

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

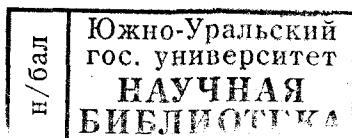
539.3/.6(07)
И425

В.А.Икрин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Учебное пособие
Часть IV

5172



Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2002

УДК 539.3(075.8) +624.042 (075.8)

В.А.Икрин. Основы теории предельного равновесия: Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – ч. IV. – 48 с.

Составлено в соответствии со следующими документами:

– государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования 1994 и 2000 гг.

– требованиями к минимуму содержания и уровня подготовки инженера по специальности 290300 – “Промышленное и гражданское строительство”;

– рабочей программой дисциплины “Сопротивление материалов” для подготовки дипломированных специалистов по специальности 290300.

Приведены фундаментальные теоремы и методы расчетов конструкций по несущей способности. Классические методы дополнены безытерационным алгоритмом расчета кинетики деформирования. Теоретический материал проиллюстрирован примерами.

Пособие ориентировано на студентов, изучающих курсы сопротивления материалов и строительной механики. Может быть использовано при курсовом и дипломном проектировании.

Отпечатано с оригинала автора.

Ил. 25.

Одобрено учебно-методической комиссией архитектурно-строительного факультета.

Рецензенты: И.А.Иванов, В.И.Симонов.

ISBN 5-696-01974-9

© Издательство ЮУрГУ, 2002

Право тиражирования принадлежит автору и охраняется законом РФ.

Оглавление

Предисловие.....	5
Основные буквенные обозначения.....	6
20. Основы теории предельного равновесия.....	7
20.1. Особенности работы упругопластических конструкций	
20.1.1. Зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии. Диаграмма Прандтля.....	8
20.1.2. Монотонное нагружение конструкции.....	10
20.1.3. Остаточные напряжения и деформации после разгрузки.....	13
20.1.4. Характеристики напряженно-деформированного состояния. Соотношения между ними. Свойства характеристик.....	14
20.2. Статический метод расчета упругопластических конструкций.....	17
20.2.1. Статическая теорема теории предельного равновесия.....	17
20.2.2. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси балки.....	19
20.2.3. Несущая способность сечений балок.....	20
20.2.4. Расчетные соотношения статического метода теории предельного равновесия балок и плоских рам.....	22
20.2.5. Примеры расчета балок статическим методом.....	23
20.2.6. Жордановы преобразования систем линейных равенств.....	24
20.2.7. Алгоритм расчета предельного параметра нагрузки статическим методом.....	25

20.3. Кинематический метод расчета	
упругопластических конструкций.....	28
20.3.1. Кинематически возможные пластические деформации.	
Механизмы разрушения	28
20.3.2. Кинематическая теорема	
теории предельного равновесия.	
Алгоритм расчета разрушающей нагрузки	
кинематическим методом	30
20.3.3. Примеры расчетов балок кинематическим методом	
при известных механизмах разрушения	34
20.3.4. Пример расчета плоской рамы	
перебором возможных механизмов разрушения	35
20.3.5. Система условий задачи	
кинематического метода расчета	
балок и плоских рам.....	37
20.3.6. Пример расчета балки	
по формализованному алгоритму	38
20.3.7. Пример расчета железобетонной плиты	40
20.4. Расчет кинетики деформирования	
– статико-кинематический метод	42
20.4.1. Решение задачи теории предельного равновесия	
шарнирно-стержневой системы.....	42
20.4.2. Формулы расчета кинетики деформирования	
балок и плоских рам.	
Пример расчета несущей способности	
двухпролетной балки.....	45
Заключение	48

Предисловие

Большая часть приведенного ниже материала перепечатана из ранее опубликованного учебного пособия¹, где основные положения теории предельного равновесия выполняли вводную функцию. В то же время во многих нормативных и руководящих изданиях содержатся рекомендации и требования о расчете строительных конструкций по несущей способности. По этой причине теория предельного равновесия представляет самостоятельный интерес и практическую значимость.

В пособие включены фундаментальные статическая и кинематическая теоремы и основанные на них методы. Дано понятие о линейном программировании, как средстве решения задачи о несущей способности конструкции. Классические методы дополнены алгоритмом расчета кинетики деформирования, который, с одной стороны, использует и статический, и кинематический критерии несущей способности и, с другой, дает более полную информацию о напряжениях, деформациях и перемещениях в конструкции в допредельных и предельном состояниях.

Теоретический материал проиллюстрирован примерами расчета балок, плоской рамы и железобетонной плиты.

Автор выражает благодарность директору ООО "Уральская строительная компания" А.В.Котову за спонсорскую помощь, обеспечившую возможность подготовки, оформления и издания учебного пособия, и безвозмездную его передачу в фонд библиотеки университета.

¹ В.А.Икрин. Расчет балок и плоских рам на повторно-переменные нагрузки. Учебное пособие. – Челябинск: ЧПИ, 1985. – 84 с.

Основные буквенные обозначения

A — площадь;	p — давление, символ пластичности;
E — модуль упругости;	q — интенсивность нагрузки;
F — сила;	r — символ остаточного;
J — момент инерции;	u — символ предельного;
M — момент;	v — перемещение;
N — продольная сила;	w — прогиб;
R — расчетное сопротивление;	Δ — приращение;
V — объем;	Π — плоскость;
W — работа;	δ — перемещение;
X — реакция избыточной связи;	ε — относительное удлинение;
e — символ упругости;	κ — кривизна;
d — диаметр;	λ — индекс текучести;
h — высота, толщина;	φ — функция текучести;
l — длина;	θ — угол поворота в пластическом шарнире;
	σ — нормальное напряжение;

20. Основы теории предельного равновесия

Постоянное стремление к снижению материалоемкости при одновременном обеспечении необходимой надежности конструкции заставляет полнее использовать резервы прочности. Одним из путей в этом направлении является учет пластических свойств материала. Достижения в области материаловедения, экспериментальной методики и техники, широкое внедрение в практику расчета и проектирования мощных ЭВМ создали необходимые условия для повышения точности прогнозирования работы реальных конструкций. Не случайно методы анализа, базирующиеся на теории пластичности и ползучести, в настоящее время нашли широкое распространение.

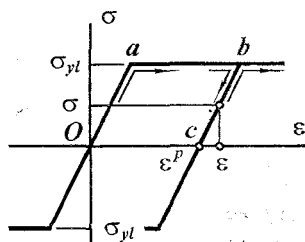
Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в поведении конструкции, испытывающей пластические деформации, обнаруживается ряд специфических особенностей. Реакция ее на внешнее воздействие оказывается совсем не такой как в упругой стадии. Для того чтобы на этапе расчета конструкции правильно предсказать работу ее в условиях эксплуатации, необходимо выявить своеобразные эффекты, связанные с наличием пластических деформаций, и вскрыть порождающие их причины.

В монографиях отечественных и зарубежных ученых сформулированы и доказаны фундаментальные теоремы, позволяющие оценить несущую способность конструкции, не прослеживая процесса деформирования от начала нагружения до разрушения. Ниже приведены эти теоремы (без доказательств), изложены точные и приближенные методы расчетов разрушающих нагрузок.

20.1. Особенности работы упругопластических конструкций

20.1.1. Зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии. Диаграмма Прандтля

Для теоретических расчетов конструкций связь между напряжениями и деформациями необходимо описать математическими функциями. Не останавливаясь на перечислении видов используемых функций, отметим, что в расчетной практике широкое распространение получила диаграмма растяжения-сжатия, аппроксимированная прямыми (рис. 20.1). В литературе ее называют по имени автора



диаграммой Прандтля, а материал *идеальным упругопластическим*. У большинства пластичных материалов диаграммы растяжения и сжатия близки друг к другу, и их можно считать одинаковыми.

Рис. 20.1

Опишем зависимость деформации ϵ идеального упругопластического материала от напряжения σ . Начальное нагружение (участок Oa) характерно тем, что до предела текучести σ_{yl} напряжение и деформация связаны законом Гука $\sigma = E\epsilon$. Как только напряжение станет равным σ_{yl} , удлинение может расти до любой величины (участок ab). То же самое происходит при сжатии.

Линия разгрузки (bc) – прямая, параллельная участку Oa . При разгрузке (точка c) удлинение полностью не исчезло. Оставшуюся после разгрузки часть обозначим ϵ^P и будем называть *пластической деформацией*. Запишем связь деформации с напряжением в виде

$$\varepsilon = \sigma/E + \varepsilon^p. \quad (20.1)$$

Первое слагаемое в правой части обозначим

$$\sigma/E = \varepsilon^e \quad (20.2)$$

и будем называть *упругой* деформацией. Из соотношения (20.2) видно, что упругая деформация изменяется пропорционально напряжению. При этом не имеет значения, где находится точка, отображающая состояние материала, — на прямой *ab* или *bc*.

