . *Второй главный радиус* кривизны срединной поверхности (O_2a) обозначен R_2 .

Оболочку считают тонкой, если $h/R_1 \leq 0,05$; $h/R_2 \leq 0,05$.

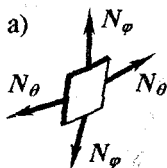
Сечение оболочки конической поверхностью, вершина которой находится на оси вращения, а образующие перпендикулярны срединной поверхности, называется *нормальным коническим сечением*. Нормальное коническое сечение в теории оболочек играет такую же роль, как поперечное сечение в теории стержней.

Подобно тому, как стержень задается осью и поперечным сечением, оболочка – срединной поверхностью и толщиной стенки.

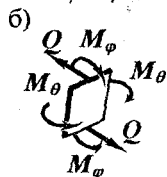
15.2. Исходные предпосылки.

Виды напряженных состояний оболочек

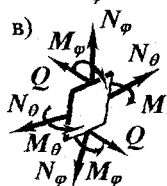
Техническая теория тонких оболочек опирается на две фундаментальные предпосылки:



– справедлива гипотеза о неизменности нормали (отрезки, прямые и перпендикулярные срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и перпендикулярными срединной поверхности после деформации);



– справедлива гипотеза о ненадавливании слоев (между слоями, параллельными срединной поверхности, нормальные напряжения не возникают).



Гипотезы о неизменности нормали и ненадавливании слоев в теории оболочек – аналог гипотез плоских сечений и ненадавливании волокон в теории стержней.

К исходным предпосылкам можно отнести и вид напряженного состояния, в котором находится оболочка. Различают три вида напряженных состояний:

– безмоментное (рис. 15.3 а), когда напряжениями от изгибающих моментов можно пренебречь по сравнению с напряжениями от растяжения (сжатия);

– моментное (рис. 15.3 б), при котором преобладают изгибные напряжения;

– смешанное (рис. 15.3 в), если и те, и другие напряжения одного порядка.

Рис. 15.3

Существенно, что вид напряженного состояния в теории оболочек введен в разряд предпосылок, а не является результатом исследования. Это объясняется чрезмерной громоздкостью теории, построенной на общих предпосылках. Следствием такого методического построения теории является необходимость определения области ее корректности.

15.3. Усилия в оболочке по безмоментной теории

Рассмотрим тонкую оболочку (рис. 15.1, 15.2) под осесимметричной нагрузкой. Напряжения и деформации в этом случае также осесимметричны – все меридиональные сечения находятся в одинаковых условиях. Допустим, что напряженное состояние оболочки – безмоментное: нормальные напряжения равномерно распределены по толщине стенки.

Отделим нормальным коническим сечением часть оболочки (рис. 15.4). На нее действуют равнодействующая внешней нагрузки Z и меридиональные силы N_φ (размерность N_φ сила/длина). Проецируя силы на ось вращения, имеем $2\pi r N_\varphi \sin\varphi - Z = 0$. Отсюда

$$N_\varphi = Z / (2\pi r \sin\varphi).$$

Учитывая, что $r = R_2 \sin\varphi$, получаем

$$N_\varphi = Z / (2\pi R_2 \sin^2\varphi). \quad (15.1)$$

Это уравнение называют уравнением равновесия зоны.

Определение равнодействующей Z обычно не составляет больших трудностей. Тем не менее в общем случае ее можно найти так (рис. 15.5):

$$Z = \int_0^\varphi (p \cdot \cos\psi - t \cdot \sin\psi) (R_1 d\psi) (2\pi R_2 \sin\psi).$$

В упорядоченном виде

$$Z = 2\pi \int_0^\varphi (p \cdot \cos\psi - t \cdot \sin\psi) R_1 R_2 \sin\psi d\psi. \quad (15.2)$$

Еще раз подчеркнем, что в конкретных задачах несложно выполнить операции, положенные в основу получения равенств (15.1) и (15.2). Поэтому не следует рассматривать их, как формулы.

Полезнее из вывода усвоить способ определения сил N_φ .

