

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

539.3/.6(07) п  
И425

**В.А.Икрин**

# **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**Конспект аудиторных занятий  
для студентов АС факультета  
специальности 290300 –**

**"Промышленное и гражданское строительство"**

**4930**



Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2001

УДК 539.3(075.8)

В.А.Икрин. Элементы теории упругости. Конспект аудиторных занятий для студентов архитектурно-строительного факультета специальности 290300 – “Промышленное и гражданское строительство”: Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 72 с.

Составлен в соответствии со следующими документами:

- Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования 1994 и 2000 гг;
- Требованиями к минимуму содержания и уровня подготовки инженера по специальности 290300 – “Промышленное и гражданское строительство”;
- Рабочей программой дисциплины “Сопротивление материалов” для подготовки дипломированных специалистов по специальности 290300.

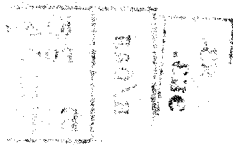
Приведены начальные сведения из основных разделов курса теории упругости, читаемого студентам строительных специальностей. Основное внимание уделено постановкам задач, исходным предпосылкам и анализу получаемых результатов. Формальные математические преобразования, как правило, опущены. Теоретический материал проиллюстрирован примерами.

Ориентирован на студентов специальности “Промышленное и гражданское строительство”. Может быть использован на других архитектурно-строительных специальностях.

Ил. 70.

Одобрено учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты: И.А.Иванов, В.И.Симонов.



ISBN 5-696-01833-5

© Издательство ЮУрГУ, 2002

Право тиражирования принадлежит автору и охраняется законом РФ.

## Оглавление

Предисловие.....	6
Основные буквенные обозначения.....	7
16. Основы теории упругости.....	9
16.1. Задача теории упругости.	
Плоская задача и ее разновидности.....	10
16.2. Уравнения плоской задачи теории упругости	
в декартовых координатах.....	12
16.2.1. Статические уравнения.....	12
16.2.1.1. Уравнения равновесия.....	12
16.2.1.2. Граничные условия для напряжений.....	12
16.2.2. Геометрические соотношения.....	13
16.2.2.1. Зависимость деформаций от перемещений.....	13
16.2.2.2. Геометрические граничные условия.....	14
16.2.3. Физические зависимости.....	14
16.2.3.1. Плоское напряженное состояние.....	14
16.2.3.2. Плоская деформация.....	14
16.3. Решение плоской задачи теории упругости	
в перемещениях.....	15
16.4. Решение плоской задачи теории упругости	
в напряжениях.....	
16.4.1. Преобразования системы уравнений.....	16
16.4.2. Функция напряжений. Рамная аналогия.....	18

17. Понятие о численных методах решения уравнений теории упругости .....	23
17.1. Методы аппроксимирующих функций .....	24
17.1.1. Метод коллокаций .....	25
17.1.2. Метод наилучшего квадратичного приближения .....	27
17.1.3. Метод ортогонализации .....	29
17.2. Метод конечных разностей .....	30
17.2.1. Конечнo-разностные представления производных функции одной переменной .....	31
17.2.2. Конечнo-разностные представления производных функции двух переменных .....	32
17.2.3. Пример решения плоской задачи теории упругости методом конечных разностей .....	34
17.3. Заключение к разделу .....	43
18. Основы технической теории изгибаемых пластин .....	44
18.1. Исходные предпосылки теории тонких жестких пластин .....	45
18.2. Разрешающие уравнения в декартовых координатах .....	45
18.2.1. Статические уравнения .....	45
18.2.2. Геометрические соотношения .....	47
18.2.3. Физические зависимости .....	47
18.3. Преобразования системы уравнений. Расчетные формулы .....	48
18.4. Граничные условия .....	49
18.4.1. Защемленный край .....	50
18.4.2. Шарнирно опертый край .....	50
18.4.3. Свободный край .....	50
18.5. Расчет прямоугольных шарнирно опертых пластин в двойных тригонометрических рядах .....	55

19. Простейшие энергетические принципы и вариационные методы теории упругости.....	58
19.1. Понятия вариации функции, функционала и вариации функционала .....	58
19.2. Принцип минимума потенциальной энергии системы (принцип Лагранжа) .....	60
19.3. Некоторые формулы потенциальной энергии деформации, выраженной через перемещения.....	62
19.3.1. Пластинка, нагруженная в своей плоскости.....	63
19.3.2. Пластинка, изгибаемая поперечной нагрузкой.....	64
19.3.3. Стержневой элемент конструкции .....	64
19.4. Принцип минимума дополнительной энергии (принцип Кастильяно) .....	66
19.5. Формулировка вариационной задачи. Метод Ритца .....	71

---

---

## Предисловие

Учебное пособие является третьей<sup>1, 2</sup> частью в серии публикаций учебной литературы для студентов архитектурно-строительного факультета ЮУрГУ. В нем сохранены сквозные нумерации разделов и формул. По этой причине при ссылках на разделы и формулы не указывается источник.

Пособие составлено на основе конспектов лекций и практических занятий, посвященных отдельным темам курса теории упругости и изданных в 1995 ... 1998 гг. в виде раздаточного материала. Апробация конспектов в течение указанных лет позволила исправить замеченные опечатки, откорректировать текст и некоторые формулировки.

Автор выражает благодарность директору ООО “Уральская строительная компания” А.В.Котову за спонсорскую помощь, обеспечившую возможность подготовки, оформления и издания учебного пособия, и безвозмездную его передачу в фонд библиотеки университета.

---

<sup>1</sup> В.А.Икрин. Сопротивление материалов. Часть I. Растяжение, кручение, изгиб: Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2001. – 164 с.

<sup>2</sup> В.А.Икрин. Сопротивление материалов. Часть II. Сложное сопротивление, устойчивость, динамическое воздействие: Учебник для студентов архитектурно-строительного факультета. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2001. – 160 с.

## Основные буквенные обозначения

- $A$  — площадь;
- $D$  — цилиндрическая жесткость;
- $E$  — модуль упругости;
- $F$  — сила;
- $G$  — модуль сдвига;
- $H$  — сила;
- $J$  — момент инерции;
- $M$  — момент;
- $N$  — продольная сила;
- $P$  — потенциальная энергия;
- $Q$  — поперечная сила;
- $U$  — потенциальная энергия;
- $V$  — объем;
- $W$  — работа;
- $X$  — объемная сила;
- $Y$  — объемная сила;
- $f$  — функция;
- $h$  — толщина;
- $k$  — коэффициент;
- $l$  — длина;
- $m$  — целочисленный индекс;
- $n$  — нормаль; целочисленный индекс;

- $p$  — давление;  
 $q$  — интенсивность нагрузки;  
 $u, v, w$  — перемещения;  
 $x, y, z$  — декартовы координаты;  
 $\Delta$  — приращение; ошибка;  
 $\Phi$  — функционал;  
 $\Pi$  — изменение потенциала внешней нагрузки;  
 $\alpha$  — угол; параметр разностной сетки;  
 $\delta$  — вариация;  
 $\varepsilon$  — относительное удлинение;  
 $\gamma$  — относительный сдвиг;  
 $\varphi$  — функция Эйри;  
 $\nu$  — коэффициент Пуассона;  
 $\theta$  — угол;  
 $\sigma$  — нормальное напряжение;  
 $\tau$  — касательное напряжение;  
 $\psi$  — функция;  
 $\nabla$  — оператор Лапласа;



## 16. Основы теории упругости

Теории упругости, пластичности и ползучести – три научные направления механики твердого деформируемого тела. Задачи, которые ставят перед собой названные дисциплины, во многом схожи:

- описать связь напряжений и деформаций для элементарного параллелепипеда;

- сформировать математическую модель задачи о напряженно-деформированном состоянии твердого тела;

- на тестовых задачах исследовать и продемонстрировать влияние изучаемой физической особенности материала на напряженно-деформированное состояние; при этом, как правило, не считаются с математическими трудностями решения;

- очертить область актуальности дисциплины;

- получить практически значимые решения, которыми бы мог воспользоваться инженер.

Схожи и основные фундаментальные предпосылки:

- тело наделяют свойством сплошной непрерывной среды;

- материал считают однородным;

- деформации полагают малыми;

- рассматривают статическое нагружение.

Общность предпосылок приводит к тому, что в разрешающих уравнениях обсуждаемых дисциплин фигурируют одинаковые статические и идентичные геометрические уравнения. Различны физические модели материала и, следовательно, физические уравнения.

В теории упругости такие уравнения формируют на основе закона Гука (с учетом анизотропии материала или без учета).

В задачах теории пластичности рассматривают тело, нагруженное за предел упругих деформаций. Однако игнорируют развитие деформаций во времени – полагают, что деформации изменяются лишь тогда, когда изменяется нагрузка.

Теория ползучести главное внимание уделяет процессу развития деформаций во времени и исследует поведение тел, воспринимающих длительные нагрузки.

От сопротивления материалов названные науки отличаются, главным образом, объектами изучения. Теории упругости, пластичности и ползучести не ограничиваются стержневыми элементами, а рассматривают и пластинки, и оболочки, и массивные тела.

Очерченные границы между ветвями механики деформируемого тела в известной степени условны. Есть задачи, лежащие в пограничной области, объединяющие дисциплины в многогранный цикл наук о поведении элементов конструкций под нагрузкой.

## 16.1. Задача теории упругости.

### Плоская задача и ее разновидности

Задача теории упругости формулируется так. Даны

- форма и размеры тела (рис. 16.1);
- материал;
- условия закрепления;
- вид и величина внешней нагрузки  $p$ .

Требуется найти

- напряжения  $\sigma_x(x, y, z)$ ,  $\sigma_y(x, y, z)$ ,  $\sigma_z(x, y, z)$ ,  $\tau_{xy}(x, y, z)$ ,  $\tau_{yz}(x, y, z)$ ,  $\tau_{zx}(x, y, z)$ ;
- деформации  $\epsilon_x(x, y, z)$ ,  $\epsilon_y(x, y, z)$ ,  $\epsilon_z(x, y, z)$ ,  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ ,  $\gamma_{yz}(x, y, z)$ ,  $\gamma_{zx}(x, y, z)$ ;

Рис. 16.1

– перемещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  в теле, считая его упругим.

Сформулированная таким образом задача теории упругости носит название *пространственной* (объемной, трехмерной).

Частным случаем пространственной является *плоская* (двумерная) задача, в которой напряжения и деформации являются функциями двух геометрических координат, например,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\sigma_z(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ ,  $\epsilon_x(x, y)$ ,  $\epsilon_y(x, y)$ ,  $\epsilon_z(x, y)$ ,  $\gamma_{xy}(x, y)$ .

В плоской задаче объект анализа – пластинка, нагруженная в своей плоскости (рис. 16.2).

Плоскую задачу разделяют на две разновидности:

- *плоское напряженное состояние;*
- *плоскую деформацию.*

На рис. 16.3 изображена расчетная схема несущей стены. На ее боковых поверхностях нагрузки нет. Если по толщине пластины давления  $p$  распределены равномерно, то в среднем вертикальном сечении по свойству симметрии напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  (из-за малости толщины можно принять и  $\sigma_z = 0$ ). Продолжая такое деление, приходим к выводу, пластинка находится в плоском напряженном состоянии.

На рис. 16.4 показана плотина, подверженная гидростатическому давлению. Условно ее можно считать бесконечной. При равномерном по длине плотины давлении все элементарные отрезки находятся в одинаковых условиях. Достаточно рассмотреть один из них. Из-за большой длины исключены линейные деформации  $\epsilon_z$ . Поскольку любое вертикальное сечение делит плотину на симметричные части, по закону симметрии касательные напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Элементарная пластинка находится в условиях плоской деформации.

Обратим внимание на то, что при плоском напряженном состоянии деформированное состояние объемно, так как поперечная деформация  $\epsilon_z \neq 0$ . Аналогично при плоской деформации напряженное состояние объемное, поскольку из-за взаимного давления пластин друг на друга между ними возникают нормальные напряжения  $\sigma_z$ .

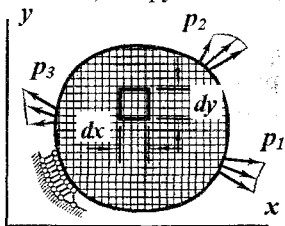


Рис. 16.2

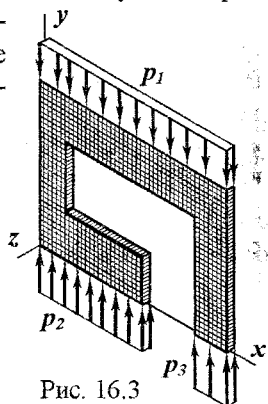


Рис. 16.3

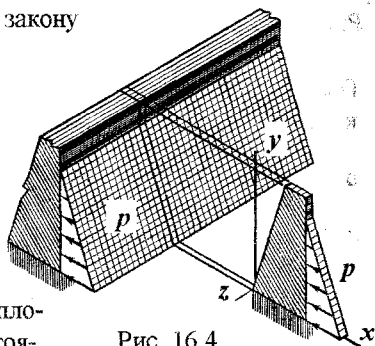


Рис. 16.4

## 16.2. Уравнения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах

В предыдущих разделах было неоднократно отмечено, что разрешающая система уравнений содержит статические, геометрические и физические условия. Сформируем каждую из них.

### 16.2.1. Статические уравнения

Они содержат условия равновесия точек произвольного положения и точек, расположенных на границе пластинки (граничные условия для напряжений).

#### 16.2.1.1. Уравнения равновесия

Запишем условия равновесия элементарного параллелепипеда (рис. 16.5), выделенного из пластинки, изображенной на рис. 16.2. Внешние силы, действующие на него со стороны отброшенных частей пластинки представлены нормальными и касательными напряжениями. Кроме того, будем считать, что в составе внешних сил есть и распределенные по объему  $X$  и  $Y$  (размерность последних  $H/m^3$ ).

Приравняем нулю сумму горизонтальных сил:

$$\sigma_y + (\partial\sigma_y/\partial y)dy \quad \tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy \quad -\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz +$$

$$+ (\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx) dy dz +$$

$$+ (\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy) dx dz +$$

$$+ X dx dy dz = 0.$$

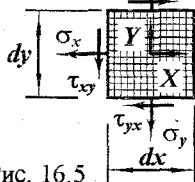


Рис. 16.5

После приведения подобных членов, деления на произведение  $dx dy dz$  и записи аналогичного уравнения для вертикальных сил получаем

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + X = 0; \quad \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y = 0. \quad (16.1)$$

Поскольку уравнения равновесия имеют дифференциальную форму, к ним необходимо добавить граничные условия.

#### 16.2.1.2. Граничные условия для напряжений

Если бесконечно малый элемент выделить на границе пластинки, он в общем случае будет иметь форму трехгранной призмы (рис. 16.6).

Условия равновесия – равенство нулю суммы горизонтальных сил и равенство нулю суммы вертикальных сил требуют, чтобы

$$-\sigma_x dy dz - \tau_{yx} dx dz + p_x ds dz = 0; \quad -\sigma_y dx dz - \tau_{xy} dy dz + p_y ds dz = 0.$$

Однотипная структура первых двух равенств, записанных здесь и в выражениях (16.3), дает возможность объединить расчетные уравнения для обеих разновидностей плоской задачи. Но для плоской деформации использовать константы (16.4).

Учитывая отмеченную возможность объединения задач, в дальнейшем будем рассматривать плоское напряженное состояние.

Плоская задача теории упругости свелась к

– двум условиям равновесия (16.1), содержащим три неизвестных функции:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  (с учетом парности касательных напряжений);

– трем геометрическим зависимостям (16.2) с пятью новыми неизвестными:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  и  $v$ .

– трем физическим зависимостям (16.3) без дополнительных неизвестных.

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из восьми уравнений с восемью функциями, описывающими напряженно-деформированное состояние пластинки.

Решение совместной системы восьми уравнений, в которой пять дифференциальных, – весьма трудоемкая процедура. С целью уменьшения математических трудностей систему предварительно преобразуют. При этом стремятся уменьшить число совместных уравнений. В зависимости от того, какие функции фигурируют в окончательной совместной системе, различают два вида решений:

– в перемещениях;

– в напряжениях.

Рассмотрим их.

### 16.3. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях

С помощью равенств (16.2) исключим деформации из физических уравнений (16.3):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E(\partial u/\partial x + \nu \partial v/\partial y)/(1-\nu^2); \\ \sigma_y &= E(\partial v/\partial y + \nu \partial u/\partial x)/(1-\nu^2); \\ \tau_{xy} &= E(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)/(2(1+\nu)).\end{aligned}\quad (16.5)$$

Теперь равенства (16.5) подставим в уравнения равновесия (16.1). После преобразований получим

$$\begin{aligned} E_1 \delta^2 u / \delta x^2 + G \delta^2 u / \delta y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 v / \delta x \delta y + X &= 0; \\ E_1 \delta^2 v / \delta x^2 + G \delta^2 v / \delta y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 u / \delta x \delta y + Y &= 0. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Уравнения (16.6) являются условиями равновесия, записанными в перемещениях.

В статические граничные условия (16 а) следует подставлять напряжения, выраженные через перемещения (16.5):

$$\begin{aligned} (\delta u / \delta x + \nu \delta v / \delta y) \cos \alpha_{nx} / (1 - \nu^2) + (\delta v / \delta x + \delta u / \delta y) \cos \alpha_{ny} / (2(1 + \nu)) &= p_x / E; \\ (\delta v / \delta x + \delta u / \delta y) \cos \alpha_{nx} / (2(1 + \nu)) + (\delta v / \delta y + \nu \delta u / \delta x) \cos \alpha_{ny} / (1 - \nu^2) &= p_y / E. \end{aligned}$$

Способ закрепления пластинки (геометрические граничные условия) также следует записывать через перемещения и их производные.

При решении плоской задачи теории упругости в перемещениях удалось снизить число совместных уравнений до двух – (16.6). Хотя решение этой системы не просто, тем не менее по сравнению с первоначальным вариантом восьми уравнений трудоемкость намного снизилась и перешла на уровень вполне реализуемых. Некоторые методы решения подобных уравнений будут показаны ниже.

Определив перемещения из уравнений (16.6), напряжения и деформации можно найти по равенствам (16.5) и (16.2), дифференцируя соответствующим образом функции  $u$  и  $v$ .

## 16.4. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях

### 16.4.1. Преобразования системы уравнений

Второй путь упрощения системы (16.1) ... (16.3) – исключение из нее деформаций и перемещений – решение в напряжениях.

Продифференцируем равенства (16.2):

$$\delta^2 \varepsilon_x / \delta y^2 = \delta^3 u / \delta x \delta y^2; \quad \delta^2 \varepsilon_y / \delta x^2 = \delta^3 v / \delta x^2 \delta y;$$

$$\delta^2 \gamma_{xy} / \delta x \delta y = \delta^3 u / \delta x \delta y^2 + \delta^3 v / \delta x^2 \delta y.$$

Сравнивая правые части полученных равенств, видим, что

$$\delta^2 \varepsilon_x / \delta y^2 + \delta^2 \varepsilon_y / \delta x^2 = \delta^2 \gamma_{xy} / \delta x \delta y. \quad (16.7^1)$$

<sup>1</sup> Уравнение (16.7) получено Сен-Венаном. Для односвязных пластинок (без отверстий) оно является необходимым и достаточным. В пластинках же с отверстиями к равенству (16.7) нужно добавить дополнительное условие однозначности перемещений. Подробно об этом см. в более полных учебниках.

Однотипная структура первых двух равенств, записанных здесь и в выражениях (16.3), дает возможность объединить расчетные уравнения для обеих разновидностей плоской задачи. Но для плоской деформации использовать константы (16.4).