Изменение пластической деформации происходит, когда напряжение достигнет предела текучести. Если, $\sigma - \sigma_{yl} < 0$ то, $\Delta\varepsilon^p = 0$, если же $\sigma - \sigma_{yl} = 0$, то $\Delta\varepsilon^p \geq 0$ (пластическое удлинение). В тех случаях, когда $-\sigma - \sigma_{yl} < 0$, $\Delta\varepsilon^p = 0$; при $-\sigma - \sigma_{yl} = 0$ приращение $\Delta\varepsilon^p \leq 0$. Запишем эти соотношения короче. Обозначим

$$\sigma - \sigma_{yl} = \varphi_1, \quad -\sigma - \sigma_{yl} = \varphi_2 \quad (20.3)$$

и будем называть φ *функциями текучести*. Так как $-\sigma_{yl} \leq \sigma \leq \sigma_{yl}$, то

$$\varphi_1 \leq 0, \quad \varphi_2 \leq 0. \quad (20.4)$$

Приращения пластических деформаций запишем в виде.

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2. \quad (20.5)$$

Фигурирующие в равенстве λ назовем *индексами текучести*; $\Delta\lambda_1 > 0$ соответствует удлинению, $\Delta\lambda_2 > 0$ — укорочению. Теперь деформирование материала можно описать так:

$$\varphi_1 \Delta\lambda_1 = 0, \quad \varphi_2 \Delta\lambda_2 = 0 \quad (20.6)$$

при

$$\Delta\lambda_1 \geq 0, \quad \Delta\lambda_2 \geq 0. \quad (20.7)$$

Равенства (20.6) отражают тот факт, что пластическая деформация может изменяться только при достижении напряжением предела текучести, когда $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_2 = 0$. Ограничения на знаки приращений индексов текучести определяют режимы течения. При $\varphi_1 = 0$, рост пластической деформации возможен в положительную сторону, при $\varphi_2 = 0$ — в отрицательную. Заметим, что соотношения (20.6) и (20.7) устанавливают лишь условия изменения и знаки приращений пластической деформации. По ним нельзя найти величины $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$, а следовательно, и $\Delta\varepsilon^p$.

20.1.2. Монотонное нагружение конструкции

Рассмотрим простейшую конструкцию (рис. 20.2 а), состоящую из жесткой балки и четырех деформируемых стержней, нагруженную силой F . Длины l и площади A сечений стержней одинаковы; материал идеальный упругопластический. Проследим за изменениями напряжений в стержнях и перемещением точки a в процессе роста силы до разрушающего значения.

Уравнения равновесия (рис. 20.2 б) имеют вид:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = F; \quad N_2 c + 2N_3 c + 3N_4 c = Fc.$$

После сокращения на c и деления на A приходим к равенствам

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = F/A, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 = F/A. \quad (20.8)$$

Условия совместности деформаций (рис. 20.2 в) можно записать так:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1/3 + \Delta l_4/3, \quad \Delta l_3 = \Delta l_1/3 + 2\Delta l_4/3.$$

После деления на $l/3$ имеем:

$$3\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \quad 3\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_4. \quad (20.9)$$

Заметим, что равенства (20.8) и (20.9) не зависят от наличия и степени развития пластических деформаций.

20.1.2.1. Упругая стадия. В начале нагружения все стержни работают упруго, справедлив закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/E, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3/E, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4/E. \quad (a)$$

Из этого равенства и соотношений (20.9) следует: $3\sigma_2 = 2\sigma_1 + \sigma_4$, $3\sigma_3 = \sigma_1 + 2\sigma_4$. Добавляя их к уравнениям (20.8) и решая систему, получаем:

$$\sigma_1 = 0,4F/A, \quad \sigma_2 = 0,3F/A,$$

$$\sigma_3 = 0,2F/A, \quad \sigma_4 = 0,1F/A. \quad (20.10)$$

Перемещение точки a $\delta_a = \Delta l_1 = \varepsilon_1 l$. Из решения (20.10) и равенств (a) находим

$$\delta_a = 0,4Fl/(EA). \quad (20.11)$$

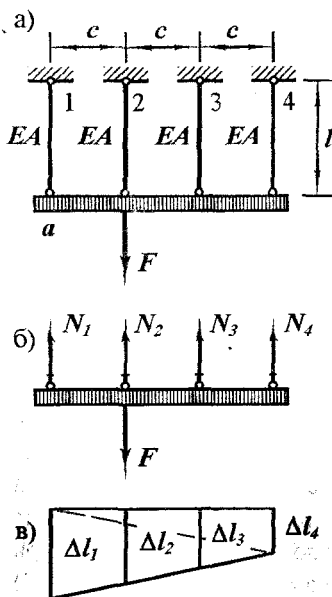


Рис. 20.2

Полученные результаты показывают, что в упругой стадии усилия, напряжения, деформации и перемещения пропорциональны силе.

Из равенств (20.10) видно, что наибольшие напряжения возникают в первом стержне. Они раньше достигнут предела текучести.

Как только это произойдет, конструкция перейдет в упругопластическую стадию работы. Предельную упругую нагрузку F_e найдем из условия: $\sigma_1 = \sigma_{yl}$; $0,4F_e/A = \sigma_{yl}$, откуда $F_e = 2,5\sigma_{yl}A$.

20.1.2.2. Упругопластическая стадия, первый этап – в состоянии текучести находится первый стержень.

Когда возрастающая сила F превысит предельное упругое значение, первый стержень потечет, напряжения в нем будут постоянными $\sigma_1 = \sigma_{yl}$. Стержни второй, третий и четвертый будут работать упруго. Уравнения равновесия (20.8) после этого примут вид:

$$\sigma_{yl} + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = F/A, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 = F/A. \quad (б)$$

Закон Гука будут справедливы лишь для трех стержней:

$$\varepsilon_2 = \sigma_2/E, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3/E, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4/E. \quad (в)$$

Из системы уравнений (20.9), (б) и (в) находим:

$$\sigma_2 = (5F - 8\sigma_{yl}A)/(6A), \quad \sigma_3 = (F - \sigma_{yl}A)/(3A), \\ \sigma_4 = (4\sigma_{yl}A - F)/(6A), \quad \varepsilon_1 = (4F - 7\sigma_{yl}A)/(3EA). \quad (г)$$

По последнему равенству определяем $\delta_a = l(4F - 7\sigma_{yl}A)/(3EA)$.

Сопоставляя величины напряжений (г), видим, что текучесть во втором стержне начнется раньше чем в третьем или четвертом. Обозначим силу, соответствующую началу текучести второго стержня F' , и найдем ее значение: $\sigma_2 = (5F' - 8\sigma_{yl}A)/(6A) = \sigma_{yl}$; $F' = 2,8\sigma_{yl}A$.

20.1.2.3. Упругопластическая стадия, второй этап – в состоянии текучести первый и второй стержни.

Чтобы отразить работу конструкции на этом этапе, в уравнения равновесия (20.8) введем равенства $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{yl}$. В итоге получим

$$\sigma_3 = (2F - 5\sigma_{yl}A)/(A), \quad \sigma_4 = (3\sigma_{yl}A - F)/(A). \quad (20.12)$$

Деформации стержней 3 и 4 найдем по закону Гука:

$$\varepsilon_3 = (2F - 5\sigma_{yl}A)/(EA) \quad \varepsilon_4 = (3\sigma_{yl}A - F)/(EA).$$

Подставляя этот результат в во второе равенство (20.9), получаем $\varepsilon_1 = (8F - 21\sigma_{yl}A)/(EA)$, откуда

$$\delta_a = l(8F - 21\sigma_{yl}A)/(EA). \quad (20.13)$$

Результаты (20.12) и (20.13) отражают зависимости напряжений и перемещения δ_a от силы F на рассматриваемом этапе нагружения.

Если в состоянии текучести перейдет стержень 3 или 4, конструкция станет геометрически изменяемой – разрушится. Найдем разрушающую нагрузку F_u . Третий стержень потечет, когда $\sigma_3 = (2F'_u - 5\sigma_{yl}A)/(A) = \sigma_{yl}$ т.е. при $F'_u = 3\sigma_{yl}A$, а четвертый при

$\sigma_4 = (3\sigma_{yl} A - F_u'')/(A) = \sigma_{yl}$, что дает $F_u'' = 4\sigma_{yl} A$. Из двух решений действительно меньшее: $F_u = 3\sigma_{yl} A$. Конструкция превратится в механизм, изображенный на рис. 20.3.

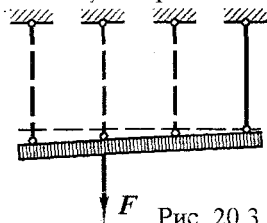


Рис. 20.3

20.1.2.4. Несмотря на простоту рассмотренной стержневой системы, в ее работе проявились такие особенности (рис. 20.4), которые свойственны конструкциям и более сложным.

Первая особенность (рис. 20.4 а) – предельная по напряжению в опасной точке) меньше разрушающей F_u (предельной по несущей способности). Это свидетельствует о том, что методы расчетов, учитывающие пластические свойства материалов, полнее используют резервы прочности конструкций.

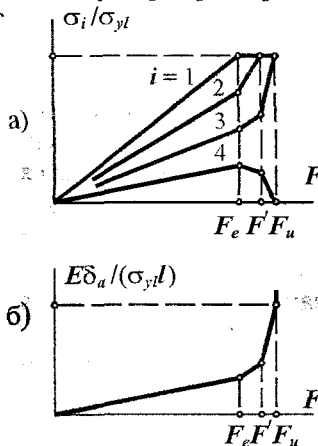


Рис. 20.4

Вторая особенность – перераспределение напряжений в упругопластической стадии. Действительно, при упругой работе характеристики напряженно-деформированного состояния росли пропорционально. Отношения между ними оставались постоянными (например, $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 = 4 : 3 : 2 : 1$). С появлением пластических деформаций эти соотношения изменяются. Так, напряжение σ_1 , достигнув предела текучести, расти перестало, но увеличились скорости роста напряжений σ_2 и σ_3 .