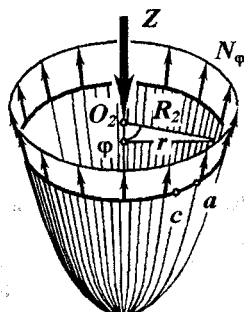


Рис. 15.4

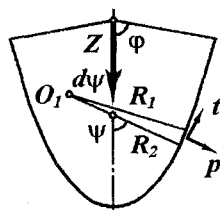


Рис. 15.5

Рассмотрим теперь равновесие бесконечно малого элемента оболочки, выделенного двумя парами радиальных плоскостей и нормальных конических сечений (рис. 15.6). На него действуют меридиональные и окружные силы с интенсивностями N_φ и N_θ , а также внешняя нагрузка, заданная компонентами p и t (размерностями сила/площадь). Спроецируем силы на направление p : $p(R_1 d\varphi)(R_2 d\theta) - 2N_\theta \sin(d\theta/2)(R_1 d\varphi) - N_\varphi \sin(d\varphi/2)(R_2 d\theta) - (N_\varphi + dN_\varphi) \sin(d\varphi/2)(R_2 d\theta) = 0$. После упрощений (приведения подобных членов, приравнивания малого угла его синусу, отбрасывания пренебрежимо малых слагаемых и деления на произведение $R_1 R_2$)

условие равновесия принимает вид

$$N_\varphi/R_1 + N_\theta/R_2 = p. \quad (15.3)$$

Это – уравнение Лапласа.

Уравнения (15.1) ... (15.3) позволяют найти усилия в сечениях оболочки.

При равномерном распределении по толщине стенки нормальные напряжения

$$\sigma_\varphi = N_\varphi/h, \quad \sigma_\theta = N_\theta/h. \quad (15.4)$$

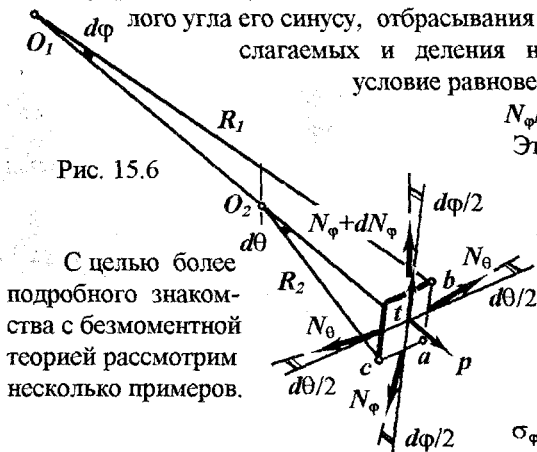


Рис. 15.6

С целью более подробного знакомства с безмоментной теорией рассмотрим несколько примеров.

Пример 15.1. Найдем усилия в сферической оболочке радиуса R_0 , подверженной газовому давлению p_0 (рис. 15.7 а).

На часть оболочки, изображенную на рис. 15.7 б, действуют давление p_0 , распределенное по кругу радиуса $R_0 \sin \varphi$, и меридиональные силы N_φ , распределенные по окружности того же радиуса. Проецируя силы на вертикаль, имеем

$$p_0 \pi (R_0 \sin \varphi)^2 - N_\varphi \sin \varphi \cdot 2\pi (R_0 \sin \varphi) = 0, \Rightarrow N_\varphi = p_0 R_0 / 2.$$

Обратимся теперь к уравнению (15.3). У сферы $R_1 = R_2 = R_0$. Уравнение (15.3) примет вид $N_\varphi + N_\theta = p_0 R_0$. Из него $N_\theta = p_0 R_0 / 2$. Итак, в сферическом сосуде при газовом давлении силы $N_\theta = N_\varphi = p_0 R_0 / 2$ независимо от угла φ .

Пример 15.2. Цилиндрическая оболочка под гидростатическим давлением (рис. 15.8 а); γ – объемный вес жидкости. Найдем усилия в стенке.

На часть оболочки, изображенную на рис. 15.8 б, действуют:

– вес жидкости $\gamma z \pi R_0^2$;

– давление $p = \gamma z$;

– усилия N_ϕ .

Приравнявая нулю сумму вертикальных сил:

$$\gamma z \pi R_0^2 - p \pi R_0^2 + N_\phi 2 \pi R_0 = 0,$$

видим, что $N_\phi = 0$. Меридиональных сил в стенке нет.