Учитывая отмеченную возможность объединения задач, в дальнейшем будем рассматривать плоское напряженное состояние.

Плоская задача теории упругости свелась к

– двум условиям равновесия (16.1), содержащим три неизвестных функции:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  (с учетом парности касательных напряжений);

– трем геометрическим зависимостям (16.2) с пятью новыми неизвестными:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  и  $v$ .

– трем физическим зависимостям (16.3) без дополнительных неизвестных.

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из восьми уравнений с восемью функциями, описывающими напряженно-деформированное состояние пластинки.

Решение совместной системы восьми уравнений, в которой пять дифференциальных, – весьма трудоемкая процедура. С целью уменьшения математических трудностей систему предварительно преобразуют. При этом стремятся уменьшить число совместных уравнений. В зависимости от того, какие функции фигурируют в окончательной совместной системе, различают два вида решений:

– в перемещениях;

– в напряжениях.

Рассмотрим их.

### 16.3. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях

С помощью равенств (16.2) исключим деформации из физических уравнений (16.3):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E(\partial u/\partial x + \nu \partial v/\partial y)/(1-\nu^2); \\ \sigma_y &= E(\partial v/\partial y + \nu \partial u/\partial x)/(1-\nu^2); \\ \tau_{xy} &= E(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)/(2(1+\nu)).\end{aligned}\quad (16.5)$$

Теперь равенства (16.5) подставим в уравнения равновесия (16.1). После преобразований получим

$$\begin{aligned} E_1 \delta^2 u / \delta x^2 + G \delta^2 u / \delta y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 v / \delta x \delta y + X &= 0; \\ E_1 \delta^2 v / \delta x^2 + G \delta^2 v / \delta y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 u / \delta x \delta y + Y &= 0. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Уравнения (16.6) являются условиями равновесия, записанными в перемещениях.

В статические граничные условия (16 а) следует подставлять напряжения, выраженные через перемещения (16.5):

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial x + \nu \partial v / \partial y) \cos \alpha_{nx} / (1 - \nu^2) + (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) \cos \alpha_{ny} / (2(1 + \nu)) &= p_x / E; \\ (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) \cos \alpha_{nx} / (2(1 + \nu)) + (\partial v / \partial y + \nu \partial u / \partial x) \cos \alpha_{ny} / (1 - \nu^2) &= p_y / E. \end{aligned}$$

Способ закрепления пластинки (геометрические граничные условия) также следует записывать через перемещения и их производные.

При решении плоской задачи теории упругости в перемещениях удалось снизить число совместных уравнений до двух – (16.6). Хотя решение этой системы непросто, тем не менее по сравнению с первоначальным вариантом восьми уравнений трудоемкость намного снизилась и перешла на уровень вполне реализуемых. Некоторые методы решения подобных уравнений будут показаны ниже.

Определив перемещения из уравнений (16.6), напряжения и деформации можно найти по равенствам (16.5) и (16.2), дифференцируя соответствующим образом функции  $u$  и  $v$ .

## 16.4. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях

### 16.4.1. Преобразования системы уравнений

Второй путь упрощения системы (16.1) ... (16.3) – исключение из нее деформаций и перемещений – решение в напряжениях.

Продифференцируем равенства (16.2):

$$\begin{aligned} \delta^2 \varepsilon_x / \delta y^2 = \delta^3 u / \delta x \delta y^2, \quad \delta^2 \varepsilon_y / \delta x^2 = \delta^3 v / \delta x^2 \delta y; \\ \delta^2 \gamma_{xy} / \delta x \delta y = \delta^3 u / \delta x \delta y^2 + \delta^3 v / \delta x^2 \delta y. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части полученных равенств, видим, что

$$\delta^2 \varepsilon_x / \delta y^2 + \delta^2 \varepsilon_y / \delta x^2 = \delta^2 \gamma_{xy} / \delta x \delta y. \quad (16.7^1)$$

<sup>1</sup> Уравнение (16.7) получено Сен-Венаном. Для односвязных пластинок (без отверстий) оно является необходимым и достаточным. В пластинках же с отверстиями к равенству (16.7) нужно добавить дополнительное условие однозначности перемещений. Подробно об этом см. в более полных учебниках.



Полученное равенство является *условием совместности деформаций (неразрывности деформаций; сплошности тела)*. Геометрический смысл его состоит в том, что контакты между элементарными параллелепипедами в процессе деформации нигде не нарушаются — пластинка, сплошная до деформации, осталась сплошной и в деформированном состоянии.

Подставим в условие (16.7) закон Гука (9.3) и (6.1), учитывая связь между модулями  $E$  и  $G$  (9.5):

$$\partial^2(\sigma_x - \nu\sigma_y)/\partial y^2 + \partial^2(\sigma_y - \nu\sigma_x)/\partial x^2 = 2(1+\nu)\partial^2\tau_{xy}/\partial x\partial y. \quad (a)$$

Продифференцировав первое равенство условий равновесия (16.1) по  $x$ , второе по  $y$  и просуммировав их, получаем

$$-2\partial^2\tau_{xy}/\partial x\partial y = \partial^2\sigma_x/\partial x^2 + \partial^2\sigma_y/\partial y^2 + \partial X/\partial x + \partial Y/\partial y. \quad (б)$$

Если объемные силы распределены по пластинке равномерно, то производные  $\partial X/\partial x = \partial Y/\partial y = 0$ . Ограничимся такими силами  $X$  и  $Y$ . Подставив равенство (а) в выражение (б), получаем *условие совместности деформаций, выраженное через напряжения (уравнение Леви)<sup>1</sup>*:

$$\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)/\partial x^2 + \partial^2(\sigma_x + \sigma_y)/\partial y^2 = 0. \quad (16.8)$$

Дифференциальный оператор  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  называется *гармоническим оператором Лапласа*, обозначается  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = \nabla^2$  (символ носит название *набла-два*). В сокращенной форме условие совместности деформаций примет вид

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (16.8)$$

Итак, решение плоской задачи теории упругости в напряжениях свелось к системе трех дифференциальных уравнений:

- двух уравнений равновесия (16.1)
- и условия совместности деформаций (16.8).

Статические граничные условия (16 а) не требуют каких-либо преобразований. Запись же геометрических ограничений на перемещения наложенными на пластинку связями достаточно затруднительна, так как напряжения выражаются через производные  $u$  и  $v$ . По этой причине решение в напряжениях возможно, если известны все силы, действующие на пластинку, — когда она внешне статически определима.

<sup>1</sup> Морис Леви (1838–1910) — французский механик, преподаватель, ученый. Его научные интересы охватывали широкий круг проблем теории упругости.

В том варианте, который зафиксирован выше, решение в напряжениях уступает решению в перемещениях, поскольку

– сводится к большему числу уравнений;

– требует сложных преобразований и решений для выражения геометрических граничных условий через напряжения.

Тем не менее этот путь оказывается перспективным в направлении смягчения первого недостатка – уменьшения числа уравнений.

#### 16.4.2. Функция напряжений. Рамная аналогия

16.4.2.1. Дальнейшие и существенные упрощения задачи возможны за счет введения так называемой *функции напряжений* (функции Эйри<sup>1</sup>).

Если вместо трех функций  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$  ввести специально подобранную одну  $\phi(x, y)$  такую, что

$$\sigma_x = \partial^2 \phi / \partial y^2; \quad \sigma_y = \partial^2 \phi / \partial x^2; \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \phi / \partial x \partial y - Xy - Yx, \quad (16.9)$$

то условия равновесия (16.1) будут выполнены всегда. Действительно,

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + X = \partial^3 \phi / \partial x \partial y^2 - \partial^3 \phi / \partial x \partial y^2 - X + X = 0;$$

$$\partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + Y = -\partial^3 \phi / \partial x^2 \partial y - Y + \partial^3 \phi / \partial x^2 \partial y + Y = 0.$$

Функцию напряжений нужно найти из условия совместности деформаций (16.8). Подставив выражения (16.9) в условие (16.8), получаем

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial x^2) = 0.$$

Но так как  $\partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial x^2 = \nabla^2 \phi$ , то записанное выше условие можно записать короче:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad (16.10)$$

или в развернутом виде

$$\partial^4 \phi / \partial x^4 + 2 \partial^4 \phi / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \phi / \partial y^4 = 0. \quad (16.10)$$

Дифференциальный оператор  $\partial^4 / \partial x^4 + 2 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$  носит название *бигармонического оператора Лапласа* и обозначается  $\nabla^4$  (символ называется *набла-четыре*). Теперь уравнение (16.10) можно записать и так

$$\nabla^4 \phi = 0. \quad (16.10)$$

Уравнение (16.10) носит название *условия совместности деформаций, выраженного через функцию напряжений*.

Таким образом, плоскую задачу, решаемую в напряжениях, удалось свести к одному дифференциальному уравнению (16.10).

<sup>1</sup> Джордж Биддэл Эйри (1801–1892) – английский математик и астроном. Предложил ввести функцию напряжений (в варианте  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ) в 1862 г.

16.4.2.2. Поскольку напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  определяются по функции  $\varphi$  дифференцированием (16.9), появляется возможность некоторого произвола в выборе ее выражения. Установим меру этого произвола.

Пусть даны две функции  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$ , отличающиеся линейным трехчленом:  $\varphi_1 = \varphi_2 + Ax + By + C$ . Тогда напряжения (16.9)

$$\text{— по } \varphi_1: \sigma_x = \partial^2 \varphi_1 / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi_1 / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi_1 / \partial x \partial y - Xy - Yx;$$

$$\text{— по } \varphi_2: \sigma_x = \partial^2 \varphi_2 / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi_2 / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi_2 / \partial x \partial y - Xy - Yx.$$

Но при двукратном дифференцировании трехчлен  $Ax + By + C$  исчезает. Вторые производные  $\partial^2 \varphi_1 / \partial y^2 = \partial^2 \varphi_2 / \partial y^2$ ,  $\partial^2 \varphi_1 / \partial x^2 = \partial^2 \varphi_2 / \partial x^2$ ,  $\partial^2 \varphi_1 / \partial x \partial y = \partial^2 \varphi_2 / \partial x \partial y$ .

Добавление линейного трехчлена к функции напряжений, на напряжениях не отражается:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(\varphi) = \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(\varphi + Ax + By + C). \quad (\text{а})$$

Это свойство функции  $\varphi$  позволяет упростить отдельные этапы ее применения.

16.4.2.3. Обратимся теперь к форме статических граничных условий (16 а), записанных через функцию напряжений.

Вновь рассмотрим пластинку, на границе которой задана нагрузка  $p_x$  и  $p_y$  (рис. 16.8). Ограничимся случаем, когда объемных сил нет:  $X = 0, Y = 0$ .

Выберем начальную точку  $a_0$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$ . От нее будем отсчитывать координату  $s$ , определяющую положение точки на контуре пластинки. Условимся считать положительным такое направление обхода, при котором пластинка остается слева.

Учитывая возможность линейной коррекции функции напряжений (а), постоянные  $A, B$  и  $C$  подберем так, чтобы в точке  $a_0$  выполнялись равенства  $\varphi_{x_0 y_0} = 0, (\partial \varphi / \partial x)_{x_0 y_0} = 0, (\partial \varphi / \partial y)_{x_0 y_0} = 0$ .

Условия (16 а) в произвольной точке  $a_1(x_1, y_1, s_1)$  имеют вид

$$\sigma_x \cos \alpha_{nx} + \tau_{yx} \cos \alpha_{ny} = p_x; \quad \tau_{xy} \cos \alpha_{nx} + \sigma_y \cos \alpha_{ny} = p_y.$$

При выбранном правиле знаков для координаты  $s$  (см. рис. 16.9) положительному  $ds$  соответствует положительное  $dy$  и отрицательное  $dx$ . Направление нормали к границе определяется углами  $\alpha$

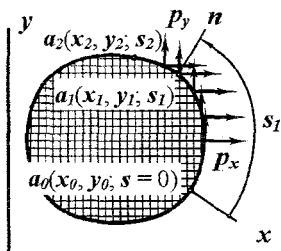


Рис. 16.8

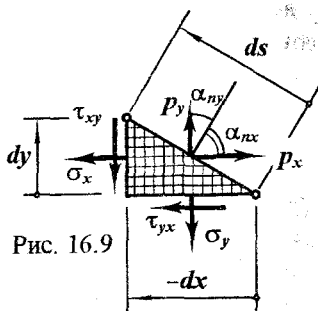


Рис. 16.9

$$\cos \alpha_{nx} = dy/ds, \quad \cos \alpha_{ny} = -dx/ds. \quad (6)$$

Согласно выражениям (16.9)

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2 = \partial(\partial \varphi / \partial y) / \partial y;$$

$$\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2 = \partial(\partial \varphi / \partial x) / \partial x;$$

$$\tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = -\partial(\partial \varphi / \partial y) / \partial x = -(\partial \varphi / \partial x) / \partial y. \quad (в)$$

Подставим равенства (в) и (6) в (16 а):

$$\begin{aligned} & (\partial(\partial \varphi / \partial y) / \partial y) dy / ds + (\partial(\partial \varphi / \partial y) / \partial x) dx / ds = \\ & = d(\partial \varphi / \partial y) / ds = P_x; \\ & -(\partial(\partial \varphi / \partial x) / \partial y) dy / ds - (\partial(\partial \varphi / \partial x) / \partial x) dx / ds = \\ & = -d(\partial \varphi / \partial x) / ds = P_y. \end{aligned}$$

Итак,  $d(\partial \varphi / \partial y) = P_x ds$ ;  $d(\partial \varphi / \partial x) = -P_y ds$ .

Проинтегрируем полученные равенства по  $s$  от нуля до произвольной точки (обозначим ее криволинейную координату  $s_1$ ):

$$(\partial \varphi / \partial y)_{x_1 y_1} = \int_0^{s_1} P_x ds, \Rightarrow (\partial \varphi / \partial y) = P_x;$$

$$(\partial \varphi / \partial x)_{x_1 y_1} = -\int_0^{s_1} P_y ds, \Rightarrow (\partial \varphi / \partial x) = -P_y. \quad (г)$$

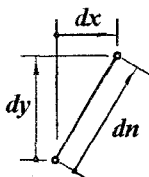


Рис. 16.10

Здесь  $P_x$  и  $P_y$  – равнодействующие горизонтальной и вертикальной нагрузок, приложенных на участке интегрирования  $a_0 a_1$ .

Производная функции напряжений по внешней нормали  $d\varphi/dn = (\partial \varphi / \partial x) dx/dn + (\partial \varphi / \partial y) dy/dn$ .

Но согласно рис. 16.10  $dx/dn = \cos \alpha_{nx}$ ,  $dy/dn = \cos \alpha_{ny}$ . Используя эти равенства и равенства (в), получаем

$$d\varphi/dn = (\partial \varphi / \partial x) dx/dn + (\partial \varphi / \partial y) dy/dn = -P_y \cos \alpha_{nx} + P_x \cos \alpha_{ny}. \quad (д)$$

Правая часть полученного выражения представляет собой сумму проекций на касательную к контуру пластинки той части внешней нагрузки, которая действует на участке  $a_0 a_1$  (рис. 16.11).

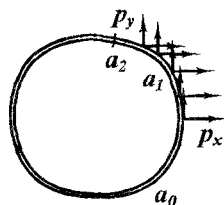


Рис. 16.11

Производная функции  $\varphi$  по касательной к контуру  $d\varphi/ds = (\partial \varphi / \partial x) dx/ds + (\partial \varphi / \partial y) dy/ds =$

$$= -P_y dx/ds + P_x dy/ds.$$

Проинтегрируем полученное выражение от фиксированной точки  $a_0$  до произвольной  $a_2$ :

$$\varphi_{x_2 y_2} = -\int_0^{s_2} P_y (dx/ds) ds + \int_0^{s_2} P_x (dy/ds) ds.$$

Учитывая соотношения (г), имеем

$$\varphi_{x_1, y_2} = - \int_0^{s_2} \left( \int_0^{s_1} p_{yx} ds \right) (dx/ds) ds + \int_0^{s_2} \left( \int_0^{s_1} p_{xy} ds \right) (dy/ds) ds.$$

Возьмем внешние интегралы по частям:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1, y_2} &= - \left( \int_0^{s_1} p_y ds \right) x \Big|_0^{s_2} + \int_0^{s_2} x p_y ds + \left( \int_0^{s_1} p_x ds \right) y \Big|_0^{s_2} - \int_0^{s_2} y p_x ds = \\ &= -x_2 \int_0^{s_2} p_y ds + \int_0^{s_2} x p_y ds + y_2 \int_0^{s_2} p_x ds - \int_0^{s_2} y p_x ds = \\ &= \int_0^{s_2} (x - x_2) p_y ds + \int_0^{s_2} (y_2 - y) p_x ds. \end{aligned} \quad (e)$$

Правое равенство представляет собой момент относительно точки  $a_2$ , создаваемый нагрузкой, приложенной на участке  $a_0 a_2$  (рис. 16.11).

Итак, два граничных условия (16 а), выраженные через функцию напряжений в виде (д) и (е), можно записать так:

$$d\varphi/dn = N, \quad \varphi = M. \quad (16.11)$$

Равенства (16.11) можно наглядно проиллюстрировать.

Если наряду с пластинкой (рис. 16.2, 16.8) рассмотреть плоскую раму того же очертания и так же нагруженную, то

- производная функции напряжений по внешней нормали в точке контура пластинки равна продольной силе в соответствующем сечении рамы;

- значение функции напряжений в точке контура пластинки равно изгибающему моменту в соответствующем сечении рамы.

Граничные условия в форме (16.11) получили название **рамной аналогии**. Эпюры изгибающего момента и продольной силы в раме являются графиками изменения функции напряжений и ее нормальной производной на контуре пластинки.

Для практического применения равенств (16.11) необходимо извлечь из приведенного доказательства правила знаков, и снять неопределенность, связанную с положением начальной точки  $a_0$ .

Из направлений усилий и обусловленного правила обхода контура следует, что положительными нужно считать

- растягивающую продольную силу;

- момент, растягивающий внутренние волокна рамы.

Замкнутая рама, повторяющая контур пластинки, имеет три избыточных связи и, следовательно, трижды статически неопределима. Построение эпюр продольных сил и изгибающих моментов в ней

достаточно трудоемко. Свойство (а) функции напряжений позволяет устранить эту трудность.

Если замкнутую раму разрезать в некотором фиксированном месте  $(x_0, y_0)$  и силы взаимодействия в нем обозначить  $X_0, Y_0$  и  $M_0$  (рис. 16.12), то в текущем сечении

$$M(x, y) = M_p(x, y) + X_0(y - y_0) + Y_0(x_0 - x) + M_0 = \\ = M_p(x, y) - Y_0x + X_0y - X_0y_0 + Y_0x_0 + M_0.$$

Здесь  $x, y$  — координаты сечения рамы (точки края пластинки);  $M_p(x, y)$  — изгибающий момент от нагрузки на раму.

Полученное выражение показывает, что изгибающий момент линейно зависит от сил взаимодействия  $X_0, Y_0$  и

$M_0$ . Но  $M(x, y) = \varphi(x, y)$ . Если их отбросить, функция напряжений на контуре изменится на линейный трехчлен.

При линейном изменении контурных значений функции напряжений на столько же она изменится и во внутренних точках пластинки. Но по свойству (а) это не отразится на определяемых ею напряжениях. Итак, раму можно разрезать, а силы взаимодействия  $X_0, Y_0$  и  $M_0$  отбросить. Отсутствие каких-либо ограничений на место рассечения рамы, позволяет делать это где угодно.

Аналогично можно доказать, что при использовании рамной аналогии можно отбрасывать любые три избыточные связи при сохранении геометрической неизменяемости рамы и строить эпюры продольной силы и изгибающего момента в статически определимой системе. Проиллюстрированный здесь разрез рамы — частный случай сформулированной возможности.