Третья – несмотря на монотонный рост силы, возможна локальная разгрузка (см. уменьшение напряжений в четвертом стержне).

И наконец, четвертая особенность. Перемещение δ_a в упругой стадии также изменялось пропорционально силе F (рис. 20.4 б). В упругопластической стадии скорость роста перемещения δ_a увеличивается. Эта особенность реакции конструкции на действие силы говорит о том, что за пределом упругости жесткостные требования могут стать решающими в оценке ее эксплуатационной пригодности.

20.1.3. Остаточные напряжения и деформации после разгрузки

Упругопластический материал при нагружении и разгрузке следует различным физическим закономерностям. Это свойство материала отражается и в работе конструкции. В результате нагружения ее до упругопластического состояния с последующим снятием нагрузки в конструкции остаются напряжения и деформации.

Методика расчета при таких воздействиях опирается на свойства материала. Весь процесс действия сил делят на две части – нагружение и разгрузку. При нагружении материал рассматривают как упругопластический и расчет ведут аналогично показанному выше. Состояние конструкции при максимальной нагрузке принимают за исходное для анализа процесса разгрузки.

В ходе разгрузки приращения напряжений и деформаций связаны законом Гука. Поэтому на обсуждаемом этапе конструкцию рассматривают как упругую. Найденные напряжения суммируют с достигнутыми при нагружении.

Проиллюстрируем методику расчета на конструкции, рассмотренной выше. Найдем остаточные напряжения и деформации в ней после нагружения до $F = 2,9\sigma_{yl}A$ с последующим снятием силы.

20.3.1. Нагружение. Расчет этого этапа выполнен выше. По результатам (20.12) и (20.13), справедливым при $F = 2,9\sigma_{yl}A$, находим:

$$\sigma_1^l = \sigma_2^l = \sigma_{yl}, \sigma_3^l = 0,8\sigma_{yl}, \sigma_4^l = 0,1\sigma_{yl}, \delta_a^l = 2,2\sigma_{yl} l/E. \quad (a)$$

20.3.2. Разгрузка. Изменения усилий, напряжений и деформаций на этом этапе найдем из расчета конструкции на действие встречной силы $F = 2,9\sigma_{yl}A$ (рис. 20.5) в предположении упругости материала. Такой расчет совпадает с результатами (20.10) и (20.11) (с обратными знаками). Итак,

$$\begin{aligned} \sigma_1^d &= -1,16\sigma_{yl}, \sigma_2^d = -0,87\sigma_{yl}, \\ \sigma_3^d &= -0,58\sigma_{yl}, \sigma_4^d = -0,29\sigma_{yl}, \delta_a^d = -1,16\sigma_{yl} l/E. \end{aligned}$$

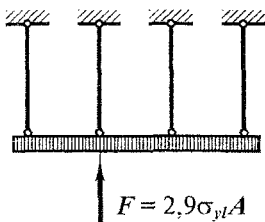


Рис. 20.5

Суммируя эти величины с одноименными из (a), находим остаточные величины

$$\sigma_1^r = -0,16\sigma_{yl}, \sigma_2^r = 0,13\sigma_{yl}, \sigma_3^r = 0,22\sigma_{yl}, \sigma_4^r = -0,19\sigma_{yl}, \delta_a^r = 1,04\sigma_{yl} l/E.$$

20.1.4. Характеристики

напряженно-деформированного состояния.

Соотношения между ними. Свойства характеристик

20.1.4.1. Рассмотрим ту же шарнирно-стержневую конструкцию,

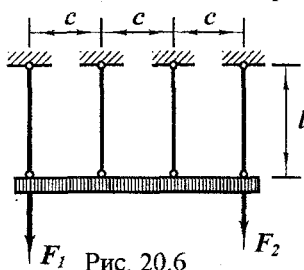


Рис. 20.6

но нагруженную двумя силами $-F_1$ и F_2 (рис. 20.6). Уравнения равновесия записываются так:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 &= (F_1 + F_2)/A, \\ \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 &= 3F_2/A. \end{aligned} \quad (a)$$

Условия совместности деформаций имеют вид (20.9). Связь напряжений с деформациями запишем в форме (20.1):

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E + \varepsilon_1^p, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/E + \varepsilon_2^p, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3/E + \varepsilon_3^p, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4/E + \varepsilon_4^p. \quad (б)$$

Из системы (20.9), (a) и (б) находим напряжения

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / A + E \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \\ \varepsilon_4^p \end{pmatrix}. \quad (в)$$

Из полученных выражений видно, что напряжения зависят от сил F_1 , F_2 и пластических деформаций.

Первые слагаемые представляют собой *упругие* части напряжений,

изменяющиеся пропорционально силам. Вторые слагаемые — *остаточные* напряжения, вызванные пластическими деформациями. Таким образом, полные усилия и напряжения можно представить в виде суммы упругих (возникающих в идеально упругой конструкции) и остаточных напряжений:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \\ \sigma_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / A + E \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \\ \varepsilon_4^p \end{pmatrix}. \quad (20.14)$$

$$N_i = N_i^e + N_i^r, \quad \sigma_i = \sigma_i^e + \sigma_i^r \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20.15)$$

20.1.4.2. Особенностью остаточных усилий и напряжений является их самоуравновешенность. Силы N_i^r и напряжения σ_i^r удовлетворяют условиям равновесия при отсутствии внешней нагрузки:

$$\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r + \sigma_4^r = 0, \quad \sigma_2^r + 2\sigma_3^r + 3\sigma_4^r = 0. \quad (20.16)$$

По этой причине их еще называют *самонапряжениями*. Поскольку четыре напряжения связаны двумя условиями (20.16), то, зная два любых из них, можно найти остальные два из уравнений равновесия. В общем случае самонапряжение конструкции может быть задано лишь несколькими независимыми параметрами. Число их равно степени статической неопределимости. Параметрами самонапряжений могут быть реакции избыточных (с точки зрения геометрической изменяемости) связей. Через них можно выразить усилия и напряжения в любом элементе конструкции.

20.1.4.3. Отметим важную особенность зависимости остаточных напряжений от пластических деформаций (20.14). Приравняв напряжения нулю и решив однородную систему уравнений

$$-0,3\varepsilon_1^p + 0,4\varepsilon_2^p + 0,1\varepsilon_3^p - 0,2\varepsilon_4^p = 0,$$

$$0,4\varepsilon_1^p - 0,7\varepsilon_2^p + 0,2\varepsilon_3^p + 0,1\varepsilon_4^p = 0,$$

$$0,1\varepsilon_1^p + 0,2\varepsilon_2^p - 0,7\varepsilon_3^p + 0,4\varepsilon_4^p = 0,$$

$$-0,2\varepsilon_1^p + 0,1\varepsilon_2^p + 0,4\varepsilon_3^p - 0,3\varepsilon_4^p = 0,$$

находим $3\varepsilon_2^p = 2\varepsilon_1^p + \varepsilon_4^p$, $3\varepsilon_3^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_4^p$. Сопоставляя полученные равенства с условиями совместности (20.9), видим, что они совпадают. Пластические деформации, удовлетворяющие условиям совместности, называют *совместными*. *Остаточные напряжения, соответствующие совместным пластическим деформациям, равны нулю.*

20.1.4.4. Рассмотрим теперь деформации (б). Если подставить в них напряжения (20.15), получим выражение $\varepsilon_i = \sigma_i^e/E + \sigma_i^r/E + \varepsilon_i^p$. Сравнивая его с равенствами (20.1) и (20.2), замечаем, что упругая деформация $\varepsilon_i^e = \sigma_i^e/E + \sigma_i^r/E$. Она состоит из двух частей: $\varepsilon_i^{ee} = \sigma_i^e/E$ и $\varepsilon_i^{er} = \sigma_i^r/E$, связанных законом Гука соответственно с упругими и остаточными напряжениями. Принимая во внимание то, что упругие напряжения пропорциональны нагрузке и при ее отсутствии равны нулю, назовем ε_i^{ee} *обратимой* частью упругой деформации, а ε_i^{er} — *необратимой*. Сумма $\varepsilon_i^r = \sigma_i^r/E + \varepsilon_i^p$ представляет *остаточную* деформацию в стержне. Итак, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p = \varepsilon_i^{ee} + \varepsilon_i^{er} + \varepsilon_i^p = \varepsilon_i^{ee} + \varepsilon_i^r$. Важно уяснить разницу между ε_i^e и ε_i^{ee} . Первая связана законом Гука с полным напряжением, а ε_i^{ee} — только с упругой его частью.