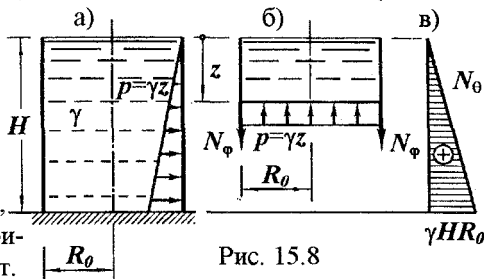


Рис. 15.8

Воспользуемся теперь уравнением (15.3). У цилиндрической оболочки радиус кривизны меридиана R_1 бесконечно большой. Вторым главным радиус $R_2 = R_0$. Поэтому $N_\theta = p R_0$, или $N_\theta = \gamma z R_0$. Окружная сила линейно возрастает с ростом z . Эпюра N_θ изображена на рис. 15.8 в.

Пример 15.3. Покрытие в форме конической оболочки опирается на кольцевой шарнир, представленный семейством меридиональных стерженьков (рис. 15.9 а). Размеры: $H = 3$ м, $R_0 = 8$ м. На покрытие действует снеговая нагрузка $p_0 = 1$ кН/м² горизонтальной поверхности. Найдем усилия в стенке.

Из равновесия верхней части (рис. 15.9 б) следует

$$p_0 \pi r^2 + N_\phi \sin \alpha \cdot 2 \pi r = 0,$$

т.е. $N_\phi = -p_0 r / (2 \sin \alpha) = 0$. Меридиональное усилие линейно возрастает от вершины к основанию. Эпюра N_ϕ изображена на рис. 15.9 г слева.

Для определения N_θ привлечем уравнение (15.3). У конуса R_1 бесконечно большой. Следовательно, $N_\theta = p R_2$. Вторым главным радиус кривизны (рис. 15.9 б) $R_2 = r / \sin \alpha$.

При выводе уравнения (15.3) предполагалось, что p – нормальное к срединной поверхности давление на единицу ее площади. Определим его.

Вертикальное давление на единицу площади срединной поверхности $p_1 = p_0 \cos \alpha$ (рис. 15.9 в). Перпендикулярная меридиану

составляющая $p = p_0 \cos^2 \alpha$. Учитывая, что давление направлено внутрь оболочки, принимаем $p = -p_0 \cos^2 \alpha$. Теперь

$$N_\theta = -p_0 \cos^2 \alpha \cdot r / \sin \alpha.$$

Сила N_θ также линейно возрастает от вершины к основанию. Эпюра N_θ изображена на рис. 15.9 г справа.

Приведенные примеры свидетельствуют, что определение усилий в оболочке по безмоментной теории – несложная статически разрешимая задача. Это способствует использованию названной теории в практических расчетах. Естественно возникает вопрос об условиях существования безмоментного напряженного состояния. Как показали теоретические исследования, для этого необходимо, чтобы геометрические параметры оболочки, опорные устройства и внешняя нагрузка удовлетворяли определенным требованиям. Эти требо-

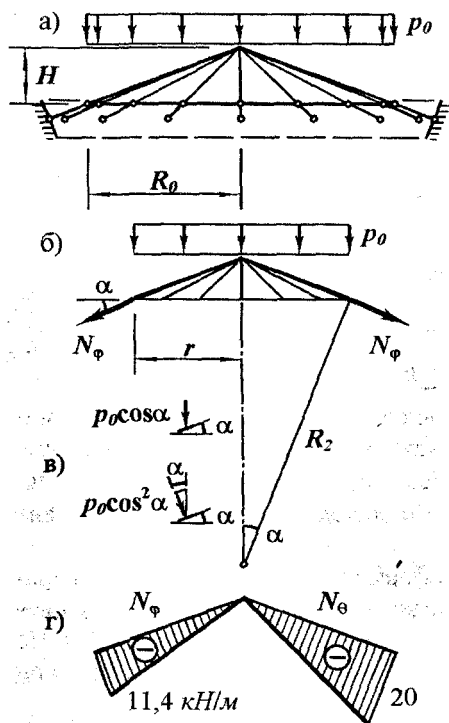


Рис. 15.9

вания таковы.

Геометрические параметры оболочки (толщина стенки, главные радиусы кривизны срединной поверхности) должны быть описаны едиными непрерывными функциями без разрывов в первой производной.