Приведенный выше материал изложен очень кратко. Не затронуты важные вопросы существования и однозначности решений. В поле зрения не включены многосвязные пластинки, требующие дополнительного анализа при формировании расчетных уравнений. Не рассмотрена задача в полярных координатах. Не приведены решения важных задач, имеющих фундаментальные значения при расчетах некоторых строительных конструкций и объектов. Краткость изложения объясняется количеством часов, отведенных на дисциплину.

## 17. Понятие о численных методах решения уравнений теории упругости

Определение характеристик напряженно-деформированного состояния элемента конструкции связано, как правило, с необходимостью решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений с сопутствующими им граничными условиями. Например:

- уравнение изогнутой оси балки вытекает из закона Гука, имеющего форму дифференциального уравнения (7.22) или упрощенного его варианта (7.23);

- критические значения сжимающей силы для сжатого стержня и момента для балки устанавливаются с помощью однородных дифференциальных уравнений;

- расчет стержня по деформированной схеме сводится к уравнению (13.1);

- анализ колебательных или иных динамических процессов связан с уравнениями движения типа (14.2), (14.6), (14.12) или более сложными;

- решение плоской задачи теории упругости в перемещениях требует решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных (16.6), в напряжениях – трех (16.1) и (16.8), а через функцию напряжений одного уравнения четвертого порядка (16.10).

В последующих разделах также будут сформированы математические модели инженерных задач в форме дифференциальных уравнений.

Основные сложности, сопутствующие поиску функций, отвечающих дифференциальному уравнению и граничным условиям,

можно разделить на две группы:

- технические, вызванные трудностями процесса поиска;
- принципиальные, обусловленные отсутствием искоемых математических функций в составе известных в настоящее время.

С другой стороны, инженера, опирающегося на идеализированную расчетную схему и ориентирующегося, естественно, на приближенный результат, обычно вполне устраивает приближенное решение соответствующей математической задачи. Важно при этом, чтобы полученный результат не усугубил погрешность, порожденную исходными предпосылками теории.

Наконец, третий комментарий. Современное состояние вычислительной техники, обеспечившее ей прочное место в технологии расчетов и проектирования строительных конструкций, снимает остроту технических математических трудностей и выдвигает численные методы на передовые позиции при решении практических задач.

Исходя из высказанной точки зрения, в настоящий раздел включены начальные сведения о некоторых приближенных методах решения дифференциальных уравнений или их систем, обыкновенных или в частных производных<sup>1</sup>.

Из множества способов преодоления трудностей решения дифференциальных уравнений остановимся на таких, которые позволяют свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Из них рассмотрим:

- группу методов аппроксимирующих функций<sup>2</sup>;
- метод конечных разностей.

### 17.1. Методы аппроксимирующих функций

Эта группа методов основана на выражении

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y), \quad (17.1)$$

где  $f(x, y)$  – искомая функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (или системе уравнений) и граничным условиям;

<sup>1</sup> Автор не ставит цель полного и систематизированного изложения темы. Желаящие глубже изучить этот математический аппарат могут обратиться к специальной литературе.

<sup>2</sup> Аппроксимация – приближенное выражение математических объектов, в частности функций, через другие, более простые.



$\psi_i(x, y)$  – аппроксимирующие функции конкретного вида;  
 $a_i$  – коэффициенты аппроксимации, подлежащие определению;  
 $n$  – число членов аппроксимирующего ряда.

В роли аппроксимирующих обычно фигурируют элементарные функции, графики которых качественно схожи с ожидаемым очертаением искомой функции. Существуют так называемые полные системы функций<sup>1</sup>, способные свести погрешность решения к нулю. Число членов аппроксимирующего ряда назначают из соображений компромисса между желаемой точностью и трудоемкостью расчета.

Поскольку в математической форме задача состоит из двух частей – дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) и граничных условий, коэффициенты аппроксимирующего ряда определяют в зависимости от того, каким требованиям отвечают выбранные функции  $\psi_i(x, y)$ :

– если аппроксимирующие функции удовлетворяют граничные условия (нередко удается именно так подобрать функции  $\psi_i(x, y)$ ), коэффициенты  $a_i$  определяют по дифференциальному уравнению;

– при функциях  $\psi_i(x, y)$ , удовлетворяющих дифференциальное уравнение, коэффициенты  $a_i$  подбирают по граничным условиям;

– в общем случае, когда подбором аппроксимирующих функций не удалось удовлетворить ни дифференциальное уравнение, ни граничные условия, коэффициенты ряда (17.1) подбирают и по уравнению, и по граничным условиям.

Название метода из обсуждаемой группы зависит от того, по какому критерию подбирают коэффициенты  $a_i$ . Ознакомимся с тремя методами:

- коллокаций<sup>2</sup>;
- наилучшего квадратичного приближения;
- ортогонализации (Галеркина).

### 17.1.1. Метод коллокаций

В этом методе коэффициенты аппроксимирующего ряда подбирают так, чтобы условия задачи выполнялись в  $n$  точках – узлах коллокации.

<sup>1</sup> Полная система может быть составлена из тригонометрических функций, полиномов и др.

<sup>2</sup> *Collocation* – расположение, расстановка (англ.); по-видимому, от этого слова произошло название метода.

Для иллюстрации метода рассмотрим пример.

**Пример 17.1.** Найдем максимальный прогиб в консольной балке, изображенной на рис. 17.1.

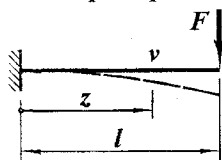


Рис. 17.1

Дифференциальное уравнение задачи —

$$v'' = M_x/(EJ_x). \quad (a)$$

$$\text{Граничные условия: } v(0) = 0, v'(0) = 0. \quad (б)$$

Эта схема неоднократно рассматривалась прежде (см. пример 7.9). Известно, что изогнутая ось — кубическая парабола. Сознательно откажемся от нее и опишем прогибы приближенной функцией. Деформированная ось балки похожа на четверть волны косинусоиды. Примем

$$v = a(1 - \cos(\pi z/(2l))). \quad (в)$$

Выбранная функция удовлетворяет граничные условия (б). Действительно,  $v(0) = a(1 - 1) = 0$ ;  $v' = a(\pi/(2l))\sin(\pi z/(2l))$ ,  $v'(0) = 0$ .

Коэффициент  $a$  найдем по дифференциальному уравнению. Уравнение (а) после подстановки в него выражения (в) принимает вид

$$a(\pi^2/(4l^2))\cos(\pi z/(2l)) = M_x/(EJ_x).$$

Выберем узел коллокации в начале координат и потребуем, чтобы  $v''(0) = M_x(0)/(EJ_x)$ :  $a\pi^2/(4l^2) = Fl/(EJ_x)$ . Отсюда  $a = 4Fl^3/(\pi^2 EJ_x) = 0,406Fl^3/(EJ_x)$ . Уравнение изогнутой оси балки обретает вид

$$v = (0,406Fl^3/(EJ_x))(1 - \cos(\pi z/(2l))).$$

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(l) = 0,406Fl^3/(EJ_x)$ . Точное значение  $v_{max} = 0,333Fl^3/(EJ_x)$ . Полученный здесь результат оказался на 22% больше.

Чтобы снизить погрешность, возьмем две аппроксимирующие функции и запишем

$$v = a_1(1 - \cos(\pi z/(2l))) + a_3(1 - \cos(3\pi z/(2l))). \quad (г)$$

Граничные условия (б) при этом выполнены.

Дифференциальное уравнение (а) при описании (г) выглядит так:  $a_1(\pi^2/(4l^2))\cos(\pi z/(2l)) + a_3(9\pi^2/(4l^2))\cos(3\pi z/(2l)) = M_x/(EJ_x)$ . (д)

Для определения двух коэффициентов выберем два узла коллокации, например,  $z = 0$  и  $z = l/2$ . После подстановки этих абсцисс в равенство (д) приходим к системе уравнений

$$a_1(\pi^2/(4l^2)) + a_3(9\pi^2/(4l^2)) = Fl/(EJ_x),$$

$$a_1(\pi^2/(4l^2))0,7071 + a_3(9\pi^2/(4l^2))0,7071 = Fl/(2EJ_x).$$

Отсюда  $a_1 = 0,346Fl^3/(EJ_x)$ ,  $a_3 = 0,0066Fl^3/(EJ_x)$ ;

$v = Fl^3(0,346(1 - \cos(\pi z/(2l))) + 0,0066(1 - \cos(3\pi z/(2l))))/(EJ_x)$ ;  
 $v_{max} = v(l) = 0,353Fl^3/(EJ_x)$ . Этот результат превышает точное значение на 6 %.

Рассмотренный пример, кроме демонстрации этапов метода, показал очевидную зависимость точности результата от числа членов аппроксимирующего ряда. Отметим также отсутствие требований на выбор мест коллокаций. Это обстоятельство, с одной стороны, оставляет сомнение в удачности положения узлов, с другой же, при наличии опыта и навыков позволяет оптимизировать расчет – с малым числом аппроксимирующих функций получать приемлемый результат.

### 17.1.2. Метод наилучшего квадратичного приближения

Используются и другие названия этого метода – наименьшего квадратичного отклонения; в обиходе его иногда называют методом наименьших квадратов.

*Критерием подбора коэффициентов аппроксимирующего ряда здесь служит минимум суммы квадратов ошибок.*

В методе используются специфические понятия и действия. Проиллюстрируем их примером.

**Пример 17.2.** Определим максимальные нормальные напряжения  $\max \sigma_x$  во внецентрично сжатом стальном стержне (рис. 17.2). Расчет выполним по деформированной схеме.

Исходные данные:  $l = 3,5$  м; двутавр № 18 ( $e = 9$  см);  $F = 218$  кН.

Задача сводится к определению перемещения верхнего конца стержня (рис. 17.3). Определив его, найдем изгибающий момент в нижнем сечении, а затем и напряжения.

Дифференциальное уравнение задачи (рис. 17.3):

$$M_x = F(f + e - v); \quad M_x = EJ_x v'', \quad \text{откуда}$$

$$v'' + k^2 v = k^2 (f + e) \quad (\text{где } k^2 = F/(EJ_x)), \quad (\text{a})$$

Граничные условия:  $v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (\text{б})$

Эта задача решена точным методом (пример 13.2). Изогнутая ось стержня описывается косинусоидой. Зная об этом, сознательно аппроксимируем ее полиномом

$$v = a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (\text{в})$$

удовлетворяющим условия (б).

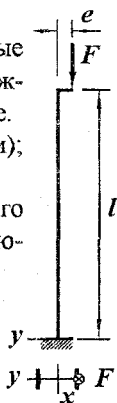


Рис. 17.2

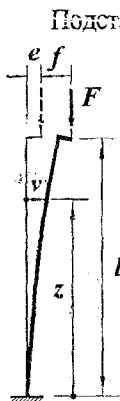


Рис. 17.3

Подставим выражение (в) в уравнение (а) с учетом того, что

$f = a_2 l^2 + a_3 l^3$ . В итоге придадим уравнению вид

$$2a_2 + 6a_3 z + k^2(\bar{a}_2 z^2 + a_3 z^3) = k^2(a_2 l^2 + a_3 l^3 + e).$$

Так как во всех точках  $0 \leq z \leq l$  левая и правая части уравнения должны быть равными, их разность является *ошибкой аппроксимации*. Поскольку она зависит от  $z$ , ее называют *функцией-ошибкой*. Обозначим функцию-ошибку буквой  $\Delta$  и запишем

$$\Delta = a_2(2 + k^2 z^2 - k^2 l^2) + a_3(6z + k^2 z^3 - k^2 l^3) - k^2 e.$$

Как было отмечено выше, критерием качества решения в рассматриваемом методе служит *суммарная квадратичная ошибка* (она обозначена  $\Sigma \Delta^2$ ) -

$$\Sigma \Delta^2 = \int_0^l \Delta^2 dz = \int_0^l (a_2(2 + k^2 z^2 - k^2 l^2) + a_3(6z + k^2 z^3 - k^2 l^3) - k^2 e)^2 dz.$$

После возведения в квадрат подынтегрального выражения и интегрирования получаем зависимость

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta^2 = & 4(l - 2k^2 l^3/3 + 2k^4 l^5/15)a_2^2 + \\ & + (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_2 a_3 + \\ & + 3(4l^3 - 12k^2 l^5/10 + 3k^4 l^7/14)a_3^2 - \\ & - 4(k^2 l - k^4 l^3/3)ea_2 - 6(k^2 l^2 - k^4 l^4/4)ea_3 + k^4 e^2 l. \end{aligned}$$

Суммарная квадратичная ошибка является *функцией* коэффициентов аппроксимирующего ряда  $a_2$  и  $a_3$ . Чтобы суммарная квадратичная ошибка стала минимальной, необходимо выполнить условия

$$\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_2 = 0, \quad \partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_3 = 0.$$

$$\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_2 =$$

$$= 8(l - 2k^2 l^3/3 + 2k^4 l^5/15)a_2 + (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_3 - 4(k^2 l - k^4 l^3/3)e = 0,$$

$$\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_3 =$$

$$= (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_2 + 6(4l^3 - 12k^2 l^5/10 + 3k^4 l^7/14)a_3 - 6(k^2 l^2 - k^4 l^4/4)e = 0.$$

Подстановка числовых значений произведений  $k^2 l^2 = Fl^2/(EJ_x) = 218 \cdot 350^2 / (2 \cdot 10^4 \cdot 1290) = 1,035$  и  $k^4 l^4 = 1,071$  и несложные преобразования приводят к системе.

$$3,6267l^2 a_2 + 7,044l^3 a_3 - 2,7093e = 0,$$

$$7,044l^2 a_2 + 17,9309l^3 a_3 - 4,5990e = 0.$$

Решение системы:  $a_2 = 1,0203e/l^2$ ,  $a_3 = -0,1562e/l^3$ .

Изогнутая ось стержня при найденных коэффициентах описывается уравнением  $v = (1,0203z^2/l^2 - 0,1562z^3/l^3)e$ . Прогиб наверху

$$f = v(l) = 0,8941e = 0,8941 \cdot 9 = 8,05 \text{ см.}$$

Максимальный изгибающий момент в нижнем сечении стержня  
 $\max M_x = F(f + e) = 218(8,05 + 9) = 3716 \text{ кНсм}$ .

Наибольшие нормальные напряжения от сжатия с изгибом  
 $\max \sigma_z = F/A + \max M_x/W_x = 218/23,4 + 3716/143 = 35,3 \text{ кН/см}^2$ .

Сравнивая полученный результат с точным (пример 13.2), видим, что они разнятся на единицу в третьей значащей цифре – практически совпадают.

Метод наилучшего квадратичного приближения в силу ясности и определенности действий и убедительности критерия нашел широкое применение в расчетной инженерной практике.

### 17.1.3. Метод ортогонализации

Прежде чем приступить к описанию метода, введем необходимые понятия.

Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  называются *ортогональными* на отрезке  $ab$ , если  $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$ . Аналогично, функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  ортогональны в области  $A$ , если  $\int_A f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 0$ . Очевидны условия ортогональности функций трех и большего числа переменных.

В методе ортогонализации требуют, чтобы функция-ошибка была ортогональна *n* весовым<sup>1</sup> функциям в области задачи.

**Пример 17.3.** Найдем критическое значение силы, сжимающей шарнирно закрепленный стержень (приближенно решим задачу Эйлера; рис. 12.2, 17.4).

Дифференциальное уравнение задачи (разд. 12.2) –

$$v'' + k^2 v = 0 \quad (\text{где } k^2 = F_{cr}/(EJ_x)), \quad (\text{а})$$

Граничные условия:  $v(0) = 0, v(l) = 0$ . (б)

Аппроксимируем изогнутую ось стержня квадратной параболой  $v = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ . (в)

Из первого условия (б)  $v(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ ; из второго  $v(l) = 0 \Rightarrow a_1 l + a_2 l^2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 l$ . Таким образом,  
 $v = a_2(z^2 - lz)$ . (г)

Подставив равенство (г) в уравнение (а), получаем  $2a_2 + k^2 a_2(z^2 - lz) = 0$ , или  $a_2(2 + k^2(z^2 - lz)) = 0$  – это и есть функция-ошибка:  $\Delta = a_2(2 + k^2(z^2 - lz))$ .

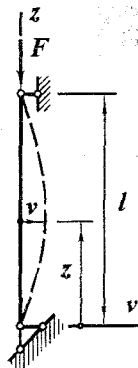


Рис. 17.4

<sup>1</sup>Весовая функция – функция значимости.

В качестве весовой функции примем простейшую – постоянную  $f_0 = 1$ . Условие ортогональности функция-ошибки и весовой функции имеет вид  $\int_0^l \Delta \cdot f_0 dz = \int_0^l a_2(2 + k^2(z^2 - lz)) dz = 0$ . После интегрирования приходим к равенству  $a_2(2l - k^2 l^3/6) = 0$ . Так как решение  $a_2 = 0$  не отвечает поставленной задаче, принимаем  $2l - k^2 l^3/6 = 0$ , откуда  $k^2 = 12/l^2$ ;  $F_{cr} = k^2 EJ_x = 12EJ_x/l^2$ . Точное значение критической силы  $F_{cr} = \pi^2 EJ_x/l^2$  почти на 22% меньше приближенного. Такая большая погрешность объясняется, главным образом, методической целенаправленностью примера.

Характеризуя в целом метод ортогонализации, следует прежде всего отметить отсутствие каких-либо ограничений при выборе весовых функций. Эта кажущаяся неопределенность метода в действительности предоставляет возможность гибкого его использования с учетом специфики задачи. Выделяя область повышенной точности, инженер может специальным подбором весовых функций улучшить решение в этой области. В частности, если в качестве весовых выбраны функции, аппроксимирующие ошибку, метод ортогонализации приводит к минимуму суммарной квадратичной ошибки. Действительно,  $\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_i = \partial(\int \Delta^2 dz)/\partial a_i = 2 \int \Delta(\partial \Delta/\partial a_i) dz = 0$ . Но  $\partial \Delta/\partial a_i$  и есть  $i$ -я функция в выражении  $\Delta$ . Таким образом, метод наилучшего квадратичного приближения можно рассматривать как частный случай метода ортогонализации.

Проиллюстрированными критериями не исчерпывается их перечень. В последующих разделах будут показаны другие приближенные методы решения красных задач, также использующие идеи разложения (17.1) введения критерия качества.

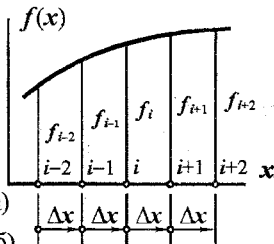
## 17.2. Метод конечных разностей

*Метод конечных разностей основан на выражении производных функции через ее значения в конкретных точках.* В результате дифференциальное уравнение или их систему удастся свести к системе линейных алгебраических уравнений.

Конечно-разностное выражение производной опирается на приближенное равенство  $f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y/\Delta x \approx \Delta y/\Delta x$  при конечных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

### 17.2.1. Конечно-разностные представления производных функции одной переменной

На рис. 17.5 показан график функции  $f(x)$ . Нанесем на ось  $x$  ряд равноотстоящих точек с номерами  $i-2, i-1, \dots, i+2$  и шагом  $\Delta x$ . Значения функции в этих точках обозначим  $f_{i-2}, f_{i-1}, \dots, f_{i+2}$ . Выразим первую производную в точке  $i$ . Это можно сделать двояко:



– по правой разности  $(f'_i)^r = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x$ ; (а)

– по левой разности  $(f'_i)^l = (f_i - f_{i-1})/\Delta x$ . (б)

Естественно принять в качестве производ-

Рис. 17.5

ной в точке среднее из этих значений:  $f'_i = (f'_i)^r/2 + (f'_i)^l/2$ , что с учетом равенств (а) и (б) дает выражение

$$f'_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta x). \quad (17.2)$$

Конечно-разностные операторы удобно фиксировать не формулой, а в графическом виде. На рис. 17.6 изображен графический оператор первой производной. Правила его использования таковы:

– центральный обведенный двойной линией квадрат наложить на узел, для которого записывается выражение производной;

$$f' = \boxed{-1} \boxed{0} \boxed{1} / (2\Delta x)$$

Рис. 17.6

– функции в узлах, накрытых квадратами оператора, умножить на соответствующие числа;

– произведения просуммировать и поделить на  $2\Delta x$ .