Подставим теперь соответствующие напряжения из равенств (в) в деформации (б). В итоге имеем

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / (EA) + \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \varepsilon_4^P \end{pmatrix}$$

Выделяя обратимую и остаточную деформации, получим равенства

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{ee} \\ \varepsilon_2^{ee} \\ \varepsilon_3^{ee} \\ \varepsilon_4^{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / (EA); \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \\ \varepsilon_3^r \\ \varepsilon_4^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \varepsilon_4^P \end{pmatrix}$$

20.1.4.5. Получив необходимые формулы для рассматриваемой конструкции, запишем зависимости (20.3) в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ -0,4 & -0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,7 \\ 0,2 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / (A + E) + \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,3 & -0,4 & -0,1 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ -0,4 & 0,7 & -0,2 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,1 & -0,2 & 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & -0,1 & -0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^P \\ \varepsilon_2^P \\ \varepsilon_3^P \\ \varepsilon_4^P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_{yl}$$

Номера стержней $i=1, 2, 3, 4$ и функций текучности φ_m с $m=1, 2, \dots, 8$ связаны так: i -му стержню соответствует две функции — с $m=2i-1$ и $m=2i$. Обращение в нуль функции с нечетным номером означает текучность при растяжении, с четным — при сжатии. Условия текучности и закон течения (20.4) ... (20.7) теперь имеют вид:

$$\varphi_m \leq 0, \quad \varphi_m \Delta \lambda_m = 0, \quad \Delta \lambda_m \geq 0; \quad (20.17)$$

$$\Delta \varepsilon_i^P = \Delta \lambda_{2i-1} - \Delta \lambda_{2i}. \quad (20.18)$$

20.2. Статический метод расчета упругопластических конструкций

В этом разделе рассмотрим задачу о несущей способности конструкции. Большинство методов решения указанной задачи опирается на фундаментальные теоремы теории предельного равновесия – статическую и кинематическую. Остановимся на статическом методе.

20.2.1. Статическая теорема теории предельного равновесия

Теория предельного равновесия посвящена определению разрушающих значений монотонно возрастающих нагрузок.

Прежде чем сформулировать статическую теорему, введем необходимое понятие: напряжения (усилия), не превышающие предельных значений, называют *допустимыми*. Кроме того, напомним, что напряжения (усилия) называют *статически возможными*, если они удовлетворяют условиям равновесия.

Статическая теорема формулируется так¹. *Если для данной конструкции и нагрузки существует допустимое статически возможное распределение напряжений (усилий), действующая нагрузка не превышает разрушающую.*

Для иллюстрации метода вновь обратимся к шарнирно-стержневой системе (рис. 20.2). Найдем разрушающее значение силы F , используя статическую теорему. Напряжения в стержнях представим в виде сумм:

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 + \sigma_1^r, \quad \sigma_2 = \sigma_2^0 + \sigma_2^r, \quad \sigma_3 = \sigma_3^0 + \sigma_3^r, \quad \sigma_4 = \sigma_4^0 + \sigma_4^r, \quad (20.19)$$

¹ Доказательства статической и кинематической теорем здесь опущены. Их можно найти, например, в учебном пособии В.Л.Высоковского и В.Ф.Сбитнева. "Расчет конструкций по несущей способности". – Челябинск: ЧПИ, 1975. – 76 с.

где σ_i^0 – какие-либо статически возможные (удовлетворяющие условиям равновесия (20.8)) напряжения. Примем простейший вариант: $\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_4^0 = 0$, $\sigma_2^0 = F/A$, согласующийся с условиями равновесия.

Остаточные напряжения самоуравновешены – статически возможны. Выразим из уравнений (20.16) напряжения σ_3^r и σ_4^r через σ_1^r и σ_2^r : $\sigma_3^r = -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r$, $\sigma_4^r = 2\sigma_1^r + \sigma_2^r$. В итоге получаем:

$$\sigma_1 = \sigma_1^r, \quad \sigma_2 = F/A + \sigma_2^r, \quad \sigma_3 = -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r, \quad \sigma_4 = 2\sigma_1^r + \sigma_2^r.$$

Естественно, эти напряжения являются статически возможными.

Условия допустимости напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} -\sigma_{yl} &\leq \sigma_1^r \leq \sigma_{yl}, & -\sigma_{yl} &\leq F/A + \sigma_2^r \leq \sigma_{yl}, \\ -\sigma_{yl} &\leq -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r \leq \sigma_{yl}, & -\sigma_{yl} &\leq 2\sigma_1^r + \sigma_2^r \leq \sigma_{yl}. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Определение разрушающей нагрузки сводится к поиску наибольшего значения F при четырех парах ограничений (20.20).

Решим задачу графически. Каждое спаренное ограничение $F/(\sigma_{yl}A)$ (20.20) выделяет в трехмерном пространстве $\sigma_1^r, \sigma_2^r, F$ бесконечную полосу, внутри которой должно находиться решение.

Так, первая пара требует, чтобы точка находилась между плоскостями Π_1^+ и Π_1^- (рис. 20.7); вторая – между Π_2^+ и Π_2^- ; третья – между Π_3^+ и Π_3^- .

Полоса, определяемая четвертым спаренным ограничением из (20.20), полностью охватывает изображенную призму и

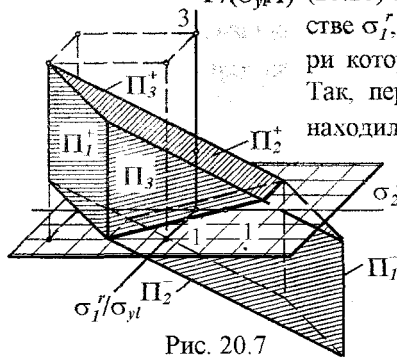


Рис. 20.7

потому на рис. 20.7 не показана. Таким образом, координата F любой точки, не выходящей за пределы призмы, не превышает разрушающее значение. Действительная разрушающая величина F – максимальная. Из графического построения видно, что она соответствует вершине $\sigma_1^r = \sigma_{yl}$, $\sigma_2^r = -2\sigma_{yl}$, $F_u = 3\sigma_{yl}A$. Разрушающее значение нагрузки совпадает с полученным в разделе 20.1.2.

Разрушающее значение силы найдено верно. Параметры же самонапряжений $\sigma_1^r = \sigma_{yl}$ и $\sigma_2^r = -2\sigma_{yl}$ не совпадают с действительными. Это объясняется, в частности, тем, что в основу построения положе-

но совершенно случайное статически возможное распределение напряжений $\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_4^0 = 0$, $\sigma_2^0 = F/A$.

Отметим характерное свойство статического метода. Если взять какую-либо точку, принадлежащую изображенной призме, ее ордината F_u не превысит действительную разрушающую величину. Любой набор усилий, удовлетворяющий условиям (20.20), не может дать завышенное значение разрушающей нагрузки.

20.2.2. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси балки

В упругой стадии связь кривизны оси балки с изгибающим моментом отражается законом Гука

$$\kappa = 1/\rho = M/(EJ), \quad (a)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя; J – момент инерции сечения. Соотношение (a) справедливо при условии $-M_e \leq M \leq M_e$, в котором M_e – предельный упругий момент.

За пределом упругости зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента описывается нелинейными математическими выражениями. Графики таких выражений имеют вид, изображенный пунктирными линиями на рис. 20.8 (M_u – разрушающий момент).

Для упрощения расчетов диаграмму изгиба обычно идеализируют. Широкое распространение получили линеаризованные зависимости, среди которых наиболее простой является диаграмма Прандтля. Согласно ей закон Гука (a) справедлив до разрушающего момента, после чего кривизна может неограниченно возрастать. При разгрузке приращения момента и кривизны связаны законом Гука.

Подобно тому, как были описаны деформационные зависимости (20.1) ... (20.7), введем соотношения

$$\kappa = M/(EJ) + \kappa^p; \quad (20.21)$$

$$\varphi_1 = M - M_u, \quad \varphi_2 = -M - M_u; \quad (б)$$

$$\varphi_1 \leq 0, \quad \varphi_2 \leq 0; \quad (в)$$

$$\Delta \kappa^p = \Delta \lambda_1 - \Delta \lambda_2; \quad (г)$$

$$\varphi_1 \Delta \lambda_1 = 0, \quad \varphi_2 \Delta \lambda_2 = 0; \quad (д)$$

$$\Delta \lambda_1 \geq 0, \quad \Delta \lambda_2 \geq 0; \quad (е)$$

в которых κ^p – пластическая кривизна;

φ – функции текучести; λ – индексы текучести. Смысл выражений (20.21), (б) ... (е) и (20.1) ... (20.7) аналогичен.

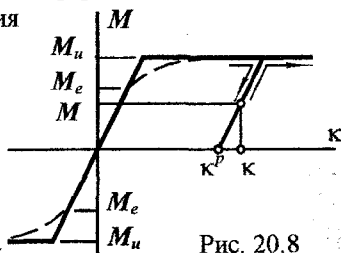


Рис. 20.8

20.2.3. Несущая способность сечений балок

На основании статической теоремы определим несущую способность сечений балок – найдем величины разрушающих изгибающих моментов M_u . Условие статической возможности распределения усилий в сечении балки – отсутствие продольной силы:

$$N = N_t - N_c = 0. \quad (a)$$

Здесь N_t – равнодействующая растягивающих напряжений, N_c – сжимающих. Согласно теореме действительный разрушающий момент – наибольший при допустимых напряжениях и условию (a).

20.2.3.1. Расчетные сопротивления на растяжение и сжатие одинаковы.

Допустимые напряжения подчинены условиям $\sigma_t \leq R$, $\sigma_c \leq R$.