Опорные устройства должны исключать перемещения, касательные к меридиану, и не препятствовать перемещениям, перпендикулярным к срединной поверхности.

Нормальная составляющая внешнего давления должна описываться единой непрерывной функцией с непрерывной первой производной. Касательная же часть может быть и разрывной в меридио-

нальном направлении, но, естественно, равномерно распределенной по параллели.

Из приведенного перечня требований видно, что возможности нарушения безмоментного напряженного состояния достаточно широки. Рис. 15.10 иллюстрирует места возникновения изгибных напряжений (они выделены кружками).

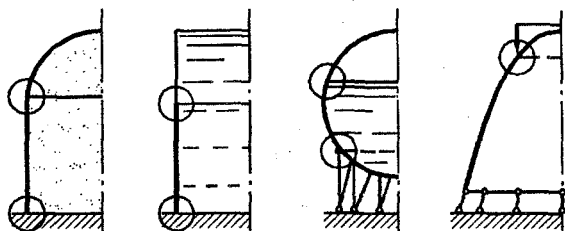


Рис. 15.10

15.4. Заключение к разделу

Выше рассмотрены простейшие задачи из теории оболочек. В целом же теория весьма многообразна и достаточно сложна. Объясняется это, главным образом, многообразием внешних воздействий и геометрических особенностей оболочек. Так, внешние воздействия могут быть:

- в виде механических нагрузок и температурных полей;
- осесимметричные и произвольные;
- распределенные, сосредоточенные и т.п.

По геометрическим особенностям оболочки подразделяют на:

- оболочки вращения и произвольные;
- тонкие и толстые;
- пологие и большой высоты;
- положительной, отрицательной кривизны и т.д.

Каждое сочетание качеств требует формирования по сути индивидуальной теории и нередко вовлекает специальный математический аппарат.

Программы строительных вузов не предоставляют достаточно времени для углубленного изучения теории оболочек. Да, пожалуй, в этом и нет необходимости. Студент, инженер, получивший фундаментальную подготовку по математике, механике и сопротивлению материалов, вполне может самостоятельно освоить соответствующий раздел теории оболочек, если такая потребность возникнет.

Приложения

1. Нормативные и расчетные сопротивления некоторых строительных материалов (МПа)

Таблица 1

Сталь

Марка стали	Вид деформации			
	Растяжение, сжатие		Сдвиг	
	Норм. сопр. R_{yn}	Расч. сопр. R	Норм. сопр. $R_{нз}$	Расч. сопр. R_f
18 кп	225	220	130	125
18 пс	235	230	135	130
09Г2	315	305	185	180
09Г2С	345	335	200	190
10Г2С1	355	340	205	195
14Г2	335	320	195	185
15ХСНД	345	330	200	190
10ХНДП	345	330	200	190
10ХСНД	390	355	225	205
15Г2СФ	440	400	255	230

Таблица 2

Чугун

Марка чугуна	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. $R_{нз}$	Расч. сопр. R_f	Норм. сопр. $R_{нс}$	Расч. сопр. R_c
СЧ 15	100	55	220	160
СЧ 20	120	65	275	200
СЧ 25	155	85	315	230
СЧ 30	180	100	340	250

Таблица 3

Бетон

Класс бетона	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. R_{nt}	Расч. сопр. R_t	Норм. сопр. R_{nc}	Расч. сопр. R_c
B15	1,15	0,75	11,0	8,5
B20	1,40	0,95	15,0	11,5
B25	1,60	1,05	18,5	14,5
B30	1,80	1,20	22,0	17,0

Таблица 4

Древесина

Порода древесины	Вид деформации			
	Растяжение вдоль воло- кон		Сжатие вдоль воло- кон	
	Норм. сопр. R_{nt}	Расч. сопр. R_t	Норм. сопр. R_{nc}	Расч. сопр. R_c
Сосна, ель	18,5	8,0	30	13,0
Кедр	16,5	7,2	27	11,7
Пихта	14,8	6,4	24	10,4
Дуб	24,0	10,4	39	16,9

2. Модули упругости

Стали всех марок $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;

$G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Бетон всех классов $E = 2 \cdot 10^4$ МПа;

Древесина всех пород $E = 10^4$ МПа.