Вторую производную представим как первую производную первой производной:  $f''_i = ((f'_i)^r - (f'_i)^l)/\Delta x$ . Подставив равенства (а) и (б), имеем

$$f''_i = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})/\Delta x^2. \quad (17.3) \quad f'' = \boxed{1} \boxed{-2} \boxed{1} / \Delta x^2$$

На рис. 17.7 изображен графический оператор

Рис. 17.7

второй производной. Правила пользования им аналогичны описанному выше.

Четвертую производную запишем как вторую производную вто-

$$f^{IV} = \boxed{1} \boxed{-4} \boxed{6} \boxed{-4} \boxed{1} / \Delta x^4$$

Рис. 17.8

рой производной:  $f^{IV}_i = (f''_{i-1} - 2f''_i + f''_{i+1})/\Delta x^2$ . После выражения вторых производных по формуле (17.3) приходим к равенству

$$f^{IV}_i = (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})/\Delta x^4. \quad (17.4)$$

Формула (17.4) продублирована графически на рис. 17.8.

Проиллюстрируем примером технику применения метода конечных разностей.

**Пример 17.4.** Найдем максимальный прогиб в балке, изображенной на рис. 17.9.

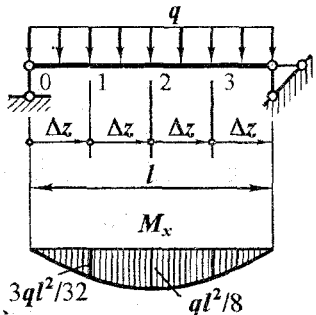


Рис. 17.9

Дифференциальное уравнение задачи  $v'' = M_x / (EJ_x)$ . (а)

Граничные условия (с учетом симметрии)  $v(0) = 0$ ,  $v'(l/2) = 0$ . (б)

Разобьем пролет балки на четыре равных отрезка  $\Delta z = l/4$  и пронумеруем. Запишем в конечно-разностном виде уравнение (а) для узлов 1 и 2.

Узел 1:  $v_1'' = M_{x1} / (EJ_x)$ . Наложив оператор, изображенный на рис. 17.7, на узел, имеем  $(v_0 - 2v_1 + v_2) / (l/4)^2 = -3ql^2 / (32EJ_x)$ .

Узел 2, аналогично:  $v_2'' = M_{x2} / (EJ_x)$ ;  $(v_1 - 2v_2 + v_3) / (l/4)^2 = -ql^2 / (8EJ_x)$ .

Из граничных условий следует:  $v_0 = 0$ ; используя оператор первой производной (17.2) (рис. 17.6), запишем  $v'(l/2) = (v_3 - v_1) / (2(l/4)) = 0 \Rightarrow v_3 = v_1$ . В итоге дифференциальные уравнения приняли вид

$$-2v_1 + v_2 = -3ql^4 / (512EJ_x),$$

$$2v_1 - 2v_2 = -ql^4 / (128EJ_x).$$

Максимальный прогиб посередине пролета. Из записанной системы уравнений  $v_2 = 7ql^4 / (512EJ_x) = 0,0137ql^4 / (EJ_x)$ . Точное решение  $v_2 = 0,0130ql^4 / (EJ_x)$  отличается от полученного на 5,4%. Погрешность объясняется достаточно грубой дискретизацией балки. Впрочем, цель примера не получение точного результата, а иллюстрация метода.

### 17.2.2. Конечно-разностные представления производных функции двух переменных

Геометрическим образом функции двух переменных является поверхность. Производная функции зависит не только от положения точки, но и от направления. Поэтому, говоря о производных, следует указывать точку, порядок и направление.

На рис. 17.10 изображен фрагмент области определения функции  $f(x, y)$ . Как известно, первая частная производная  $df/dx$  в точке  $i, j$  может быть выражена через узловые значения функции по форму-



ле (17.2), которая при двумерной нумерации имеет вид

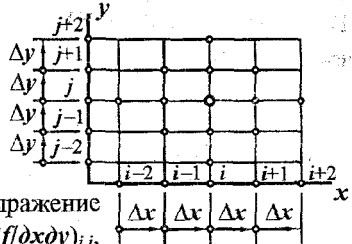
$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) / (2\Delta x).$$

Производная по переменной  $y$  -

$$(\partial f / \partial y)_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) / (2\Delta y).$$

Графическим конечно-разностным оператором первой производной можно пользоваться и для функции двух переменных. Дифференцируя по  $x$ , его следует располагать параллельно оси  $x$ ; при записи производной по  $y$  повернуть на  $90^\circ$  против хода часовой стрелки и заменить  $\Delta x$  на  $\Delta y$ .

Аналогично выражают вторые производные  $(\partial^2 f / \partial x^2)_{i,j}$ ,  $(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j}$  и четвертые  $(\partial^4 f / \partial x^4)_{i,j}$ ,  $(\partial^4 f / \partial y^4)_{i,j}$ . Аналогично и использование соответствующих им графических операторов.



Запишем конечно-разностное выражение

второй смешанной производной  $(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j}$ .

представив ее так:  $(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j} = (\partial(\partial f / \partial y) / \partial x)_{i,j} =$  Рис. 17.10  
 $= ((\partial f / \partial y)_{i+1,j} - (\partial f / \partial y)_{i-1,j}) / (2\Delta x)$ . После выражения первых производных по  $y$  через узловые значения функции получаем

$$(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j} = (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1}) / (4\Delta x \Delta y). \quad (17.5)$$

Графический оператор второй смешанной производной изображен на рис. 17.11. Расположение ненулевых коэффициентов в нем таково, что эту производную можно определять для точек, лежащих в центрах разностных прямоугольников - как бы при вдвое уменьшенном шаге.

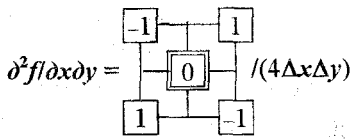


Рис. 17.11

Выведем конечно-разностную формулу четвертой смешанной производной  $(\partial^4 f / \partial x^2 \partial y^2)_{i,j}$ .  $(\partial^4 f / \partial x^2 \partial y^2)_{i,j} = (\partial^2((\partial^2 f / \partial y^2) \partial x^2))_{i,j} =$

$$= ((\partial^2 f / \partial y^2)_{i-1,j}) - 2(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j} + (\partial^2 f / \partial y^2)_{i+1,j} / \Delta x^2 =$$

$$= (f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j-1} + 4f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) / (\Delta x^2 \Delta y^2).$$

Имея конечно-разностные формулы производных, можно получать выражения для сложных дифференциальных операторов. Так,

$$(\nabla^4 f)_{i,j} = (\partial^4 f / \partial x^4)_{i,j} + 2(\partial^4 f / \partial x^2 \partial y^2)_{i,j} + (\partial^4 f / \partial y^4)_{i,j} =$$

$$= (f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}) / \Delta x^4 +$$

$$+ 2(f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j-1} + 4f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) / (\Delta x^2 \Delta y^2) +$$

$$+ (f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}) / \Delta y^4.$$

Если умножить обе части равенства, скажем на  $\Delta x^4$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta x^4(\nabla^4 f)_{i,j} &= \\ &= \alpha^4 f_{i,j+2} + \\ &+ 2\alpha^2 f_{i-1,j+1} - 4\alpha^2(1+\alpha^2) f_{i,j+1} + 2\alpha^2 f_{i+1,j+1} + \\ &+ f_{i-2,j} - 4(1+\alpha^2) f_{i-1,j} + (6+8\alpha^2+6\alpha^4) f_{i,j} - 4(1+\alpha^2) f_{i+1,j} + f_{i+2,j} + \\ &+ 2\alpha^2 f_{i-1,j-1} - 4\alpha^2(1+\alpha^2) f_{i,j-1} + 2\alpha^2 f_{i+1,j-1} + \\ &+ \alpha^4 f_{i,j-2}. \end{aligned}$$

Здесь фигурирует параметр разностной сетки  $\alpha = \Delta x/\Delta y$ . На рис. 17.12 изображен рассмотренный дифференциальный оператор в графической форме.

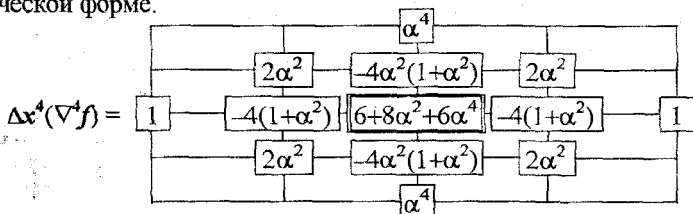


Рис. 17.12

Он облегчает формирование соответствующих дифференциальных уравнений в конечно-разностном виде.

### 17.2.3. Пример решения плоской задачи теории упругости методом конечных разностей

**Пример 17.5.** В прямоугольной пластинке, нагруженной как показано на рис. 17.13:

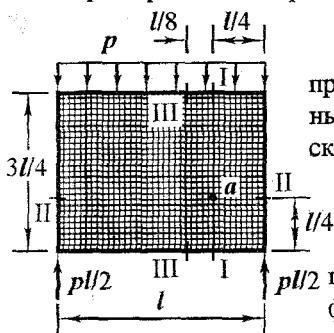


Рис. 17.13

– построим эпюры нормальных напряжений в сечениях I-I и II-II, касательных в III-III, рассчитав ее в рамках плоской задачи теории упругости;

– найдем направления и величины главных напряжений в точке  $a$ ;

– сравним полученные эпюры напряжений с эпюрами, соответствующими формулам сопротивления материалов.

Нагрузка на пластинку известна.

Используем функцию напряжений.

Дифференциальное уравнение задачи (16.10) –  $\nabla^4 \varphi = 0$ . (а)

34 Граничные условия (16.11):  $\varphi = M$ ,  $\partial \varphi / \partial n = N$ . (б)

# 1. Составление и решение дифференциального уравнения методом конечных разностей.

Нанесем на область, охватываемую задачей, разностную сетку<sup>1</sup> (рис. 17.14) и пронумеруем узлы, учитывая симметрию расчетной схемы:

- внутренние 1, ..., 4;
- контурные 5, ..., 12;
- законтурные 13, ..., 18.

1.1. Запишем в конечно-разностной форме дифференциальное уравнение задачи (а).

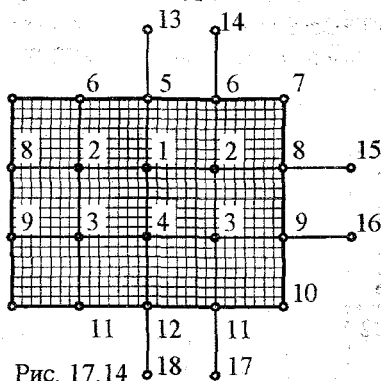


Рис. 17.14

Для этого вначале вычислим коэффициенты бигармонического оператора, приведенного на рис. 17.12. Горизонтальный шаг сетки  $\Delta x = l/4$ , вертикальный  $\Delta y = l/4$ ; параметр  $\alpha = \Delta x/\Delta y = 1$ . Конечно-разностный оператор для квадратной сетки приведен на рис. 17.15.

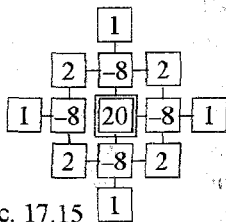


Рис. 17.15

Пользуясь оператором, как шаблоном, записываем дифференциальное уравнение для каждого внутреннего узла.

- Узел 1:  $20\varphi_1 - 8(\varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_8) + 2(\varphi_6 + \varphi_3 + \varphi_7 + \varphi_9) + \varphi_{13} + \varphi_8 + \varphi_{12} + \varphi_8 = 0$ ;
- Узел 2:  $20\varphi_2 - 8(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_3 + \varphi_1) + 2(\varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_4 + \varphi_5) + \varphi_{14} + \varphi_{15} + \varphi_{11} + \varphi_2 = 0$ ;
- Узел 3:  $20\varphi_3 - 8(\varphi_2 + \varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_4) + 2(\varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_1) + \varphi_6 + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_3 = 0$ ;
- Узел 4:  $20\varphi_4 - 8(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_{12} + \varphi_2) + 2(\varphi_2 + \varphi_{11} + \varphi_{11} + \varphi_3) + \varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_{18} + \varphi_9 = 0$ . (в)

## 1.2. Граничные условия (б).

Для записи граничных условий построим эпюры изгибающих моментов и продольных сил в раме, изображенной на рис. 17.16 а.

1.2.1. Согласно равенству (16.11)  $\varphi = M$ . Функция напряжений в контурных узлах имеет значения (рис. 17.16 б)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= 0; \quad \varphi_6 = -pl^2/32; \quad \varphi_7 = -pl^2/8; \quad \varphi_8 = -pl^2/8; \\ \varphi_9 &= -pl^2/8; \quad \varphi_{10} = -pl^2/8; \quad \varphi_{11} = -pl^2/8; \quad \varphi_{12} = -pl^2/8. \end{aligned} \quad (г)$$

<sup>1</sup> Пример преследует методические цели, поэтому сетка редкая. Это отразится на точности результата.

<sup>2</sup> Напомним, что функция напряжений положительна, если у рамы растянуты внутренние волокна.

1.2.2. Второе условие (16.11) на границе ( $\partial\phi/\partial n=N$ , рис. 17.16 в) позволяет связать внутри- и законтурные значения функции напряжений (см. графический оператор 17.8).

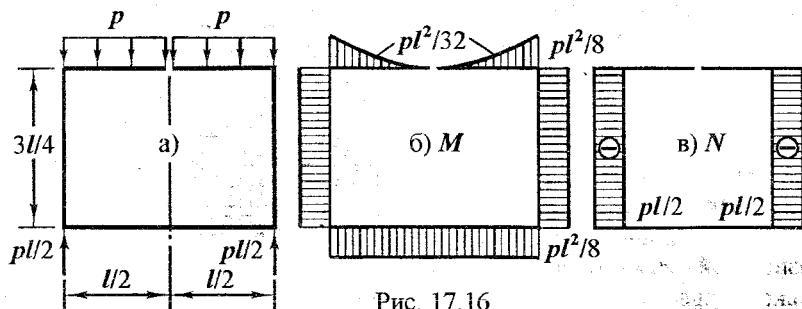


Рис. 17.16

Узлы 5, 6, 8, 9, 11 и 12:

$$\begin{aligned}
 (\partial\phi/\partial n)_5 &= (\partial\phi/\partial y)_5 = N_5; \quad (\varphi_{13} - \varphi_1)/(2\Delta y) = (\varphi_{13} - \varphi_1)/(2l/4) = 0; \quad \varphi_{13} = \varphi_1. \\
 (\partial\phi/\partial n)_6 &= (\partial\phi/\partial y)_6 = N_6; \quad (\varphi_{14} - \varphi_2)/(2\Delta y) = (\varphi_{14} - \varphi_2)/(2l/4) = 0; \quad \varphi_{14} = \varphi_2. \\
 (\partial\phi/\partial n)_8 &= (\partial\phi/\partial x)_8 = N_8; \quad (\varphi_{15} - \varphi_2)/(2\Delta x) = (\varphi_{15} - \varphi_2)/(2l/4) = -pl/2; \quad \varphi_{15} = \varphi_2 - pl^2/4. \\
 (\partial\phi/\partial n)_9 &= (\partial\phi/\partial x)_9 = N_9; \quad (\varphi_{16} - \varphi_3)/(2\Delta x) = (\varphi_{16} - \varphi_3)/(2l/4) = -pl/2; \quad \varphi_{16} = \varphi_3 - pl^2/4. \\
 (\partial\phi/\partial n)_{11} &= (\partial\phi/(-\partial y))_{11} = N_{11}; \quad (\varphi_{17} - \varphi_3)/(2\Delta y) = (\varphi_{17} - \varphi_3)/(2l/4) = 0; \quad \varphi_{17} = \varphi_3. \\
 (\partial\phi/\partial n)_{12} &= (\partial\phi/(-\partial y))_{12} = N_{12}; \quad (\varphi_{18} - \varphi_4)/(2\Delta y) = (\varphi_{18} - \varphi_4)/(2l/4) = 0; \quad \varphi_{18} = \varphi_4. \quad (д)
 \end{aligned}$$

Система (в), (г) и (д) содержит 18 уравнений с 18-ю неизвестными функциями напряжений. Подставив равенства (г) и (д) в (в), приходим к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}
 21\varphi_1 - 16\varphi_2 + 4\varphi_3 - 8\varphi_4 &= 0,5000pl^2; \\
 -8\varphi_1 + 23\varphi_2 - 8\varphi_3 + 2\varphi_4 &= -0,3750pl^2; \\
 2\varphi_1 - 8\varphi_2 + 23\varphi_3 - 8\varphi_4 &= -0,9676pl^2; \\
 -8\varphi_1 + 4\varphi_2 - 16\varphi_3 + 21\varphi_4 &= -0,2500pl^2.
 \end{aligned}$$

Решив систему, находим внутриконтурные значения функции  $\phi$ :

$$\varphi_1 = -0,02518pl^2; \quad \varphi_2 = -0,4723pl^2; \quad \varphi_3 = -0,8260pl^2; \quad \varphi_4 = -0,7543pl^2. \quad (е)$$

В точках границы пластинки функция напряжений известна — равенства (г). По соотношениям (д) и равенствам (е) находим значения функции напряжений в законтурных узлах. Результаты выполненных вычислений приведены на рис. 17.17.

## 2. Эпюры напряжений.

### 2.1. Сечение I-I.

Нормальные напряжения (15.9)  $\sigma_x = \partial^2 \phi / \partial y^2$ . Используя конечно-разностный оператор второй производной, изображенный на рис. 17.7, но повернутый на  $90^\circ$ , находим:

$$\begin{aligned} \text{Узел 6: } \sigma_x^6 &= (\partial^2 \phi / \partial y^2)_6 = \\ &= (\phi_2 - 2\phi_6 + \phi_{14}) / \Delta y^2 = \\ &= (-0,04723 - 2(-0,03125) - \\ &- 0,04723) pl^2 / (l/4)^2 = -0,5114p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 2: } \sigma_x^2 &= (\partial^2 \phi / \partial y^2)_2 = \\ &= (\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_6) / \Delta y^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,04723) - 0,03125) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= -0,3102p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 3: } \sigma_x^3 &= (\partial^2 \phi / \partial y^2)_3 = (\phi_{11} - 2\phi_3 + \phi_2) / \Delta y^2 = \\ &= (-0,12500 - 2(-0,08260) - 0,04723) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= -0,1125p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 11: } \sigma_x^{11} &= (\partial^2 \phi / \partial y^2)_{11} = (\phi_{17} - 2\phi_{11} + \phi_3) / \Delta y^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,12500) - 0,08260) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= 1,3568p. \end{aligned}$$

Эпюра напряжений  $\sigma_x$  в сечении I-I изображена на рис. 17.18.