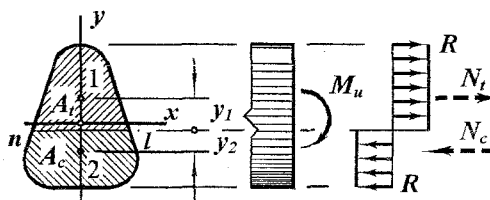


Рис. 20.9

Момент достигнет наибольшей величины, когда напряжения во всех точках сечения станут предельными: $\sigma_t = R$, $\sigma_c = R$ (рис. 20.9). Равнодействующая растягивающих напряжений $N_t = RA_t$, сжимающих $N_c = RA_c$, где A_t и A_c – площади растянутой и сжатой частей сечения. По условию (a) $N_t - N_c = RA_t - RA_c = 0$. Отсюда следует $A_t = A_c$. Но так как $A_t + A_c = A$, то

$$A_t = A_c = A/2. \quad (20.22)$$

При исчерпании несущей способности площади растянутой и сжатой частей составляют половину площади сечения.

Напряжения в каждой половине сечения распределены равномерно – равнодействующие N_t и N_c приложены в центрах тяжести соответствующих частей – точках 1 и 2. Разрушающий момент $M_u = N_t y_1 + N_c y_2 = RA_t y_1 + RA_c y_2 = R(A_t y_1 + A_c y_2)$. Слагаемые в скобках – статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии; $M_u = R(|S_t| + |S_c|)$. Обозначим

$$|S_t| + |S_c| = W_{pl}. \quad (20.23)$$

W_{pl} носит название *пластического момента сопротивления сечения*. Итак, $M_u = RW_{pl}$.

20.2.3.2. Несущая способность сечения железобетонной балки.

Расчет изгибающего момента, разрушающего железобетонную балку, опирается на две предпосылки:

- прочность бетона на растяжение не учитывается (в этой части сечения образуется трещина);
- усилие, воспринимаемое сжатой арматурой, также не учитывается из-за слабого влияния на конечный результат.

Рассмотрим железобетонную балку прямоугольного сечения. Усилия, соответствующие исчерпанию несущей способности, показаны на рис. 20.10.

Растягивающее усилие, воспринимаемое арматурой, $N_t = R_{st} A_{st}$, где R_{st} – расчетное сопротивление арматуры; A_{st} – площадь растянутой арматуры. Равнодействующая сжимающих напряжений в бетоне $N_c = R_{cnc} b y_0$, где R_{cnc} – расчетное сопротивление бетона на сжатие; b – ширина сечения; y_0 – высота сжатой зоны сечения. Из условия (а) следует $R_{st} A_{st} - R_{cnc} b y_0 = 0$, откуда $y_0 = R_{st} A_{st} / (R_{cnc} b)$.

Поскольку усилия в сечении балки образуют пару сил, момент равен силе на плечо пары: $M_u = N_t (h_0 - y_0/2) = R_{st} A_{st} (h_0 - y_0/2)$. Подставляя сюда высоту сжатой зоны, окончательно находим

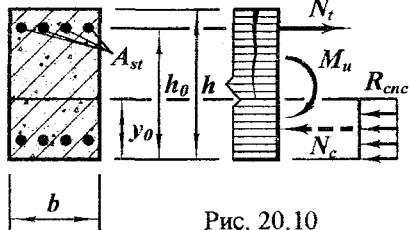


Рис. 20.10

$$M_u = R_{st} A_{st} (h_0 - R_{st} A_{st} / (2R_{cnc} b)). \quad (20.25)$$

Разрушающий момент при иной форме сечения балки (тавровое, двутавровое, трапециевидное и т.п.) определяют на основе тех же предпосылок и в той же последовательности:

- из условия отсутствия продольной силы находят высоту сжатой зоны бетона;
- разрушающий момент равен моменту внутренней пары сил.

Итоговые формулы разрушающих моментов в этих случаях в значительной степени зависят от индивидуальных геометрических параметров сечения. Поэтому приведенный выше пример следует рассматривать как иллюстрацию методики оценки несущей способности сечения железобетонной балки.

20.2.4. Расчетные соотношения статического метода теории предельного равновесия балок и плоских рам

В систему расчетных соотношений метода входят условия равновесия и ограничения на величины усилий. Составим систему условий задачи, игнорируя влияние продольных и поперечных сил на несущую способность сечений балок и рам. В таких случаях в расчетные соотношения войдут только изгибающие моменты.

Как было показано выше, полное значение усилия (момента) может быть представлено в виде суммы

$$M_i = M_i^0 + M_i^r \quad (i = 1, 2, \dots, i^+), \quad (20.26)$$

где M_i^0 – момент, соответствующий некоторой статически возможной эпюре (начальный момент); M_i^r – остаточный момент от параметров самонапряжений; i – номер сечения; i^+ – наибольший номер.

Начальный момент может быть выбран на основе любой основной системы метода сил. Он пропорционален внешней нагрузке. Запишем выражения начальных моментов в виде

$$M_i^0 = B_i F, \quad (a)$$

где B_i – конкретное число; F – параметр нагрузки.

Остаточные моменты выразим через параметры самонапряжений

$$M_i^r = \sum_j^{j^+} M_{ij}^{(j)} X_j \quad (j = 1, 2, \dots, j^+). \quad (б)$$

Здесь $M_{ij}^{(j)}$ – изгибающий момент в i -м сечении основной системы метода сил от $X_j = 1$; X_j – реакция j -й избыточной связи; j^+ – степень статической неопределимости конструкции.

Поскольку M_i^0 статически возможны, а M_i^r самоуравновешены, суммарные моменты (20.26) удовлетворяют условиям равновесия.

Ограничения на величины изгибающих моментов имеют вид $M_{ui} \leq M_i \leq M_{ui}$, где M_{ui} – разрушающий момент i -го сечения. Подставляя в записанные ограничения суммы (20.26) с учетом равенств (а) и (б), получаем систему условий задачи

$$-M_{ui} \leq B_i F + \sum_j^{j^+} M_{ij}^{(j)} X_j \leq M_{ui} \quad (i = 1, 2, \dots, i^+). \quad (20.27)$$

Определение разрушающего значения параметра нагрузки сводится к поиску максимума F , удовлетворяющего неравенствам (20.27).

20.2.5. Примеры расчета балок статическим методом

20.2.5.1. Найдем величину силы F , разрушающей двухпролетную балку (рис. 20.11 а).

Отбросив левую избыточную связь, строим эпюру начальных моментов (рис. 20.11 б). В качестве параметра самонапряжений примем реакцию левой опоры (рис. 20.11. в). Эпюра остаточных моментов от нее изображена на рис. 20.11. г. Условия допустимости моментов имеют вид: $-M_u \leq -Xl \leq M_u$, $-M_u \leq Fl - 2Xl \leq M_u$. В полученных неравенствах два неизвестных — F и X . Найдем $F_u = F_{max}$.

По эпюрам M^0 и M^r видим, что решение нужно искать так, чтобы моменты в левом пролете и над средней опорой достигли предельных значений: $-Xl = -M_u$, $Fl - 2Xl = M_u$. Отсюда находим $X = M_u/l$, $F_u = 3M_u/l$. Эпюра моментов изображена на рис. 20.11 д.

20.2.5.2. Ознакомимся со спецификой реализации статического метода при распределенной нагрузке (рис. 20.12 а). Найдем интенсивность разрушающей нагрузки.

Отбросим левую избыточную опору и построим статически возможную эпюру начальных моментов (рис. 20.12 б, в). Приняв в качестве параметра самонапряжений реакцию отброшенной связи, строим эпюру остаточных моментов (рис. 20.12 г, д).

Для выполнения условий допустимости моментов достаточно, чтобы

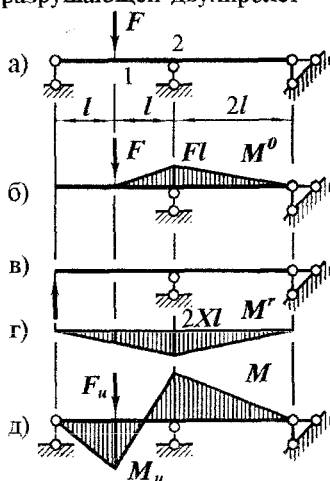


Рис. 20.11

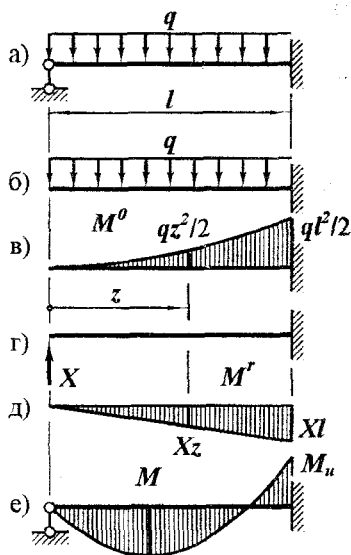


Рис. 20.12

они соблюдались в двух сечениях – в пролетном с максимальным отрицательным моментом и на правом конце балки. Найдем положение пролетного сечения. $M = 0,5qz^2 - Xz$. Приравняв нулю производную $dM/dz = qz - X = 0$, находим $z = X/q$, а по нему $M_{min} = -0,5X^2/q$. Из условия $M_{min} = -M_u$ устанавливаем $X^2 = 2qM_u$. Момент в правом сечении $M_{max} = 0,5ql^2 - Xl$. Приравнявая его предельному значению, имеем $0,5ql^2 - Xl = M_u$, что после подстановки X и несложных преобразований приводит к квадратному уравнению

$$(0,5ql^2)^2 - 3M_u(qul^2) + M_u^2 = 0.$$

Отсюда $q_u' = 11,657M_u/l^2$ и $q_u'' = 0,3431M_u/l^2$. Первому решению соответствуют $X = 4,828M_u/l$ и $z = 0,4142l$, второму $X = -0,8284M_u/l$ и $z = -2,4142l$. Второе решение отбрасываем. Итак, $q_u = 11,657M_u/l^2$.

Приведенный пример обнаруживает нелинейность задачи. В таких случаях поиск разрушающей нагрузки усложняется. Для облегчения расчетной процедуры можно привлекать приближенные решения. Одним из способов является замена распределенной нагрузки системой сосредоточенных сил. Тогда эпюра изгибающих моментов – ломаная линия. Условия задачи остаются линейными. Решение задачи не выходит за рамки линейной алгебры.

20.2.6. Жордановы преобразования систем линейных равенств

При решении задач, описываемых системой ограничений в виде линейных равенств и неравенств, широкое применение нашли так называемые жордановы преобразования. Познакомимся с ними.

Запишем m равенств с n независимыми переменными в табличной форме. Будем называть *шагом жорданового преобразования таблицы* с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$, r -й разрешающей строкой и s -м разрешающим столбцом операцию перемены ролями между зависимой переменной y_r и независимой x_s , т.е. операцию решения уравнения

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n$$

относительно x_s и подстановки его во все остальные равенства.

Из r -го равенства

$$x_s = (-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{r,s-1}x_{s-1} + y_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{rn}x_n)/a_{rs}.$$

После подстановки x_s в остальные уравнения уравнения приведем к новой таблице. Ее коэффициенты вычисляются по следующим правилам:

а) разрешающий элемент

$$b_{rs} = 1/a_{rs};$$

б) остальные элементы разрешающего столбца $b_{is} = a_{is}/a_{rs}$ ($i \neq r$);

в) остальные элементы разрешающей строки $b_{rj} = -a_{rj}/a_{rs}$ ($j \neq s$);

г) элементы, не принадлежащие ни разрешающей строке, ни разрешающему столбцу, $b_{ij} = a_{ij} - a_{is}a_{rj}/a_{rs}$ ($i \neq r, j \neq s$).

Такие преобразования будем использовать при решении задач предельного равновесия.

20.2.7. Алгоритм расчета предельного параметра нагрузки статическим методом

Так как по статической теореме действительная разрушающая нагрузка – максимальная, алгоритм ее определения может быть построен на монотонном росте параметра нагрузки при соблюдении условий задачи. Вновь обратимся к шарнирно-стержневой системе, рассмотренной в разделах 20.1.2 и 20.2.1.

Запишем систему ограничений (20.20) в табличной форме. Далее, принимаем начальные значения $F^0 = 0$, $\sigma_1^r = \sigma_2^r = 0$. Все условия (а) при этом выполняются. Имитируем рост силы F .

Найдем значение силы F^1 , до которого начальные

σ^r удовлетворяют условиям допустимости. Из равенств (а) видно, что функция φ_3 раньше других достигнет нуля. Это произойдет при $\varphi_3 = -1 + F^1/(\sigma_{yl}A) = 0$, т.е. $F^1 = \sigma_{yl}A$. При дальнейшем росте силы нулевые остаточные напряжения не удовлетворяют условия задачи.

	x_1	x_2	...	y_r	...	x_n
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1s}	...	b_{1n}
$y_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}	...	b_{2n}
...
$x_s =$	b_{r1}	b_{r2}	...	b_{rs}	...	b_{rn}
...
$y_m =$	b_{m1}	b_{ms}	...	b_{mn}

	$1 F/(\sigma_{yl}A) \quad \sigma_1^r/\sigma_{yl} \quad \sigma_2^r/\sigma_{yl}$				
$\varphi_1 =$	-1	0	1	0	≤ 0 ,
$\varphi_2 =$	-1	0	-1	0	≤ 0 ,
$\varphi_3 =$	-1	1	0	1	≤ 0 ,
$\varphi_4 =$	-1	-1	0	-1	≤ 0 , (а)
$\varphi_5 =$	-1	0	-3	-2	≤ 0 ,
$\varphi_6 =$	-1	0	3	2	≤ 0 ,
$\varphi_7 =$	-1	0	2	1	≤ 0 ,
$\varphi_8 =$	-1	0	-2	-1	≤ 0 .

Примем на втором этапе $\sigma_1^r = 0$, а σ_2^r подберем так, чтобы в процессе роста силы F сохранялось равенство $\varphi_3 = 0$. С этой целью выполним шаг жордановых преобразований таблицы (а), поменяв местами φ_3 и σ_2^r . Придем к таблице (б).

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	σ_1^r/σ_{yl}	φ_3	
φ_1	=	-1	0	1	0 ≤ 0
φ_2	=	-1	0	-1	0 ≤ 0 ,
σ_2^r/σ_{yl}	=	1	-1	0	1
φ_4	=	-2	0	0	-1 ≤ 0 ,
φ_5	=	-3	2	-3	-2 ≤ 0 ,
φ_6	=	1	-2	3	2 ≤ 0 ,
φ_7	=	0	-1	2	1 ≤ 0 ,
φ_8	=	-2	1	-2	-1 ≤ 0 .

Найдем $F^2 > F^1$, до которого выбранные σ_1^r и σ_2^r удовлетворяют условия задачи. Так как, $\varphi_3 = 0$ и $\sigma_1^r = 0$, то изменения функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_8$ описываются двучленами, стоящими в соответствующих строках. Функции, у которых коэффициенты при

F отрицательны, во внимание не принимаем – они уменьшаются и не могут нарушить условия задачи. Из равенств $\varphi_5 = 0$ и $\varphi_8 = 0$ соответственно находим $F = 1,5\sigma_{yl}A$ и $F = 2\sigma_{yl}A$. Принимаем меньшее $F^2 = 1,5\sigma_{yl}A$.

Дальнейший рост силы F обеспечим подбором такого, σ_1^r при

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	φ_5	φ_3	
φ_1	=	-2	0,667	-0,333	-0,667 ≤ 0 ,
φ_2	=	0	-0,667	0,333	0,667 ≤ 0 ,
σ_2^r/σ_{yl}	=	1	-1	0	1
φ_4	=	-2	0	0	-1 ≤ 0 ,
σ_1^r/σ_{yl}	=	-1	0,667	-0,333	-0,667
φ_6	=	-2	0	-1	0 ≤ 0 ,
φ_7	=	-2	0,333	-0,667	-0,333 ≤ 0 ,
φ_8	=	0	-0,333	0,667	0,333 ≤ 0 .

котором достигшая нуля φ_5 останется нулевой. Для этого шагом жордановых преобразований таблицы (б) меняем местами φ_5 и σ_1^r . Получаем таблицу (в).

С ростом силы F возрастают φ_1 и φ_7 .

Из равенств $\varphi_1 = 0$ следует $F^3 = 3\sigma_{yl}A$, а из $\varphi_7 = 0$ $F^3 = 6\sigma_{yl}A$. Действительно меньшее.

Дальнейший рост силы невозможен. Во-первых, нет параметров самонапряжений, которыми можно было бы обеспечить его. Во-вторых, коэффициенты при φ_5 и φ_3 в равенствах φ_1 и φ_7 отрицательны – допустимые изменения φ_5 или φ_3 в отрицательную сторону увеличат φ_1 и φ_7 . Итак, $F_u = F^3 = 3\sigma_{yl}A$. Сравнивая его с найденным ра-

нее, видим их совпадение. При $F = F_n$ имеем $\sigma_1^r = -0,2\sigma_{yl}$, $\sigma_2^r = 0,1\sigma_{yl}$, что также совпадает с найденными ранее.

Изложенный материал обеспечивает статическую теорему формализованным вычислительным алгоритмом и предоставляет возможность решения задач предельного равновесия, как сформулированных на ее основе, так и методами, построенными на других основаниях.

Отметим роль и смысл параметров самонапряжений. Не следует отождествлять их с действительными остаточными усилиями в конструкции. Остаточные усилия могут быть выражены через параметры самонапряжений, но в общем случае не равны им. Поэтому воспроизводимый расчетом процесс изменения параметров, сопровождающий рост нагрузки, не совпадает с действительным процессом.

Достоинством статического метода является то, что любое приближенное решение системы условий задачи дает значение нагрузки, не превышающее действительную предельную величину. Это открывает широкие возможности для упрощения расчетов и использования различных приближенных методов. Можно ограничиться каким-либо приближенным решением, удовлетворяющим условия статической теоремы, не рискуя допустить погрешность, идущую не в запас прочности.