### 2.2. Сечение II-II.

Нормальные напряжения  $\sigma_x = \partial^2 \phi / \partial x^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Узел 4: } \sigma_y^4 &= (\partial^2 \phi / \partial x^2)_4 = (\phi_3 - 2\phi_4 + \phi_5) / \Delta x^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,07543) - 0,08260) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= -0,2294p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 3: } \sigma_y^3 &= (\partial^2 \phi / \partial x^2)_3 = (\phi_4 - 2\phi_3 + \phi_2) / \Delta x^2 = \\ &= (-0,07543 - 2(-0,08260) - 0,12500) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= -0,5637p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 9: } \sigma_y^9 &= (\partial^2 \phi / \partial x^2)_9 = (\phi_3 - 2\phi_9 + \phi_{16}) / \Delta x^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,12500) - 0,33260) pl^2 / (l/4)^2 = \\ &= -2,6432p. \end{aligned}$$

Распределение напряжений  $\sigma_y$  по сечению II-II показано на рис. 17.19.

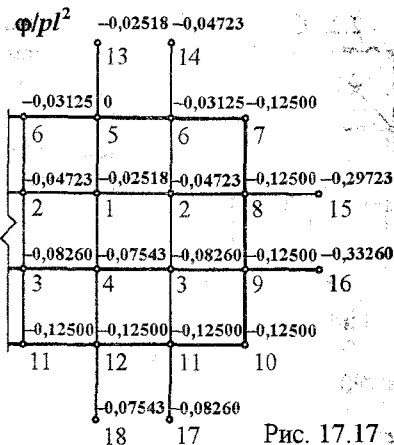


Рис. 17.17

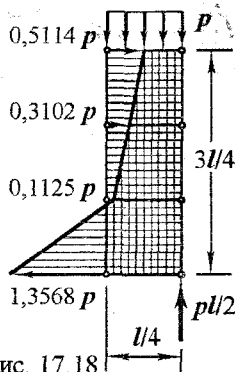


Рис. 17.18

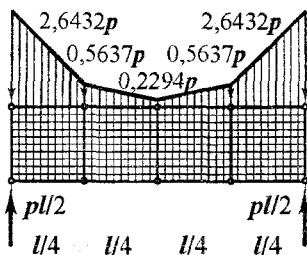
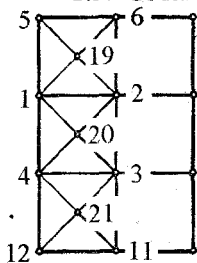


Рис. 17.19

## 2.2. Сечение III-III. Касательные напряжения $\tau_{xy} = -\partial^2\phi/\partial x\partial y$ .



При определении этих напряжений учтем специфику оператора смешанного двукратного дифференцирования (рис. 17.11) и выберем узлы посередине квадратов разностной сетки - 19, 20 и 21 на рис. 17.20, вдвое уменьшив шаги сетки.

$$\text{Узел 19: } \tau_{xy}^{19} = -(\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{19} =$$

$$= (\phi_x - \phi_1 + \phi_5 - \phi_6) / (4(\Delta x/2)(\Delta y/2)) =$$

$$= (-0,04723 - (-0,02518) + 0 - (-0,03125))pl^2 / (4(l/8)(l/8)) = 0,1472p.$$

Рис. 17.20

$$\text{Узел 20: } \tau_{xy}^{20} = -(\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{20} = (\phi_3 - \phi_4 + \phi_1 - \phi_2) / (4(\Delta x/2)(\Delta y/2)) =$$

$$= (-0,08260 - (-0,07543) - 0,02518 - (-0,04723))pl^2 / (4(l/8)(l/8)) = 0,2381p.$$

$$\text{Узел 21: } \tau_{xy}^{21} = -(\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{21} =$$

$$= (\phi_{11} - \phi_{12} + \phi_4 - \phi_3) / (4(\Delta x/2)(\Delta y/2)) =$$

$$= (-0,12500 - (-0,12500) - 0,07543 - (-0,08260))pl^2 / (4(l/8)(l/8)) = 0,1147p.$$

Эпюра касательных напряжений в сечении показана на рис. 17.21.

### 2.2. Статические проверки эпюр напряжений.

Неотъемлемой частью всякого ответственного расчета являются проверки безошибочности его выполнения. Важно определить, какие проверки необходимо сделать, и установить, какую часть всего объема охватывает тот или иной контрольный расчет, наконец, иметь четкое представление об истоках несовпадения рабочих и контрольных вычислений. Отмстив важность такого контроля и не имея возможности глубоко вдаваться в эту тему, остановимся на статических проверках полученных эпюр.

Статические проверки контролируют выполнение условий равновесия. В них рассматривают ту часть пластинки, по отношению к которой проверяемые напряжения являются внешними силами. Эти части пластинки выделены на рис. 17.18, 17.19 и 17.21.

Внешние силы, приложенные к этим частям, образуют плоские произвольные системы, которые должны выполнять условия  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum \text{мом} = 0$ . Из них нужно использовать те, куда входят проверяемые напряжения.

Внешние силы, приложенные к этим частям, образуют плоские произвольные системы, которые должны выполнять условия  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum \text{мом} = 0$ . Из них нужно использовать те, куда входят проверяемые напряжения.

Так, для статической проверки нормальных напряжений в сечении I-I можно использовать лишь условия  $\Sigma X = 0$  и  $\Sigma \text{мом} = 0$ . При этом моментная точка должна находиться в сечении, чтобы исключить влияние неизвестных касательных напряжений. Существенен в этом случае способ аппроксимации эпюры напряжений. Ограничимся аппроксимацией ломаной линией (рис. 17.18). Пользуясь формулой трапеций, имеем

$$\Sigma X = (0,5114/2 + 0,3102 + 0,1125 - 1,3568/2)pl/4 = 0,0000.$$

Проверка сошлась<sup>1</sup>.

Иначе нужно проверять сумму моментов сил. Здесь нужно:

- разбить эпюру напряжений на узловые участки;
- найти равнодействующие на каждом участке;
- равнодействующие приложить в соответствующие узлы.

В таком случае проверка должна сойтись с точностью до арифметических округлений<sup>2</sup>.

Следуя высказанным рекомендациям, найдем (рис. 17.22):

$$N_6 = 0,5114p(l/4)/2 = 0,06392pl;$$

$$N_2 = 0,3102p(l/2)/2 = 0,07755pl;$$

$$N_3 = 0,1125p(l/2)/2 = 0,02812pl;$$

$$N_{11} = 1,3568p(l/4)/2 = 0,16960pl.$$

Просуммируем моменты относительно точки 11:

$$\begin{aligned} \Sigma \text{мом} &= 0,06392pl(3l/4) + 0,07755pl(l/2) + \\ &+ 0,02812pl(l/4) + p(l/4)(l/8) - (pl/2)(l/4) = \\ &= 0,000005pl^2. \end{aligned}$$

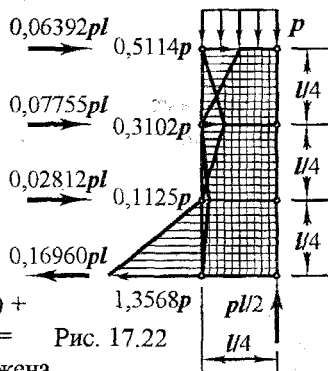
Ошибки также не обнаружена.

Статическая проверка эпюры напряжений  $\sigma_y$  в сечении II-II.

Для проверки этой эпюры (рис. 17.19) можно использовать только условие  $\Sigma Y = 0$ . При любых значениях симметричной эпюры напряжений сумма моментов относительно середины обратится в нуль. Суммируем:  $\Sigma Y = 2(2,6432/2 + 0,5637 + 0,2294/2)p(l/4)2 - pl/2 = 0,0000$ . Проверка сошлась.

<sup>1</sup> Эта проверка охватывает очень ограниченную область. Можно доказать, что при правильном выражении законтурных значений функции напряжений через внутриконтурные проверка сойдется при любых величинах  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  и  $\phi_4$ .

<sup>2</sup> Это также можно доказать.



Проверим теперь касательные напряжения в сечении III-III

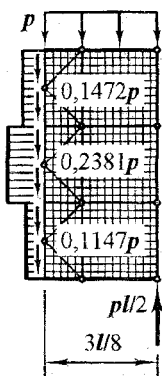


Рис. 17.23

(рис. 17.21). Здесь возможна одна проверка  $-\Sigma Y = 0$ :  
 $0,1472p(l/8)/2 + (0,1472/2 + 0,2381 + 0,1147/2)p(l/4) +$   
 $+ 0,1147p(l/8)/2 + p(3l/8) - pl/2 = -0,0166pl$ . На 3 %  
 преобладает сила, направленная вверх.

Если, игнорируя свойство парности касательных напряжений и допуская скачкообразное их изменение, принять распределение напряжений в пределах шага равномерным (рис. 17.23), то проверка сойдется:

$$(0,1472 + 0,2381 + 0,1147)p(l/4) + p(3l/8) - pl/2 = 0,0000.$$

Этот противоречивый с точки зрения механики вариант эпюры касательных напряжений позволяет проверить правильность вычислений.

### 3. Определение величин и направлений главных напряжений в точке *a*.

Нормальные напряжения найдены ранее:  $\sigma_x^a = \sigma_x^3 = -0,1125p$ ,  
 $\sigma_y^a = \sigma_y^3 = -0,5637p$  – сжимающие (рис. 17.24).

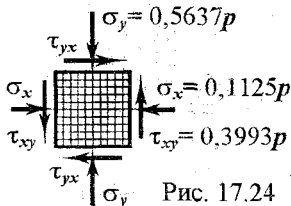


Рис. 17.24

С помощью конечно-разностного оператора (рис. 17.11) найдем касательное напряжение  $\tau_{xy}^a = \tau_{xy}^3 = -(\partial^2 \varphi / \partial x \partial y)_3 =$   
 $= (\varphi_{10} - \varphi_{12} + \varphi_{1-} - \varphi_8) / (4\Delta x \Delta y) =$   
 $= (-0,12500 - (-0,12500) - 0,02518 -$   
 $- (-0,12500))pl^2 / (4(l/4)(l/4)) = 0,3993p$ .

Напряжение положительно. Это значит, что в площадке с положительной внешней нормалью, например в правой, оно направлено в сторону соответствующей оси (*y*) – вверх.

Положения главных площадок определим по формуле (4.5):

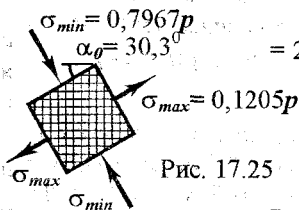


Рис. 17.25

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{xy}^a / (\sigma_x^a - \sigma_y^a) =$$

$$= 2 \cdot 0,3993p / (-0,1125p - (-0,5637p)) = 1,7717.$$

Угол  $\alpha_0 = 30,3^\circ$ . Так как угол положительный, поворачиваем элемент против хода часовой стрелки (рис. 17.25).

Главные напряжения (4.6):

$$\sigma_{\max(\min)} = (\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}) / 2 =$$

$$= (-0,1125 - 0,5637 \pm \sqrt{(-0,1125 + 0,5637)^2 + 4 \cdot 0,3993^2})p / 2 = 0,1205(-0,7967)p.$$



Наибольшее сжимающее напряжение ( $\sigma_{min} = -0,7967p$ ) лежит внутри 45-градусного сектора, где суммируются сжимающие эффекты  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Второе главное напряжение ( $\sigma_{max} = 0,1205p$ ) – в перпендикулярной площадке (рис. 17.25). Итак, главные напряжения в точке  $a$ :

$$\sigma_1 = 0,1205p; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -0,7967p.$$

4. Расчет напряжений в сечениях I–I, II–II и III–III по формулам сопротивления материалов.

Сопротивление материалов, опирающееся на фундаментальные для него гипотезы плоских сечений и ненадавливания волокон, утверждает наличие нормальных напряжений лишь в поперечных сечениях стержня. Поэтому при определении  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  следует моделировать пластинку стержнем, в котором рассматриваемое сечение является поперечным.

4.1. Нормальные напряжения в сечении I–I.

Чтобы сечение I–I было поперечным, пластинку имитируем горизонтальной балкой, подверженной вертикальной нагрузке. Балка, нагрузка и эпюры поперечной силы и изгибающего момента изображены на рис. 17.26.

В рассматриваемом сечении возникают нормальные напряжения  $\sigma_x = M_z y / J_z$ . Наибольшее  $\max \sigma_x = M_z / W_z = (3pl^2/32) / (1(3l/4)^2/6) = p$ . Эпюра “балочных” напряжений изображена сплошной линией на рис. 17.27. Там же для сравнения пунктиром показана эпюра этих же напряжений, полученная выше более точным методом (несмотря на использованную грубую сетку, решение, опирающееся на уравнения плоской задачи теории упругости, следует оценивать как более точное).

Качественно эпюры совпадают. Обе обнаруживают наличие сжатой и растянутой зон в сечении. Однако наибольшие сжимающие напряжения отличаются почти вдвое, наибольшие растягивающие – на десятки процентов.

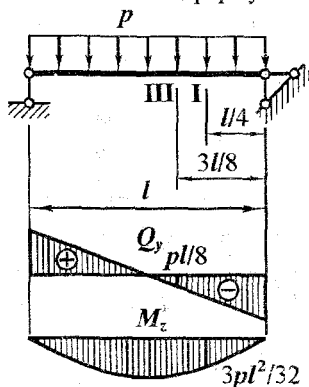


Рис. 17.26

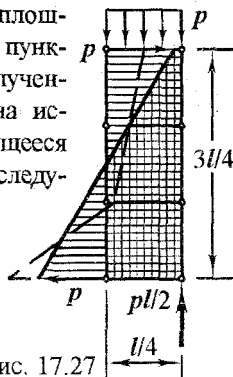


Рис. 17.27

#### 4.2. Нормальные напряжения в сечении II-II.

Для определения этих напряжений моделируем пластинку вертикальным стержнем (рис. 17.28). При такой расчетной схеме в сечении II-II возникают равномерно распределенные сжимающие напряжения  $\sigma_y = N/A = pl/(1l) = p$ .

На рис. 17.29 дано сопоставление эпюр  $\sigma_y$ , соответствующих формулам сопротивления материалов и методам теории упругости. Видно, что сопротивление материалов усредняет напряжения по сечению и не вскрывает их концентрацию вблизи действия сосредоточенных сил. Напряжения отличаются более чем вдвое при общем качественном сходстве (во всех точках сечения напряжения  $\sigma_y$  сжимающие).

Рис. 17.28

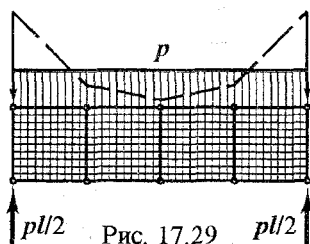


Рис. 17.29

4.3. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в сечении III-III.

Напряжения  $\tau_{xy}$  могут быть спрогнозированы по формулам сопротивления материалов моделями, приведенными на рис. 17.26 и 17.28.

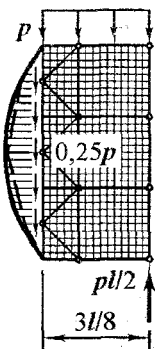
Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в поперечном сечении балки определяются формулой Журавского (7.4). В прямоугольном сечении они изменяются по параболическому закону (7.5) с максимальным значением

$$\max \tau_{xy} = 3Q_y / (2A) = 3(pl/8) / (2 \cdot 1 \cdot (3l/4)) = 0,25p.$$

Эпюра  $\tau_{xy}$  изображена на рис. 17.30 сплошной линией. Там же пунктиром показана эпюра  $\tau_{xy}$ , полученная выше. Качественное и количественное сходство эпюр располагает к доверительному восприятию результата.

Расчетная схема, приведенная на рис. 17.28, напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении III-III не обнаруживает, ибо оно является в этом случае продольным, в котором при центральном сжатии (согласно решению сопротивления материалов) ни нормальные, ни касательные напряжения не возникают.

Рис. 17.30



### 17.3. Заключение к разделу

Определение напряжений, деформаций и перемещений в элементах конструкций сводится, как правило, к решению дифференциальных уравнений – обыкновенных (стержни, осесимметрично нагруженные круглые пластинки и оболочки вращения и т.п.) или в частных производных (пластинки и оболочки при произвольной нагрузке и т.п.). Нередко приходится решать не только отдельные дифференциальные уравнения, но и их системы. Сложность и многообразие математических задач приводят к необходимости привлечения специальных разделов этой мощной и всеобъемлющей науки.

Включенный в настоящий раздел материал не претендует на полное и системное изложение методов решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям. Он направлен на формирование начального представления о некоторых простейших методах преодоления математических трудностей. В расчетной практике используют и другие методы:

- приведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному или интегральному уравнению;
- замены дифференциального уравнения вариационной задачей;
- введения малых возмущений во взаимодействующие функции (в задачах устойчивости) и многое другое.

Желающим познакомиться с перечнем и сущностью математических методов, нашедших применение в задачах механики твердого деформируемого тела, следует обратиться к специальной литературе.

## 18. Основы технической теории изгибаемых пластин

Пластины – весьма распространенный элемент строительных сооружений. Плиты перекрытий жилых, гражданских и промышленных зданий, автомобильных и железнодорожных мостов, дорожные и аэродромные покрытия, фундаментные плиты – вот далеко не полный перечень их применения. По этой причине умение численно прогнозировать их состояния под нагрузкой приобретает большую практическую значимость. В этом разделе рассмотрим прямоугольные пластины, подверженные поперечной нагрузке (рис. 18.1).

Геометрическими представителями пластины в расчетной схеме служат форма и размеры срединной плоскости и толщина.

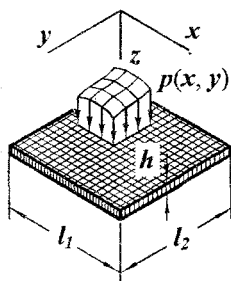


Рис. 18.1

В зависимости от соотношения размеров пластины из подразделяют на

- *толстые плиты*, если  $l_{max}/h \leq 10$ ;
- *тонкие пластинки* при  $10 \leq l_{max}/h \leq 100$ ;
- *мембраны*, у которых  $l_{max}/h \geq 100$ .

Первые из них рассчитывают с учетом всех компонентов объемного напряженного состояния; для вторых заимствуют некоторые предпосылки теории изгиба балок; в третьих игнорируют изгибную жесткость, считая, что они способны воспринимать лишь растягивающие усилия.

Вторым признаком, по которому подразделяют пластины является соотношение прогибов  $w_{max}$  и толщины  $h$ . Если

- $w_{max}/h \leq 0,2$ , пластины относят к категории *жестких*;
- $w_{max}/h \geq 0,2$ , – *гибких*.

Железобетонные плиты обычно считают жесткими, толстыми или тонкими – в зависимости от конкретных условий; стальные же, как правило, тонкие, но при одних обстоятельствах жесткими, при других гибкими.

Приведенная классификация весьма ориентировочна и категорию, к которой можно отнести конкретную плиту, следует выбирать не столько по данным выше количественным соотношениям, а по обоснованности предпосылок расчета, заложенных в теорию.

Ниже остановимся на теории тонких жестких пластин.

### 18.1. Исходные предпосылки теории тонких жестких пластин

Техническая теория основана на трех фундаментальных гипотезах<sup>1</sup>:

– *неизменности нормали* (отрезки, прямые и перпендикулярные срединной плоскости до деформации, остаются прямыми и перпендикулярными срединной поверхности после деформации);

– *ненадавливанию слоев* (напряжения, возникающие между слоями, параллельными срединной плоскости, малы и ими можно пренебречь);

– *отсутствию деформаций в срединной плоскости* (срединная плоскость пластинки рассматривают как нейтральный слой, который изгибается, но не испытывает линейных и сдвиговых деформаций).

### 18.2. Разрешающие уравнения в декартовых координатах

При расчете прямоугольных пластин удобно использовать декартовы координаты. Разрешающие уравнения включают статические, геометрические и физические условия. Сформируем их.