Расчеты реальных конструкций сводятся к системам, содержащим десятки, сотни, а то и тысячи неравенств. В таких случаях решения возможны только с помощью ЭВМ. В настоящее время разработаны теоретические основы, алгоритмы и стандартные программы решения задач предельного равновесия, что создает благоприятные условия для внедрения статического метода в расчетную практику. Отметим также, что во многих нормативных документах есть рекомендации и требования по расчету строительных конструкций на основе теории предельного равновесия.

20.3. Кинематический метод расчета упругопластических конструкций

Этот метод опирается на кинематическую теорему теории предельного равновесия. В формулировке теоремы и методе расчета используются новые термины и понятия. Познакомимся с ними.

20.3.1. Кинематически возможные пластические деформации. Механизмы разрушения

20.3.1.1. Пластические деформации, удовлетворяющие условиям совместности, называются *кинематически возможными*. Так, в шарнирно-стержневой системе (рис. 20.2) условия совместности имеют вид (20.9). Заменяя в них полные деформации пластическими, получим:

$$3\varepsilon_2^p = 2\varepsilon_1^p + \varepsilon_3^p, \quad 3\varepsilon_3^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_2^p. \quad (a)$$

Это же условие устанавливает кинематическую возможность приращений пластических деформаций:

$$3\Delta\varepsilon_2^p = 2\Delta\varepsilon_1^p + \Delta\varepsilon_3^p, \quad 3\Delta\varepsilon_3^p = \Delta\varepsilon_1^p + 2\Delta\varepsilon_2^p. \quad (20.28)$$

Найдем остаточные напряжения, вызванные кинематически возможными пластическими деформациями. Для этого запишем условия (a) в форме

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_4^p \end{vmatrix}$$

подставим их в равенства (20.14) и перемножим матрицы.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^r \\ \sigma_2^r \\ \sigma_3^r \\ \sigma_4^r \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_4^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_4^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Остаточные напряжения, соответствующие кинематически возможным пластическим деформациям, равны нулю. Равенство (б) справедливо и для приращений пластических деформаций и остаточных напряжений при условии (20.28). Обнаруженное свойство кинематически возможных пластических деформаций проявляется и в более сложных конструкциях.

20.3.1.2. *Механизм разрушения* – это геометрически изменяемая система, в которую превращается конструкция вследствие текучести некоторых ее элементов. Математическим описанием механизмов разрушения является условие кинематической возможности приращений пластических деформаций. Например, для рассматриваемой шарнирно-стержневой системы условия (20.28) описывают все возможные механизмы (рис. 20.13). Приняв, скажем, $\Delta \varepsilon_1^p = 0$ имеем $3\Delta \varepsilon_2^p = 2\Delta \varepsilon_3^p$ и $3\Delta \varepsilon_3^p = \Delta \varepsilon_4^p$ (рис. 20.13 а). Если приравнять нулю $\Delta \varepsilon_3^p$, то соотношения (20.28) опишут механизм, изображенный на рис. 20.13 б: $3\Delta \varepsilon_2^p = \Delta \varepsilon_4^p$, $3\Delta \varepsilon_3^p = 2\Delta \varepsilon_4^p$. Аналогично для $\Delta \varepsilon_4^p = 0$ следуют соотношения, описывающие механизм, показанный на рис. 20.13 в. Так, перебирая варианты соотношений между приращениями пластических деформаций, можно описать все механизмы.

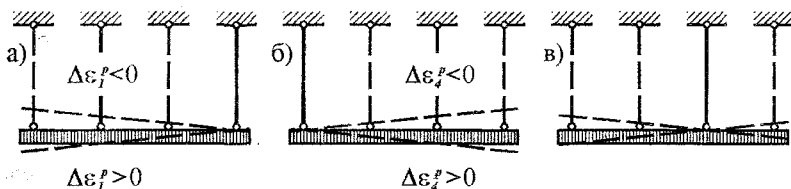


Рис. 20.13

На рис. 20.13 приведены примеры так называемых *простых* механизмов. Они характеризуются одним геометрическим параметром ($\Delta \varepsilon_1^p$ на рис. 20.13 а, $\Delta \varepsilon_3^p$ – 20.13 б). Механизмы, определяемые двумя или большим числом параметров, называются *избыточными*. Некоторые из них изображены на рис. 20.14. В дальнейшем, говоря о механизмах разрушения, будем иметь в виду простые механизмы.

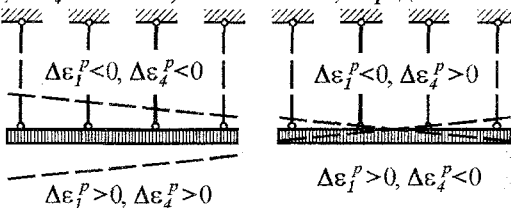


Рис. 20.14

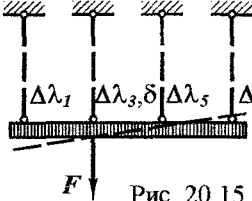
20.3.2. Кинематическая теорема теории предельного равновесия.

Алгоритм расчета разрушающей нагрузки кинематическим методом

20.3.2.1. Кинематическая теорема о разрушающей нагрузке может быть сформулирована так. *Из всех нагрузок, соответствующих различным механизмам разрушения, действительной является наименьшая.*

Система математических соотношений задачи в рассматриваемом случае должна содержать описание всех возможных механизмов и условие разрушения. Проиллюстрируем этапы формирования условий задачи примером.

20.3.2.2. Решим кинематическим методом задачу, рассмотренную в разделах 20.1.2 и 20.2.1 (рис. 20.15). Все механизмы разрушения описываются равенствами (20.28). Однако любая комбинация указанных соотношений между приращениями пластических деформаций соответствует двум механизмам. Это показано на рис. 20.13 и 20.14. Чтобы ввести соотношения, отвечающие конкретной геометрически изменяемой системе, преобразуем условия (20.28). Для этого представим приращение каждой пластической деформации в виде (20.5): $\Delta \varepsilon_i^p = \Delta \lambda_{2i-1}^* - \Delta \lambda_{2i}^*$ при $\Delta \lambda_{2i-1}^* \geq 0$, $\Delta \lambda_{2i}^* \geq 0$, понимая под $\Delta \lambda_{2i-1}^*$ — пластическое удлинение, а под $\Delta \lambda_{2i}^*$ — укорочение i -го стержня. Теперь равенства (20.28) можно записать так:



$$\begin{aligned} 3(\Delta \lambda_3^* - \Delta \lambda_4^*) &= 2(\Delta \lambda_1^* - \Delta \lambda_2^*) + \Delta \lambda_7^* - \Delta \lambda_8^*; \\ 3(\Delta \lambda_5^* - \Delta \lambda_6^*) &= \Delta \lambda_1^* - \Delta \lambda_2^* + 2(\Delta \lambda_7^* - \Delta \lambda_8^*); \\ \Delta \lambda_m^* &\geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 8). \end{aligned} \quad (a)$$

Условие разрушения запишем в виде

$$F \delta \geq \sum_1^8 \sigma_{yl} A l \Delta \lambda_m^*. \quad (б)$$

Левая часть неравенства — работа силы F на перемещении δ . Правая часть — работа внутренних сил (рассеяние энергии) в механизме. Ясен смысл неравенства. Если работа внешней нагрузки превышает работу внутренних сил на рассматриваемых кинематически возможных деформациях, конструкция разрушится. Предельному равновесию отвечает равенство левой и правой частей.

В условие (б) входит произведение двух неизвестных величин $F\delta$ – нелинейное выражение. Учитывая, что $\delta > 0$, поделим на него

$$\text{обе части и запишем} \quad F \geq \sum_1^8 \sigma_{y1} A \Delta \lambda_m, \quad (\text{в})$$

где $\Delta \lambda_m = I \Delta \lambda_m^* / \delta$. Наконец, $\delta = I \Delta \varepsilon_2 = I(\Delta \lambda_3^* - \Delta \lambda_4^*)$, что равносильно

$$1 - \Delta \lambda_3 + \Delta \lambda_4 = 0. \quad (\text{г})$$

Задача об определении разрушающей нагрузки свелась к поиску $\min F$ при условиях (а) ... (г) и неотрицательных $\Delta \lambda_m$.

20.3.2.3. Умножим равенства (а) на I/δ и сведем условия (а), (б), (в) и (г) в таблицу (д). Каждое ограничение обозначим буквой Y с соответствующим индексом.

	1	$F/(\sigma_{y1} A)$	$\Delta \lambda_1$	$\Delta \lambda_2$	$\Delta \lambda_3$	$\Delta \lambda_4$	$\Delta \lambda_5$	$\Delta \lambda_6$	$\Delta \lambda_7$	$\Delta \lambda_8$	
$Y_1 =$	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\geq 0,$
$Y_2 =$	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	$= 0, \quad (\text{д})$
$Y_3 =$	0	0	2	-2	-3	3	0	0	1	-1	$= 0,$
$Y_4 =$	0	0	1	-1	0	0	-3	3	2	-2	$= 0.$

Структура исходных соотношений кинематического метода характерна тем, что в условия задачи входит лишь одно неравенство, остальные – равенства. Расчетную таблицу будем компоновать так. В первой строке запишем условие разрушения, во второй – связь перемещения с деформациями, далее – условия кинематической возможности. Первый столбец – столбец свободных членов, второй – параметра нагрузки, третий и далее – столбцы, содержащие $\Delta \lambda_m$. Отметим также:

- коэффициенты при $\Delta \lambda_m$ в условии разрушения отрицательны;
- свободный член присутствует только во второй строке;
- параметр нагрузки входит с положительным коэффициентом только в условие разрушения.