#### 18.2.1. Статические уравнения

Они содержат условия равновесия и условия статической эквивалентности.

<sup>1</sup> Первые две предпосылки связывают с именем Густава Роберта Кирхгофа (1824–1887) – выдающегося немецкого ученого, выпускника Кенигсбергского университета, автора многих оригинальных работ в области физики и, в частности, теории упругости.

Запишем условия равновесия элементарного параллелепипеда (рис. 18.2), выделенного двумя парами вертикальных плоскостей, параллельных осям  $x$  и  $y$ , из пластинки, изображенной на рис. 18.1.

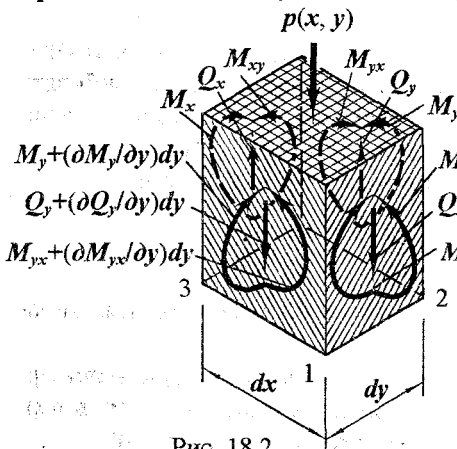


Рис. 18.2

Обобщенные внешние силы, действующие на него со стороны отброшенных частей пластинки:

- $M_x + (\partial M_x / \partial x) dx$  — поперечные силы с интенсивностями  $Q_x$  и  $Q_y$  (размерность  $H/m$ );
- $Q_x + (\partial Q_x / \partial x) dx$  — изгибающие и крутящие моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$  и  $M_{yx}$  (их размерность  $Hm/m$ );
- $M_y + (\partial M_y / \partial y) dy$  — вертикальное давление  $p(x, y)$  ( $H/m^2$ ).

Обратим внимание на правило индексации усилий:

— у поперечных сил и изгибающих моментов он связан с нормалью к площадке, в которой они действуют;

— у крутящего момента первый индекс также определяет нормаль к площадке, второй — плоскость действия момента.

Приравняем нулю сумму вертикальных сил:

$$Q_x dy + Q_y dx - (Q_x + (\partial Q_x / \partial x) dx) dy - (Q_y + (\partial Q_y / \partial y) dy) dx - p(x, y) dx dy = 0.$$

После приведения подобных членов и деления на произведение  $dx dy$  получаем

$$\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y = -p. \quad (a)$$

Второе условие равновесия — равенство нулю суммы моментов относительно ребра 1-2:

$$Q_x dy dx + M_x dy + M_{yx} dx + Q_y dx dx / 2 - (M_x + (\partial M_x / \partial x) dx) dy - (M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial y) dy) dx - (Q_y + (\partial Q_y / \partial y) dy) dx dx / 2 - p(x, y) dx dy dx / 2 = 0.$$

После: — приведения подобных членов;

— деления на произведение  $dx dy$ ;

— отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка  $(\partial Q_y / \partial y) dx / 2$  и  $p(x, y) dx / 2$  приводит к уравнению

$$\partial M_x / \partial x + \partial M_{yx} / \partial y = Q_x. \quad (б)$$

Равенство нулю суммы моментов относительно ребра 1–3 после аналогичных преобразований формируется в уравнение

$$\partial M_{xy}/\partial x + \partial M_y/\partial y = Q_y. \quad (в)$$

Вторая часть этой группы уравнений – это условия статической эквивалентности. Так, из равенства  $M_x dy = \int_h (\sigma_x (dy dz) z)$  (рис. 18.2, 18.3) следует выражение  $M_x = \int_h \sigma_x z dz$ .

Повторив аналогичные действия для остальных моментов, в итоге приходим к условиям

$$M_x = \int_h \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_h \sigma_y z dz, \\ M_{xy} = \int_h \tau_{xy} z dz, \quad M_{yx} = \int_h \tau_{yx} z dz. \quad (г) \text{ Рис. 18.3}$$

Последние два равенства с учетом свойства парности касательных напряжений показывают, что  $M_{xy} = M_{yx}$ .

### 18.2.2. Геометрические соотношения

Установим зависимость деформаций в точке от прогиба.

Рассмотрим вертикальное сечение, параллельное оси  $x$  (рис. 18.4). Произвольная точка, до деформации занимавшая положение  $a$ , после деформации сместится в  $a_1$ . Опираясь на гипотезу неизменности нормали, выразим ее горизонтальное перемещение  $u$  через прогиб  $w$ :  $u = -z\beta_x$ . Но  $\beta_x = \partial w/\partial x$ . Следовательно,  $u = -z\partial w/\partial x$ . Если рассмотреть перемещения в вертикальной плоскости, параллельной оси  $y$ , получим зависимость горизонтального перемещения  $v$  от прогиба:  $v = -z\partial w/\partial y$ . После подстановки полученных зависимостей в соотношения Коши (16.2) получаем:

$$\epsilon_x = -z\partial^2 w/\partial x^2; \quad \epsilon_y = -z\partial^2 w/\partial y^2; \quad \gamma_{xy} = -2z\partial^2 w/\partial x\partial y. \quad (д)$$

### 18.2.3. Физические зависимости

Так как теория тонких пластин опирается на гипотезу о ненадавливании слоев, материал испытывает плоское напряженное состояние (рис. 18.5). Закон Гука для него имеет вид (16.3):

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/(1-\nu^2); \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/(1-\nu^2); \\ \tau_{xy} = E\gamma_{xy}/(2(1+\nu)). \quad (е)$$

Уравнения (а) ... (е) образуют разрешающую систему.

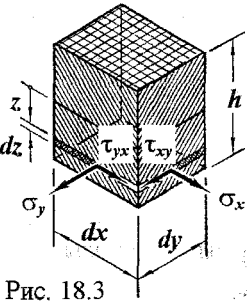


Рис. 18.3

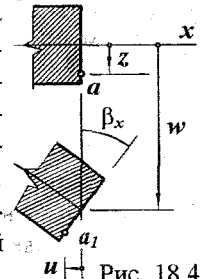


Рис. 18.4

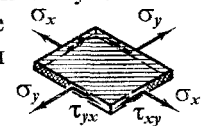


Рис. 18.5

### 18.3. Преобразования системы уравнений.

#### Расчетные формулы

Система (а)...(е) состоит из тринадцати уравнений, содержащих  
– шесть неизвестных внутренних силовых факторов:  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,

$M_y$ ,  $M_{xy}$  и  $M_{yx}$ ;

– три напряжения:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ;

– три деформации:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ ;

– одно перемещение –  $w$ .

В таком виде они сложны в реализации. Преобразуем уравнения так, чтобы максимально облегчить их использование.

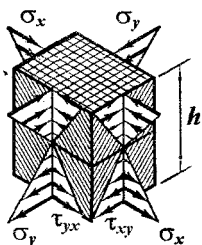


Рис. 18.6

18.3.1. Подставим равенства (д) в (е):

$$\sigma_x = -Ez(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) / (1 - \nu^2);$$

$$\sigma_y = -Ez(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2) / (1 - \nu^2);$$

$$\tau_{xy} = -Ez(\partial^2 w / \partial x \partial y) / (1 + \nu). \quad (ж)$$

Полученные выражения описывают распределение напряжений по толщине пластинки (рис. 18.6):

– в точках, расположенных с разных сторон от срединной плоскости, напряжения направлены в разные стороны;

– величина напряжения пропорциональна расстоянию от точки до срединной плоскости.

Распределение напряжений в пластинке такое же, как при изгибе балки и кручении тонкостенного стержня.

Теперь равенства (ж) подставим в условия (г):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_h \sigma_x z dz = -E(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) \int_h z^2 dz = \\ &= -Eh^3 (\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) / (12(1 - \nu^2)). \end{aligned}$$

Аналогичные равенства получаются и для других моментов. Введя обозначение

$$Eh^3 / (12(1 - \nu^2)) = D, \quad (18.1)$$

запишем их так:

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2);$$

$$M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2);$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \partial^2 w / \partial x \partial y. \quad (18.2)$$

Фигурирующая в равенствах (18.1) и (18.2) физико-геометрическая характеристика  $D$  называется *цилиндрической жесткостью* пластинки.



Выражения поперечных сил через прогибы получаются подстановкой формул (18.2) в уравнения равновесия (б) и (в):

$$\begin{aligned} Q_x &= -D\delta(\delta^2 w/\delta x^2 + \delta^2 w/\delta y^2)/\delta x; \\ Q_y &= -D\delta(\delta^2 w/\delta y^2 + \delta^2 w/\delta x^2)/\delta y. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Продолжим преобразования.

Подстановка равенств (б) и (в) в (а) исключает поперечные силы и связывает моменты уравнением

$$\delta^2 M_x/\delta x^2 + 2\delta^2 M_{xy}/\delta x\delta y + \delta^2 M_y/\delta y^2 = -p. \quad (и)$$

Если теперь в уравнение (и) подставить выражения (18.2), то после приведения подобных членов оно примет вид

$$\delta^4 w/\delta x^4 + 2\delta^4 w/\delta x^2\delta y^2 + \delta^4 w/\delta y^4 = p/D, \quad (18.4)$$

или

$$\nabla^4 w = p/D. \quad (18.4)$$

Уравнение (18.4) является условием равновесия, выраженным через прогибы.

Наконец, из формул (ж) и (18.2) с учетом обозначения (18.1) следует:

$$\sigma_x = 12M_x z/h^3, \quad \sigma_y = 12M_y z/h^3, \quad \tau_{xy} = 12M_{xy} z/h^3. \quad (18.5)$$

Наибольшие напряжения при  $z = h/2$  (рис. 18.6)

$$\max \sigma_x = 6M_x/h^2, \quad \max \sigma_y = 6M_y/h^2, \quad \max \tau_{xy} = 6M_{xy}/h^2. \quad (18.6)$$

18.3.2. Преобразованная к виду (18.1)...(18.5) система разрешающих уравнений свелась к необходимости решения лишь одного дифференциального уравнения. Последовательность расчета пластины теперь выглядит так:

- решение дифференциального уравнения (18.4);
- определение изгибающих и крутящего моментов (18.2) (поперечные силы (18.3) вызывают небольшие напряжения и поэтому здесь не названы) и выбор опасного места (нормали) в пластине;
- вычисление напряжений (18.6) в опасной точке;
- проверка прочности материала на основе соответствующей теории.

Условие жесткости может быть проверено после решения уравнения (18.4).

## 18.4. Граничные условия

Граничные условия, необходимые для определения прогибов по уравнению (18.4), отражают способ закрепления пластинки и (или) усилия на краях. Рассмотрим наиболее распространенные случаи (рис. 18.7).

### 18.4.1. Защемленный край

На этом краю должны выполняться два условия закрепления:

- отсутствие прогибов;
- отсутствие поворотов в плоскости, перпендикулярной краю.

Так, в пластинке, изображенной на рис. 18.7, граничные условия на защемленной стороне имеют вид

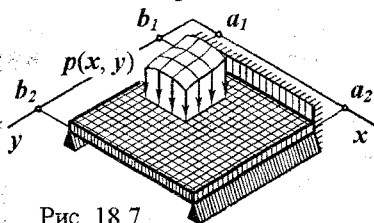


Рис. 18.7

$$w(x, b_1) = 0; \quad (\partial w / \partial y)(x, b_1) = 0. \quad (18.7)$$

### 18.4.2. Шарнирно опертый край

На шарнирной опоре отсутствуют

- прогиб;
- изгибающий момент в плоскости, перпендикулярной краю.

Первое из названных условий применительно к левому шарнирно закрепленному краю пластинки, показанной на рисунке 18.7, -

$$w(a_1, y) = 0. \quad (18.8)$$

Второе условие -  $M_x(a_1, y) = 0$ . Выразим его через функцию  $w$ . По равенству (18.2)  $M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2)$ . Следовательно,  $(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2)(a_1, y) = 0$ . Но  $(\partial^2 w / \partial y^2)(a_1, y) = 0$ , поскольку край прямой. Поэтому условие отсутствия момента сводится к равенству

$$(\partial^2 w / \partial x^2)(a_1, y) = 0. \quad (18.9)$$

Если на шарнирном краю пластинки приложен момент, условие (18.9) имеет форму равенства  $(\partial^2 w / \partial x^2)(a_1, y) = M_x(a_1, y) / D$ .

Аналогично выглядят граничные условия и для правого шарнирного края.

### 18.4.3. Свободный край

На свободном краю при отсутствии нагрузки (см. рис. 18.7)

$$Q_y(x, b_2) = 0, \quad M_y(x, b_2) = 0, \quad M_{yx}(x, b_2) = 0$$

- три условия. Однако в используемой приближенной теории, основанной на гипотезе неизменности нормали, нельзя удовлетворить одновременно первое и третье условия. Это можно объяснить тем, что вертикальные перемещения в плоскости свободного края описываются одной независимой функцией. Если, скажем, в качестве такой функции принять  $w(x, b_2)$ , то углы поворота  $\beta_x(x, b_2) = (\partial w / \partial x)(x, b_2)$  - являются следствием. Удовлетворив одно из обсуждаемых усло-

вий, в общем случае не удается приспособиться к другому. Поэтому на свободном краю граничные условия формулируют в рамках принципа Сен-Венана, объединяя поперечную силу и крутящий момент, связанные с касательными напряжениями.

По принципу Сен-Венана статически эквивалентные нагрузки в местах, удаленных от точек их действия, вызывают одинаковые напряжения. Если поперечная сила и крутящий момент образуют самоуравновешенную систему, по тому же принципу, напряжения от них будут ощутимы лишь вблизи края. Эти два утверждения и определяют процедуру объединения двух несовместимых граничных условий на свободном краю в одно:

- представить крутящие моменты парами вертикальных сил;
- из поперечной силы и крутящего момента сформировать нагрузку, статически эквивалентную нулю.

Рассмотрим свободный край, параллельный оси  $x$  (рис. 18.7, 18.8). Выберем на нем произвольного положения нормаль и два соседних с ней элементарных отрезка. Крутящий момент, действующий на левый элементарный отрезок, заменим парой вертикальных сил  $H_1$  с плечом  $dx$ :

– равнодействующий крутящий момент на этом отрезке – это произведение интенсивности на длину участка:  $M_{yx}dx$ ;

– так как момент пары равен произведению силы  $H_1$  на плечо  $dx$ , то  $H_1dx = M_{yx}dx$ , откуда  $H_1 = M_{yx}$ .

Аналогично на правом элементарном отрезке:

– результирующий крутящий момент равен  $(M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx) dx$ ;

– момент пары сил  $H_2 dx = (M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx) dx$ , откуда  $H_2 = M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx$ .

Равнодействующая поперечная сила в бесконечно малой окрестности рассматриваемой нормали равна  $Q_y dx$ .

Равнодействующая трех сил, приведенных к выбранной нормали, равна нулю:  $H_2 + Q_y dx - H_1 = 0$ , или  $M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx + Q_y dx - M_{yx} = 0$ . Условие самоуравновешенности сил принимает вид  $\partial M_{yx} / \partial x + Q_y = 0$ .

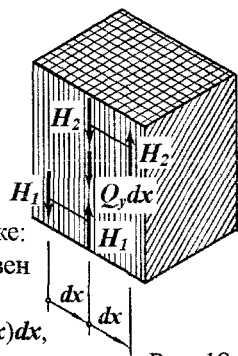


Рис. 18.8

Чтобы выразить это условие через прогиб, воспользуемся равенствами (18.2) и (18.3). Подставив их в полученное условие, приходим к требованию  $\partial(\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial x^2)/\partial y = 0$ . Добавив сюда условие равенства изгибающего момента, видим, что на свободном краю, параллельном оси  $x$ , граничные условия формируются в требовании

$$\partial(\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial x^2)/\partial y = 0, \quad \partial^2 w/\partial y^2 + \nu\partial^2 w/\partial x^2 = 0. \quad (18.10)$$

Если свободный край пластинки параллелен оси  $y$ , соответствующие граничные условия выглядят так:

$$\partial(\partial^2 w/\partial x^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial y^2)/\partial x = 0, \quad \partial^2 w/\partial x^2 + \nu\partial^2 w/\partial y^2 = 0. \quad (18.11)$$

В комментарии к граничным условиям на свободном краю следует отметить два обстоятельства:

- получаемые из решения горизонтальные и вертикальные касательные напряжения будут отличными от нуля, хотя и самоуравновешенными;

- продемонстрированное выше приведение сил к самоуравновешенной системе возможно всюду за исключением границ свободного края; это равносильно тому, что к внешней нагрузке добавлены сосредоточенные силы в углах рассматриваемого края пластинки.

Отмеченные обстоятельства, естественно, подчеркивают недостатки технической теории. Тем не менее получаемые на ее основе результаты в подавляющем числе случаев оказываются вполне приемлемыми, а возникающие при этом сомнения преодолеваются либо более строгими, либо априорными решениями.

**Пример 18.1.** Квадратная пластинка постоянной жесткости

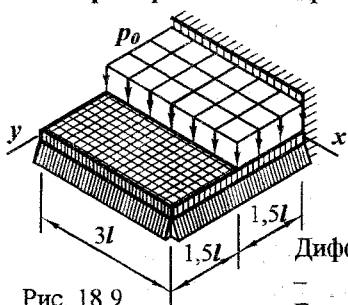


Рис. 18.9

(рис. 18.9) одним краем защемлена, тремя остальными шарнирно оперта и нагружена равномерным давлением  $p_0$  на половине площади. Построим эпюры прогибов  $w$ , изгибающих  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящего  $M_{xy}$  моментов. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Дифференциальное уравнение задачи (18.4)

$$\nabla^4 w = p_0/D. \quad (a)$$

Граничные условия на краях:

$$- x = 0 \text{ (18.8, 18.9): } w(0, y) = 0, \quad \partial^2 w/\partial x^2(0, y) = 0; \quad (б)$$

$$x = 3l: \quad w(3l, y) = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2(3l, y) = 0; \quad (\text{в})$$

$$y = 0 \text{ (18.7):} \quad w(x, 0) = 0, \quad \partial w / \partial y(x, 0) = 0; \quad (\text{г})$$

$$y = 3l: \quad w(x, 3l) = 0, \quad \partial^2 w / \partial y^2(x, 3l) = 0. \quad (\text{д})$$

Точное решение задачи (а)...(д) в аналитической форме невозможно. Воспользуемся численным методом – методом конечных разностей.

Нанесем на область задачи разностную сетку (рис. 18.10) и, учитывая симметрию, обозначим узлы:

- внутренние 1, 2;
- контурные 3, ..., 8;
- законтурные 9, ..., 12.

Запишем в конечно-разностной форме дифференциальное уравнение задачи (а). Сетка квадратная, шаги сетки  $\Delta x = \Delta y = l$ , параметр  $\alpha = \Delta x / \Delta y = 1$ .

Конечно-разностный оператор для квадратной сетки приведен на рис. 17.15 и 18.11. Дифференциальное уравнение для внутренних узлов:

$$\text{Узел 1: } 20w_1 - 8(w_3 + w_5 + w_2 + w_1) + 2(w_3 + w_4 + w_6 + w_2) + w_9 + w_{10} + w_8 + w_5 = \rho \alpha^4 / D;$$

$$\text{Узел 2: } 20w_2 - 8(w_1 + w_6 + w_8 + w_2) + 2(w_1 + w_5 + w_7 + w_8) + w_3 + w_{11} + w_{12} + w_6 = 0.$$

Граничные условия (б ... д):

Согласно первым равенствам условий:

$$w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0. \quad (\text{ж})$$

Вторые равенства условий (б), (в) и (д). Например, узел 5:

$$(\partial^2 w / \partial x^2)_5 = 0. \quad \text{Графический оператор второй производной воспроизведен на рис. 18.12. Пользуясь им, записываем } (\partial^2 w / \partial x^2)_5 = (w_1 - 2w_5 + w_{10}) / l^2 = 0,$$

откуда, учитывая равенство из (ж), имеем

$$w_{10} = -w_1. \quad \text{Нетрудно заметить, что подобные результаты будут и для других контурных узлов, расположенных на шарнирно закрепленных краях. Итак, } w_{10} = -w_1, w_{11} = -w_2, w_{12} = -w_2. \quad (\text{и})$$

$$\text{Второе условие (г) запишем для узла 3: } \partial w / \partial y = 0 \text{ (рис. 18.13) } (\partial w / \partial y)_3 = (w_1 - w_9) / 2l = 0, \text{ или } w_9 = w_1. \quad (\text{к})$$

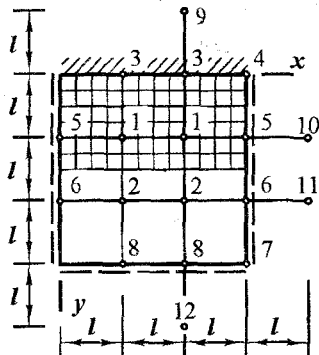


Рис. 18.10

Дифференциальное

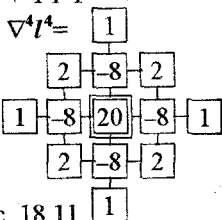


Рис. 18.11

$$\partial^2 w / \partial x^2 = \frac{1 \quad -2 \quad 1}{\Delta x^2}$$

Рис. 18.12



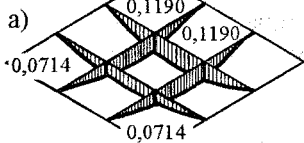
Рис. 18.13

Подстановка условий (ж)...(к) в систему (е) придает ей вид

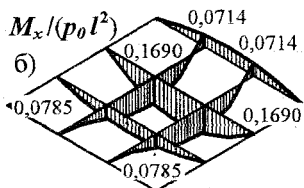
$$Dw/(p_0 l^4)$$

$$12w_1 - 6w_2 = p_0 l^4 / D,$$

$$-6w_1 + 12w_2 = 0.$$



Решение системы:  $w_1 = 0,1190 p_0 l^4 / D$ ,  $w_2 = 0,0714 p_0 l^4 / D$ . Эпюра прогиба, построенная по полученному результату и граничным условиям, изображена на рис. 18.14 а.

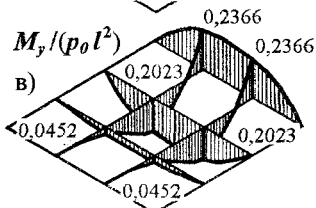


Изгибающие моменты (18.2).

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2).$$

В конечно-разностной форме:

Узел 3:  $M_{x3} = -D(w_3 - 2w_3 + w_4 + \nu(w_9 - 2w_3 + w_1)) / l^2$ . Учитывая равенства (ж) и (к), имеем  $M_{x3} = -2D\nu w_1 / l^2 = -2 \cdot 0,3 \cdot 0,1190 p_0 l^2 = -0,0714 p_0 l^2$ .



Узел 1:  $M_{x1} = -D(w_1 - 2w_1 + w_5 + \nu(w_3 - 2w_1 + w_2)) / (l^2)$ . После подстановки числовых значений прогибов получаем  $M_{x1} = 0,1690 p_0 l^2$ . Узел 2 - аналогично:  $M_{x2} = 0,0785 p_0 l^2$ . Эпюра изгибающего момента  $M_x$  приведена на рис. 18.14 б.

Момент  $M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2)$ .

Его эпюра показана на рис. 18.14 в.

Крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \partial^2 w / \partial x \partial y.$$

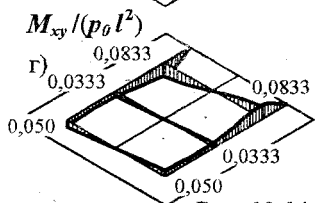


Рис. 18.14

Так как он зависит от второй смешанной производной, вычислим его в центрах конечно-разностных квадратов - точках 13, 14 и 15 (рис. 18.15), воспользовавшись конечно-разностным оператором, изображенным на рис. 18.16 с учетом выбранных направлений координатных осей.

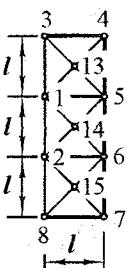


Рис. 18.15

$$\begin{aligned} \text{Узел 13: } M_{xy13} &= -D(1 - \nu)(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{13} = \\ &= -D(1 - \nu)(w_5 - w_4 + w_3 - w_1) p_0 l^4 / (4D(l/2)(l/2)) = \\ &= (1 - \nu) w_1 p_0 l^2 = (1 - 0,3) 0,1190 p_0 l^2 = 0,0833 p_0 l^2. \end{aligned}$$

Так же определяются величины крутящих моментов в узлах 14 и 15. Эпюра момента  $M_{xy}$  изображена на рис. 18.14 г.

В точках зашечленного края крутящий момент равен нулю, так как в них  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ .

Отметим особенность эпюры крутящих моментов – его неопределенность в пределах полос шириной  $l/2$ , прилегающих к шарнирным опорам. Его можно вычислить по крупной сетке, предварительно определив прогибы в необходимых узлах.

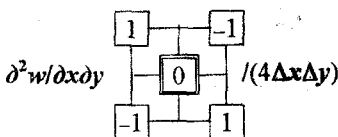


Рис. 18.16

### 18.5. Расчет прямоугольных шарнирно опертых пластин в двойных тригонометрических рядах

Точное решение уравнения (18.4) возможно для весьма ограниченного круга расчетных схем, не удовлетворяющих запросы практики. Поэтому в расчетах пластинчатых элементов строительных конструкций широкое применение нашли приближенные методы – аналитические и численные.

В качестве примера аналитического решения задачи рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую пластину, нагруженную произвольной поперечной нагрузкой (рис 18.17).

Математическая формулировка задачи такова. Найти функцию  $w(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальное уравнение (18.4)

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = p(x, y) / D$$

и граничные условия (18.8) и (18.9):

$$w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, b) = 0;$$

$$(\partial^2 w / \partial x^2)(0, y) = 0, \quad (\partial^2 w / \partial x^2)(a, y) = 0,$$

$$(\partial^2 w / \partial y^2)(x, 0) = 0, \quad (\partial^2 w / \partial y^2)(x, b) = 0.$$

Граничные условия удовлетворяются, если прогиб представить в виде ряда Фурье:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (a)$$

где  $A_{mn}$  – произвольные пока неизвестные коэффициенты.

Коэффициенты  $A_{mn}$  должны удовлетворять уравнение (18.4). Подставим выражение (a) в левую его часть. В результате получим равенство

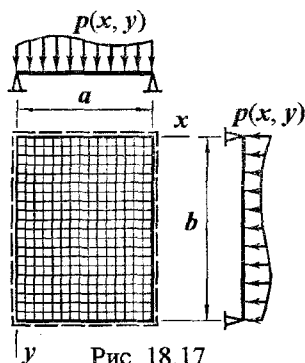


Рис. 18.17

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m\pi/a)^4 + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + (n\pi/b)^4) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) = p(x, y)/D.$$

Разложим внешнюю нагрузку в ряд Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (б)$$

Здесь  $B_{mn}$  – коэффициенты разложения определяемые по формуле<sup>1</sup>

$$B_{mn} = 4 \left( \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) dx dy \right) / (ab). \quad (в)$$

При заданной внешней нагрузке коэффициенты  $B_{mn}$  теперь определены. В дальнейшем будем считать их известными.

После разложения (б) уравнение (18.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m\pi/a)^4 + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + (n\pi/b)^4) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) / D. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях, получаем систему равенств

$$A_{mn} \pi^4 (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2 = B_{mn} / D,$$

откуда

$$A_{mn} = B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2). \quad (г)$$

После подстановки полученного равенства в разложение (а) приходим к окончательному решению

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2)) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (д)$$

При разложении (а) формулы (18.2) принимают вид

$$M_x = -\pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m/a)^2 + \nu(n/b)^2) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b);$$

$$M_y = -\pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((n/b)^2 + \nu(m/a)^2) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b);$$

$$M_{xy} = -\pi^2 D (1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (mn/ab) \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b). \quad (д)$$

Полученные выражения позволяют определить все характеристики напряженно-деформированного состояния пластинки и оценить ее прочность и жесткость.

<sup>1</sup> В справочной математической литературе приводятся числовые значения (или формулы) коэффициентов  $B_{mn}$  практически для всех зависимостей  $p(x, y)$ , так что необходимость в интегрировании отпадает.



**Пример 18.2.** Определим прогиб в центре шарнирно закрепленной по периметру квадратной пластинки от равномерного давления  $p_0$  по всей поверхности.

Обозначив длину стороны пластинки буквой  $a$ , по равенству (в) находим  $B_{mn} = 4p_0 \int_0^a \int_0^a \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/a) dx dy / a^2 = 16p_0 / (\pi^2 mn)$ .

Здесь и ниже  $m, n = 1, 3, \dots$  – нечетные числа.

Коэффициенты ряда, аппроксимирующего прогибы, ( $r$ )

$$A_{mn} = B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/a^2)^2) = 16p_0 a^4 / (\pi^6 D mn (m^2 + n^2)^2).$$

Прогиб в центре ( $d$ )

$$w(a/2, a/2) = (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{(m+n)/2-1} / (mn(m^2 + n^2)^2)).$$

Ограничимся  $m, n = 1, 3$ . Тогда

$$w(a/2, a/2) = (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) ((-1)^{(1+1)/2-1} / (1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2) + (-1)^{(1+3)/2-1} / (1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2) + (-1)^{(3+1)/2-1} / (3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2) + (-1)^{(3+3)/2-1} / (3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2)) =$$

$$= (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) (1/4 - 1/300 - 1/300 + 1/2916) = 0,00406 p_0 a^4 / D.$$

Результат точен до третьей значащей цифры – погрешность не превышает 0,2 %.

Достаточно низкая погрешность при малом числе членов ряда объясняется быстрой его сходимостью (сравни числа в последних скобках). Но при вычислении моментов (они пропорциональны вторым производным прогиба) погрешность будет выше, а поперечных сил (они пропорциональны третьим производным) еще выше. Следует отметить свойство обсуждаемого метода – с ростом числа членов ряда оно быстро приближается к функции, фигурирующей в дифференциальном уравнении, и медленнее к ее производным. При этом чем выше порядок производной, тем медленнее сходимость.

Отметим еще один фактор – вид внешней нагрузки. В рассмотренном примере она достаточно “гладкая” и хорошо аппроксимируется рядом Фурье. Аппроксимация, скажем, “сосредоточенной” силы потребовала бы значительно большего членов ряда, а вместе с этим повлекла бы и рост трудоемкости расчета.

Несмотря на отмеченные недостатки, развитие вычислительной техники выводит эти сложности из разряда принципиальных и предоставляет возможности расчетов пластинок на нагрузку практически любого вида.

## 19. Простейшие энергетические принципы и вариационные методы теории упругости

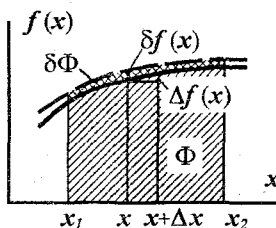
Во всех предыдущих разделах задачи о напряженно-деформированном состоянии объекта содержали статические, геометрические и физические условия и в конечном итоге сводились к дифференциальным уравнениям. Сложности интегрирования таких уравнений, как правило, вынуждали обращаться к приближенным численным методам (см. раздел 17).

Использованная ранее процедура формирования математической модели задачи не является единственно возможной. Существуют и другие пути, освобождающие от необходимости решения дифференциальных уравнений и позволяющие получать неплохие приближенные, а в некоторых случаях и точные решения.

Познакомимся с простейшими из них. Но прежде введем необходимые новые понятия.

### 19.1. Понятия вариации функции, функционала и вариации функционала

На рис. 19.1 сплошной линией изображен график функции  $f(x)$ .



Известно, что изменение функции, вызванное изменением аргумента, называют ее приращением и обозначают  $\Delta f(x)$ .

На том же рисунке пунктиром изображен график видоизмененной функции  $f(x) + \delta f(x)$ . Бесконечно малое видоизменение называют *вариацией функции* и обозначают  $\delta f(x)$ .

Рис. 19.1

**Пример 18.2.** Определим прогиб в центре шарнирно закрепленной по периметру квадратной пластинки от равномерного давления  $p_0$  по всей поверхности.

Обозначив длину стороны пластинки буквой  $a$ , по равенству (в) находим  $B_{mn} = 4p_0 \int_0^a \int_0^a \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/a) dx dy / a^2 = 16p_0 / (\pi^2 mn)$ .

Здесь и ниже  $m, n = 1, 3, \dots$  – нечетные числа.

Коэффициенты ряда, аппроксимирующего прогибы, ( $r$ )

$$A_{mn} = B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/a^2)^2) = 16p_0 a^4 / (\pi^6 D mn (m^2 + n^2)^2).$$

Прогиб в центре ( $d$ )

$$w(a/2, a/2) = (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{(m+n)/2-1} / (mn(m^2 + n^2)^2)).$$

Ограничимся  $m, n = 1, 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} w(a/2, a/2) &= (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) ((-1)^{(1+1)/2-1} / (1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2) + \\ &+ (-1)^{(1+3)/2-1} / (1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2) + (-1)^{(3+1)/2-1} / (3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2) + \\ &+ (-1)^{(3+3)/2-1} / (3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2)) = \end{aligned}$$

$$= (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) (1/4 - 1/300 - 1/300 + 1/2916) = 0,00406 p_0 a^4 / D.$$

Результат точен до третьей значащей цифры – погрешность не превышает 0,2 %.

Достаточно низкая погрешность при малом числе членов ряда объясняется быстрой его сходимостью (сравни числа в последних скобках). Но при вычислении моментов (они пропорциональны вторым производным прогиба) погрешность будет выше, а поперечных сил (они пропорциональны третьим производным) еще выше. Следует отметить свойство обсуждаемого метода – с ростом числа членов ряда оно быстро приближается к функции, фигурирующей в дифференциальном уравнении, и медленнее к ее производным. При этом чем выше порядок производной, тем медленнее сходимость.

Отметим еще один фактор – вид внешней нагрузки. В рассмотренном примере она достаточно “гладкая” и хорошо аппроксимируется рядом Фурье. Аппроксимация, скажем, “сосредоточенной” силы потребовала бы значительно большего членов ряда, а вместе с этим повлекла бы и рост трудоемкости расчета.

Несмотря на отмеченные недостатки, развитие вычислительной техники выводит эти сложности из разряда принципиальных и предоставляет возможности расчетов пластинок на нагрузку практически любого вида.

где  $p_x, p_y, X, Y$ , и  $v$  – конечные значения сил и перемещений. Слагаемое  $(-W_E)$  представляет собой изменение (уменьшение) потенциала внешней нагрузки при переходе тела из недеформированного в деформированное состояние. Обозначим  $\Pi = -W_E$ . Теперь выражение потенциальной энергии системы принимает вид

$$P_S = \Pi + U. \quad (19.4)$$

Равенство (19.2) является признаком экстремума функционала  $P_S$ . Принцип Лагранжа утверждает, что *из всех возможных перемещений в действительности реализуются те, при которых потенциальная энергия системы минимальна*<sup>1</sup>.

Из равенства (19.2) математическими преобразованиями могут быть получены условия равновесия, выраженные через перемещения, (16.6). Отсюда следует, что

– условие минимума потенциальной энергии системы есть условие равновесия;

– вариационная формулировка задачи теории упругости по точности эквивалентна традиционной статико-геометрической постановке.

### 19.3. Некоторые формулы потенциальной энергии деформации, выраженной через перемещения

В функционал Лагранжа (19.1) входит потенциальная энергия деформации. Для решения практических задач на основе принципа минимума энергии системы она должна быть выражена через перемещения. Выведем такие формулы для некоторых рассмотренных ранее объектов и видов нагружения. При выводе формул воспользуемся общим выражением потенциальной энергии деформации.

Рассмотрим элементарный параллелепипед в объемном напряженном состоянии (рис. 19.4 а). Напряженно-деформированное состояние упругого тела не зависит от характера изменения напряжений во времени. Поэтому для физической ясности выкладок примем такую программу их изменения, при которой деформации растут покомпонентно от нуля до конечных значений, оставаясь в последующем неизменными.

<sup>1</sup> Доказательство минимума здесь опущено.

Пусть на первом этапе возрастает удлинение  $\varepsilon_x$  (рис. 19.4 б), а  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ . В этом случае работу совершают напряжения  $\sigma_x$ . Соответствующая и равная ей потенциальная энергия деформации  $dU_x = \sigma_x dydz(\varepsilon_x dx)/2$ . Аналогично,  $dU_y = \sigma_y dzdx(\varepsilon_y dy)/2$ ,  $dU_z = \sigma_z dxdy(\varepsilon_z dz)/2$ .

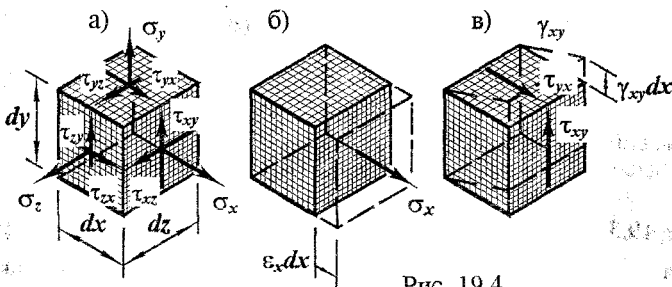


Рис. 19.4

На сдвиговой деформации  $\gamma_{xy}$  (рис. 19.4 в) работу совершают касательные напряжения  $\tau_{xy}$ ,  $dU_{xy} = \tau_{xy} dydz(\gamma_{xy} dx)/2$ . Другие компоненты касательных напряжений наращивают потенциальную энергию деформации на  $dU_{yz} = \tau_{yz} dzdx(\gamma_{yz} dy)/2$  и  $dU_{zx} = \tau_{zx} dxdy(\gamma_{zx} dz)/2$ . Суммируя полученные части энергии и интегрируя по объему тела, получаем

$$U = 0,5 \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (19.5)$$

На эту формулу будем опираться, рассматривая частные случаи.

### 19.3.1. Пластинка, нагруженная в своей плоскости

Для плоского напряженного состояния формула (19.5) принимает вид

$$U = 0,5 \iint_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy.$$

Выразив напряжения через деформации по закону Гука (16.3) и деформации через перемещения по соотношениям Коши (16.2), имеем

$$U = 0,5 E \iint_A \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) / (1-\nu) + 0,5 (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2 dx dy. \quad (19.6)$$

Для плоской деформации константы  $E$  и  $\nu$  следует заменить на  $E_I$  и  $\nu_I$  согласно равенствам (16.4).

### 19.3.2. Пластинка, изгибаемая поперечной нагрузкой

В изгибаемой пластинке продольные перемещения  $u$  и  $v$  выражаются через прогибы  $w$  так:  $u = -z\partial w/\partial x$ ,  $v = -z\partial w/\partial y$ . После подстановки этих равенств в формулу (19.6) и интегрирования по толщине пластинки приходим к выражению

$$U = 0,5D \int_A [(\partial^2 w/\partial x^2)^2 + 2\nu(\partial^2 w/\partial x^2)(\partial^2 w/\partial y^2) + (\partial^2 w/\partial y^2)^2 + 2(1-\nu)(\partial^2 w/\partial x\partial y)^2] dx dy. \quad (19.7)$$

В этой формуле отброшена потенциальная энергия, связанная с касательными напряжениями  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

### 19.3.3. Стержневой элемент конструкции

19.3.3.1. Потенциальная энергия деформации балки определяется равенством (7.20):  $U = \int_l M_x^2 dz / (2EJ_x)^2$ . Подставив сюда закон Гука при изгибе (7.23)  $M_x = EJ_x v''$ , получаем формулу

$$U = 0,5EJ_x \int_l (v'')^2 dz. \quad (19.8)$$

Здесь также отброшена часть потенциальной энергии деформации, связанная со сдвигами.

19.3.3.2. Аналогичные формулы при кручении (6.11), (6.12) и (6.14) приводят к равенству

$$U = 0,5GJ_p \int_l (\varphi')^2 dz. \quad (19.9)$$

19.3.3.3. Для осевого растяжения и сжатия подобные подстановки дают такое выражение потенциальной энергии деформации:

$$U = 0,5EA \int_l (w')^2 dz. \quad (19.10)$$

Напомним, что при нескольких участках на стержне (или нескольких стержнях в конструкции) формулы (19.8), (19.9) и (19.10) следует применять к каждому участку (стержню) отдельно. Вынесенные за знаки интегралов соответствующие жесткости означают, что формулы применимы к стержням постоянного сечения.

С целью иллюстрации соотношений энергетических категорий, входящих в выражение (19.1), и методики использования принципа рассмотрим примеры.

**Пример 19.1.** На рис. 19.5 изображена консольная балка, нагруженная силой  $F$ . Проследим за изменениями потенциала внешних сил  $\Pi$ , потенциальной энергии деформаций балки  $U$  и потенциальной энергии системы  $P_S$ .

Уравнение изогнутой оси балки (см. пример 7.9)

$$v = F(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x).$$

Прогиб на конце  $v_0 = Fl^3/(3EJ_x)$ , отсюда  $F = 3EJ_x v_0/l^3$ . Исключив силу

из уравнения изогнутой оси, имеем  $v = v_0(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/l^3$ , где  $v_0$  является параметром. Изменяя его, будем описывать качественно подобные, но количественно различные эпюры прогибов.

Изменение потенциала внешней нагрузки. Поскольку в принципе Лагранжа внешняя нагрузка остается постоянной на вариациях перемещений, с ростом  $v_0$  потенциал силы уменьшается:  $\Pi = -Fv_0$ . На рис. 19.6 зависимость  $\Pi$  от  $v_0$  описывается нисходящей прямой.

Потенциальная энергия деформации балки (19.8)

$$U = 0,5EJ_x \int_0^l (v'')^2 dz = 0,5EJ_x \int_0^l (3v_0z/l^3)^2 dz = 3EJ_x(v_0)^2/(2l^3).$$

Она положительна и растет пропорционально квадрату параметра  $v_0$  — верхняя пунктирная линия на рис. 19.6.

Потенциальная энергия системы

$$P_S = \Pi + U = -Fv_0 + 3EJ_x(v_0)^2/(2l^3)$$

— также квадратная парабола, но не монотонная (сплошная линия на рис. 19.6). Ее минимум, определяемый равенством

$$dP_S/dv_0 = -F + 3EJ_x v_0/l^3 = 0,$$

достигается при  $v_0 = Fl^3/(3EJ_x)$  — точном значении.

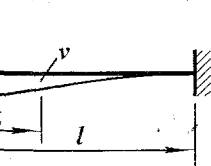


Рис. 19.5

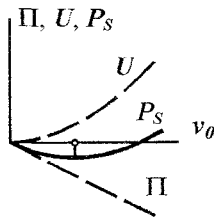


Рис. 19.6

**Пример 19.2.** Найдем максимальный прогиб и построим эпюру изгибающего момента в балке, показанной на рис. 19.7 а.

Так как интенсивность  $q = const$ , момент описывается квадратной параболой. Но  $M_x = EJ_x v''$ . Прогибы описываются полиномом четвертой степени типа  $v = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$ . Воспользуемся симметрией расчетной схемы: выберем начало координат посередине балки и отбросим в выражении  $v$  кососимметричные слагаемые — примем  $v = a_0 + a_2z^2 + a_4z^4$ .

Выбранная функция непрерывна с непрерывной производной.

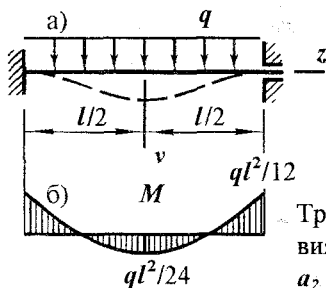


Рис. 19.7

Но для того, чтобы она описывала возможные перемещения, необходимо удовлетворить условия закрепления балки  $v(l/2) = 0$ ,  $v'(l/2) = 0 \Rightarrow$

$$v(l/2) = a_0 + a_2 l^2/4 + a_4 l^4/16 = 0,$$

$$v'(l/2) = a_2 l + a_4 l^3/2 = 0.$$

Три коэффициента связаны двумя условиями. Выразим два из них через третий:  $a_2$  и  $a_4$  через  $a_0$ . Опустив процедуру решения системы, запишем итог:  $a_2 = -8a_0/l^2$ ,

$a_4 = 16a_0/l^4$ . Итак, все возможные перемещения описываются функцией  $v = a_0(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4)$ .

Сформируем функционал Лагранжа – потенциальную энергию системы. Изменение потенциала внешней нагрузки

$$\Pi = -\int_l q \cdot v \, dz = -2q \int_0^{l/2} (a_0(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4)) \, dz = -8qla_0/15.$$

Потенциальная энергия деформации балки

$$U = 0,5EJ_x \int_l (v'')^2 \, dz = 2 \cdot 0,5EJ_x \int_0^{l/2} a_0^2 (-16/l^2 + 192z^2/l^4)^2 \, dz = 512EJ_x a_0^2 / (5l^3).$$

Потенциальная энергия системы

$$P_S = \Pi + U = -8qla_0/15 + 512EJ_x a_0^2 / (5l^3).$$

Она минимальна, если  $\partial P_S / \partial a_0 = -8ql/15 + 1024EJ_x a_0 / (5l^3) = 0$ . Отсюда находим  $a_0 = ql^4 / (384EJ_x)$ .

Прогиб описывается функцией  $v = ql^4(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4) / (384EJ_x)$ .

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(0) = ql^4 / (384EJ_x)$ .

Изгибающий момент (рис. 19.7 б)  $M = EJ_x v'' = q(z^2/2 - l^2/24)$ .

#### 19.4. Принцип минимума дополнительной энергии<sup>1</sup> (принцип Кастильяно)

Вновь обратимся к пластинке единичной толщины (рис. 19.2) в условиях плоского напряженного состояния. В ней возникают

- напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ;
- деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ ;
- перемещения  $u$  и  $v$ .

<sup>1</sup> Рассмотрен простейший вариант принципа.



Зададим вариации напряжений  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$  и  $\delta\tau_{xy}$  так, чтобы

- они удовлетворяли условиям равновесия внутри пластинки;
- были нулевыми на границе  $L_p$ , где заданы внешние силы;
- могли иметь любые значения на границе  $L_u$ , где на пластинку наложены связи.

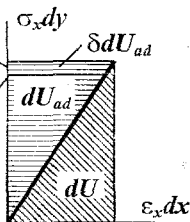
Таким образом, вариации напряжений представляют собой самоуравновешенную систему.

Так как пластинка находится в равновесии, то сумма работ вариаций сил, приложенных к элементарным параллелепипедам, на всех возможных перемещениях равна нулю. Примем в качестве возможных действительные перемещения  $u$  и  $v$ .

Работа вариаций внутренних сил

$$\delta W_I = - \iint_A (\delta\sigma_x \varepsilon_x + \delta\sigma_y \varepsilon_y + \delta\tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = 0. \quad (a)$$

Подынтегральное выражение представляет собой вариацию *дополнительной энергии*. Геометрическим образом ее является горизонтально заштрихованный треугольник на рис. 19.8. Но  $\delta W_I = -\delta U_{ad}$ .



У линейно упругого тела потенциальная энергия деформации и дополнительная энергия равны:  $U_{ad} = U$ . Поэтому равенство (a) можно записать так:  $\delta U = 0$ . Рис. 19.8

Равенство (19.11) является признаком экстремума функционала  $U$ . Принцип Кастильяно утверждает, что *из всех статически возможных усилий в действительности реализуются те, при которых потенциальная энергия деформации минимальна*<sup>1</sup>.

Из равенства (19.11) математическими преобразованиями могут быть получены условия совместности деформаций. Отсюда следует, что условие минимума потенциальной энергии деформации есть условие сплошности тела.

В статически определимых конструкциях, не имеющих избыточных связей, статически возможное распределение усилий единственно. Оно определяется условиями равновесия. В статически же неопределимых системах, где число уравнений равновесия меньше числа определяемых усилий, существует бесчисленное множество разных статически допустимых усилий. Принцип Кастильяно в таких случаях дает возможность сформировать недостающие условия.

<sup>1</sup>Доказательство минимума здесь также опущено.

Для иллюстрации техники использования принципа рассмотрим примеры расчета стержневых систем.

**Пример 19.3.** Построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента в балке, показанной на рис. 19.9 а.

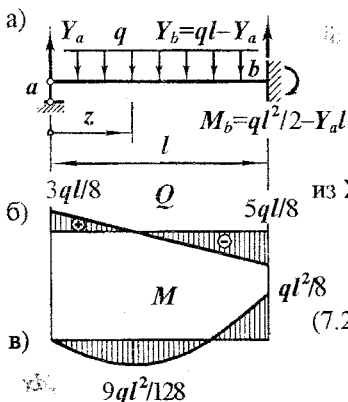


Рис. 19.9

Первый этап решения задачи – формирование условий статической возможности, вытекающих из уравнений равновесия<sup>1</sup>.

$$\text{Из } \Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_b = ql - Y_a;$$

$$\text{из } \Sigma \text{mom} = 0 \Rightarrow M_b = ql^2/2 - Y_a l \text{ (рис. 19.9 а).}$$

Изгибающий момент в балке

$$M = qz^2/2 - Y_a z.$$

Потенциальная энергия деформации

$$(7.20)^2 \quad U = \int_0^l M^2 dz / (2EJ_x) =$$

$$= \int_0^l (qz^2/2 - Y_a z)^2 dz / (2EJ_x) =$$

$$= (ql^5/20 - Y_a ql^4/4 + Y_a^2 l^3/3) / (2EJ_x).$$

Условие минимума потенциальной энергии деформации

$$dU/dY_a = (-ql^4/4 + 2Y_a l^3/3) / (2EJ_x) = 0 \text{ приводит к решению } Y_a = 3ql/8.$$

Построенные по этой реакции эпюры  $Q$  и  $M$  изображены на рис. 19.9 б, в.

**Пример 19.4.** Построим эпюру изгибающих моментов в раме, изображенной на рис. 19.10 а.

Рама имеет две избыточные связи – пять опорных реакций связаны тремя условиями равновесия. Выразим реакции в заделке через  $X_b$  и  $Y_b$  (рис. 19.10 б). Из  $\Sigma X = 0 \Rightarrow X_a = F - X_b$ ; из  $\Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_a = Y_b$ ; из  $\Sigma \text{mom} = 0 \Rightarrow M_a = Fl - 2X_b l$ .

<sup>1</sup> В данном простейшем примере можно обойтись без составления и решения уравнений равновесия. Но так как в общем случае это необходимо, этап включен в иллюстрации.

<sup>2</sup> В методе Кастильяно потенциальную энергию деформации нужно выражать через усилия.

Изгибающие моменты в раме:  $M_1 = Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1$ ,  
 $M_2 = Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2$ ;  $M_3 = X_b s_3$ .

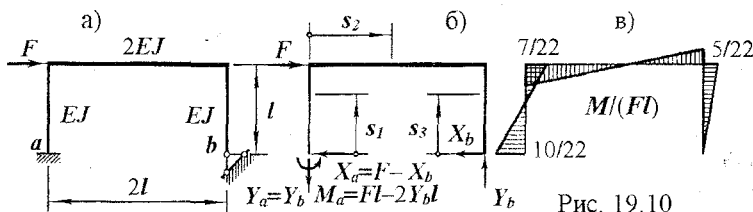


Рис. 19.10

Потенциальная энергия деформации (7.20)

$$U = \int_l M^2 dz / (2EJ_x) = \int_0^l M_1^2 ds_1 / (2EJ) + \int_0^{2l} M_2^2 ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \int_0^l M_3^2 ds_3 / (2EJ).$$

Условие минимума потенциальной энергии деформации —  
 $\partial U / \partial X_b = 0$ ,  $\partial U / \partial Y_b = 0$ .

Чтобы избежать процедуры возведения в квадрат многочленов, описывающих изгибающие моменты, продифференцируем подынтегральные выражения по искомым реакциям:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial X_b = & 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1)(s_1) ds_1 / (2EJ) + \\ & + 2 \int_0^{2l} (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2)(l) ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (X_b s_3)(s_3) ds_3 / (2EJ) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial U / \partial Y_b = & 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1)(-2l) ds_1 / (2EJ) + \\ & + 2 \int_0^{2l} (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2)(-2l + s_2) ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (X_b s_3)(0) ds_3 / (2EJ) = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования и некоторых сокращений условия минимума потенциальной энергии деформации свелись к двум уравнениям:

$$-10X_b + 12Y_b - F = 0;$$

$$-6X_b + 16Y_b - 3F = 0.$$

Из этих уравнений находим  $X_b = 5F/22$ ,  $Y_b = 3F/22$ . Построенная по этим реакциям эпюра моментов показана на рис. 19.10 в.

Обобщая планы решения последних задач, видим, что они содержат два принципиальных этапа:

- введение условий статической совместимости усилий;
- минимизацию потенциальной энергии деформации по независимым усилиям, которая приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Порядок системы уравнений равен числу избыточных связей, наложенных на конструкцию (степени статической неопределенности системы). После определения реакций “лишних” связей вычисления характеристик напряженно-деформированного состояния, как правило, уже не представляет трудностей.

Рассмотренные выше энергетические принципы Лагранжа и Кастильяно являются простейшими принципами теории упругости. Принцип Лагранжа основан на вариации перемещений и использует условия равновесия для доказательства минимума функционала. Принцип Кастильяно построен на вариации напряжений и привлекает условия неразрывности деформаций (напомним, что рассмотренный здесь частный случай вытекает из дополнительных ограничений на вариации напряжений).

В теории упругости используют и другие более общие энергетические принципы, основанные на вариациях:

- перемещений и напряжений (Рейсснера);
- напряжений, деформаций и перемещений (Ху–Васидзу).

Они также приводят задачу к минимизации функционала.

Рассмотренные выше задачи статики деформируемых конструкций не охватывают сферы приложения энергетических принципов и основанных на них методов расчета. Энергетические методы нашли применение в задачах

- устойчивости форм равновесия, равновесия и движения;
- динамического действия нагрузки;
- оценки несущей способности конструкций и др.

Отметим, что отказ от закона Гука и введение в доказательство нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями позволил обобщить энергетические принципы на физически нелинейные конструкции. При этом перечень конструкций и видов воздействий, поддающихся анализу, практически не уменьшился.

Таким образом, энергетические методы расчета являются очень мощным средством механики твердого деформируемого тела.

Пожалуй, основными достоинствами энергетических методов являются широкие возможности получения приближенных решений. В этих методах обычно мягче формулируются граничные условия, а вместе с этим смягчаются и расчетные трудности.

Познакомимся с одним из таких приближенных методов.

## 19.5. Формулировка вариационной задачи.

### Метод Ритца

Задачам поиска функций, сообщающих функционалу экстремальное значение, посвящен раздел математики, называемый вариационным исчислением. Классическая задача этого раздела формулируется так:

- дан функционал  $\Phi(f(x, y))$ ;
- найти функцию  $f(x, y)$ , при которой данный функционал принимает экстремальное значение.

Сравнивая эту абстрактную математическую формулировку с формулировками принципов Лагранжа и Кастильяно, видим, что последние полностью вписываются в вариационную постановку задачи.

В 1909 г. немецкий ученый Вальтер Ритц предложил приближенный метод поиска функции  $f(x, y)$ . Сущность метода Ритца созвучна идее методов аппроксимирующих функций. Искомую функцию представляют в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y), \quad (19.12)$$

где  $f(x, y)$  – функция, при которой функционал  $\Phi$  принимает экстремальное значение;

$\psi_i(x, y)$  – аппроксимирующие (базисные) функции, удовлетворяющие оговоренные условия энергетического принципа:

- неразрывности деформаций и закрепления тела в принципе Лагранжа;

- равновесия в принципе Кастильяно;

$a_i$  – коэффициенты, подлежащие определению;

$n$  – число членов ряда.

Подстановка разложения (19.12) в выражение потенциальной энергии системы или потенциальной энергии деформации переводит ее в категорию функции  $\Phi = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Условия минимума функционала имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0. \quad (19.13)$$

В рассматриваемых задачах теории упругости условия (19.13) являются системой линейных алгебраических уравнений  $n$ -го порядка с неизвестными  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Решение системы позволяет найти приближенно функцию (19.12).

Для иллюстрации приведем пример<sup>1</sup>.

**Пример 19.5.** Найдем максимальный прогиб в квадратной пластинке, подверженной равномерному давлению по всей поверхности (рис. 19.11). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

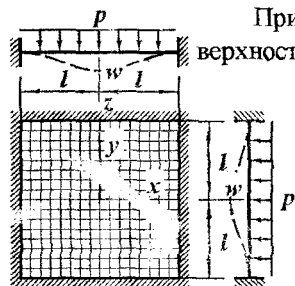


Рис. 19.11

Примем уравнение изогнутой срединной поверхности в виде  $w = a(1 + \cos(\pi x/l))(1 + \cos(\pi y/l))$ . (а)

Функция (а) непрерывна с непрерывными и конечными производными, удовлетворяет условиям закрепления пластинки:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm l;$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm l.$$

Подставив выражение (а) в формулу (19.7) и выполнив интегрирование, получаем  $U = 4\pi^4 D a^2 l^2$ .

Изменение потенциала внешней нагрузки  $\Pi = -4 \int_0^l \int_0^l p w dx dy = -4 p a l^2$ .

Потенциальная энергия системы  $P_S = \Pi + U = -4 p a l^2 + 4 \pi^4 D a^2 l^2$ . Она минимальна, если  $dP_S/da = -4 p l^2 + 8 \pi^4 D a l^2 = 0$ , откуда  $a = p l^4 / (2 \pi^4 D)$ . Прогиб  $w_{max} = w(0,0) = 2 p l^4 / (\pi^4 D)$ . Погрешность менее 2 %.

Несмотря на достаточную точность полученного  $w_{max}$ , заметим, что внутренние силовые факторы, найденные по выражению (а), будут отличаться от точных значений на десятки процентов. В таких случаях следует брать больше слагаемых в ряду (19.12).

<sup>1</sup> Пример позаимствован из книги "Расчеты на прочность в машиностроении". т. II. /С.Д.Пономарев, В.Л.Бидерман, К.К.Лихарев и др.; Под ред. С.Д.Пономарева. - М.: Машиз, 1958. - 974 с.

Владимир Андреевич Икрин

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Конспект аудиторных занятий

Учебное пособие для студентов  
архитектурно - строительного факультета  
специальности 290300 -  
“Промышленное и гражданское строительство”

Техн. редактор А. В. Миних

Издательство Южно - Уральского  
государственного университета

---

ИД № 00200 от 28.09.99. Подписано в печать 10.10.2001. Формат  
60x84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,5. Ти-  
раж 200 экз. Заказ 294/24.

---

ООО “ТРАМП”. 454092, г. Челябинск, ул. Воровского, 41.

---