Для решения задачи необходимо исключить ограничения равенства переводом в левую часть таблицы соответствующих $\Delta \lambda_m$ – сформировать механизм разрушения. Учитывая специфику структуры системы ограничений и ориентируясь на задачи теории предельного равновесия, в процессе преобразований будем руководствоваться следующими алгоритмом и рекомендациями:

1) Разрешающей может быть строка-равенство, которая при стоящих наверху таблицы $\Delta\lambda_m = 0$ противоречит условию задачи;

2) Разрешающим может быть элемент, знак которого противоположен знаку свободного члена;

3) Разрешающим следует принимать элемент, у которого абсолютное значение его отношения к соответствующему коэффициенту первой строки наибольшее;

4) После выбора разрешающего элемента следует выполнить шаг жордановых преобразований таблицы;

5) Столбцы, содержащие переведенные вправо $Y_j = 0$, можно не записывать.

Действия, отвечающие последовательности 1) ... 5), следует вести до тех пор, пока не будут удовлетворены все условия задачи.

В результате выполненных преобразований сформируется окончательная таблица с характерной структурой первых двух столбцов.

В первом столбце

– останется лишь один отрицательный коэффициент первой строки;

– коэффициенты при переведенных влево $\Delta\lambda_m$ будут положительными;

– коэффициенты при оставшихся слева Y_j (такое может быть при частичном механизме разрушения) – нулевые.

Во втором столбце останется единственный положительный коэффициент первой строки, остальные – нулевые.

Первая строка при оставшихся наверху таблицы $\Delta\lambda_m = 0$ определяет разрешающую нагрузку.

20.3.2.4. Решим задачу (а), ... , (г) – табл. (д). Согласно описанному алгоритму меняем местами Y_2 с $\Delta\lambda_3$.

	1	$F/(\sigma_{y1} A)$	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_4$	$\Delta\lambda_5$	$\Delta\lambda_6$	$\Delta\lambda_7$	$\Delta\lambda_8$	
Y_1	=	-1	1	-1	-1	-2	-1	-1	-1	≥ 0 ,
$\Delta\lambda_3$	=	1	0	0	0	1	0	0	0	≥ 0 ,
Y_3	=	-3	0	2	-2	0	0	0	1	$= 0$,
Y_4	=	0	0	1	-1	0	-3	3	2	$= 0$.

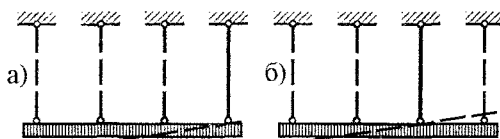
Затем Y_3 с $\Delta\lambda_1$.

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_4$	$\Delta\lambda_5$	$\Delta\lambda_6$	$\Delta\lambda_7$	$\Delta\lambda_8$	
$Y_1 =$	-2,5	1	-2	-2	-1	-1	-0,5	-1,5	$\geq 0,$
$\Delta\lambda_3 =$	1	0	0	1	0	0	0	0	$\geq 0,$
$\Delta\lambda_1 =$	1,5	0	1	0	0	0	-0,5	0,5	$\geq 0,$
$Y_4 =$	1,5	0	0	0	-3	3	1,5	-1,5	$= 0.$

Далее Y_4 с $\Delta\lambda_5$.

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_4$	$\Delta\lambda_6$	$\Delta\lambda_7$	$\Delta\lambda_8$	
$Y_1 =$	-3	1	-2	-2	-2	-1	-1	$\geq 0,$
$\Delta\lambda_3 =$	1	0	0	1	0	0	0	$\geq 0,$
$\Delta\lambda_1 =$	1,5	0	1	0	0	-0,5	0,5	$\geq 0,$
$\Delta\lambda_5 =$	0,5	0	0	0	-1	-0,5	0,5	$\geq 0.$

Условия задачи выполнены. Минимальное значение F , удовлетворяющее первое неравенство $F_u = 3\sigma_{yl}A$. Механизм разрушения определяется последними тремя строчками: $\Delta\lambda_1 = 1,5$; $\Delta\lambda_3 = 1$; $\Delta\lambda_5 = 0,5$. Он изображен на рис. 20.16 а.



$$\Delta\lambda_1 = 1,5 \quad \Delta\lambda_3 = 1 \quad \Delta\lambda_5 = 0,5 \quad \Delta\lambda_1 = 2 \quad \Delta\lambda_3 = 1 \quad \Delta\lambda_8 = 1$$

Рис. 20.16

Отметим особенность приближенного решения задачи кинематическим методом. Если отказаться от поиска действительного механизма разрушения и задаться каким-либо из них, например, изображенным на рис. 20.16 б, в котором $\Delta\lambda_1 = 2$, $\Delta\lambda_3 = 1$, $\Delta\lambda_8 = 1$, то по табл. (д) имеем $F_u = 4\sigma_{yl}A$ — больше действительного. Любое приближенное решение задачи кинематическим методом дает завышенное значение разрушающей нагрузки. Впрочем, это свойство отражено в самой формулировке теоремы.

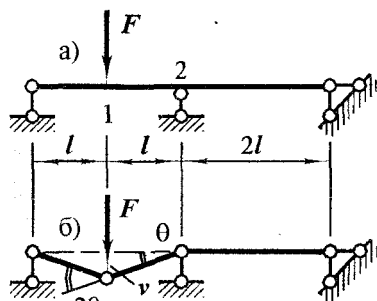
20.3.3. Примеры расчетов балок кинематическим методом при известных механизмах разрушения

Балки и плоские рамы превращаются в механизмы в результате достижения изгибающими моментами предельных величин в некоторых сечениях. Распределения напряжений в сечениях проиллюстрировано рис. 20.9 и 20.10. Поскольку под расчетными сопротивлениями подразумеваются пределы текучести, все волокна балок деформируются при постоянных напряжениях – текут. Происходит взаимный поворот частей балки, разделенных таким сечением. Появившаяся кинематическая свобода схожа с возможностью, предоставляемой шарнирной связью. Однако эта свобода появляется при достижении моментом предельной величины. В теории предельного равновесия такую кинематическую свободу называют *пластическим шарниром*. От обычной шарнирной связи он отличается двумя особенностями (рис. 20.8):

- изгибающий момент в нем равен предельному;
- пластический шарнир односторонний – при уменьшении момента он закрывается.

Рассмотрим простейшие примеры балок и нагрузок, при которых механизмы разрушения либо очевидны, либо устанавливаются несложным анализом.

20.3.3.1. На рис. 20.17 а изображена балка, рассчитанная выше



статическим методом. Найдем разрушающее значение силы методом кинематическим.

Балка превратится в механизм (рис. 20.17 б), когда под силой (сеч. 1) и над средней опорой (сеч. 2) откроются пластические шарниры.

Работа силы $W_{ext} = Fv$.

Работа внутренних сил

Рис. 20.17

$$W_{int} = M_u 2\theta + M_u \theta = 3M_u \theta.$$

Но $\theta = v/l$. Таким образом, $W_{int} = 3M_u v/l$. Из равенства работ $W_{ext} = W_{int} = Fv = 3M_u v/l$ находим $F_u = 3M_u/l$, что совпадает с полученным ранее статическим методом.

20.3.3.2. В предыдущем примере механизм разрушения был очевиден. Решение задачи предельного равновесия оказалось несложным. В некоторых расчетных схемах механизм качественно ясен, но требует дополнительного анализа. Для иллюстрации сказанного рассмотрим балку, изображенную на рис. 20.18 а.

Балка разрушится в результате образования пластических шарниров в а) пролете и на правом конце (рис. 20.18 б).

Работа внешней нагрузки $W_{ext} = \int_0^l qv dz = q \int_0^l v dz = 0,5ql\delta$. Углы поворота в механизме $\theta_0 = \delta/z$, $\theta_2 = \delta/(l-z)$, $\theta_1 = \theta_0 + \theta_2 = \delta(1/z + 1/(l-z))$. Работа внутренних сил

$$W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_2) = M_u\delta(1/z + 2/(l-z)).$$

Условие предельного равновесия $W_{ext} = W_{int}$ принимает вид $0,5ql\delta = M_u\delta(1/z + 2/(l-z))$, откуда $q = 2M_u(1/z + 2/(l-z))/l$. Место образования пролетного шарнира найдем из условия минимума разрушающей нагрузки $dq/dz = 0$, или $2/(l-z)^2 - 1/z^2 = 0$, что приводит к уравнению $z^2 + 2lz - l^2 = 0$, положительный корень которого $z = 0,414l$. Разрушающая нагрузка, соответствующая ему, $q_u = 11,657 M_u/l^2$. Она совпадает с найденной статическим методом.

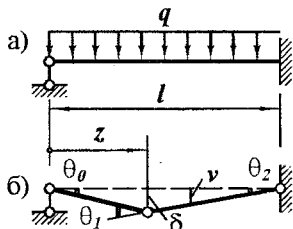


Рис. 20.18

20.3.4. Пример расчета плоской рамы перебором возможных механизмов разрушения

Расчетные схемы, в которых механизмы разрушения очевидны или легко определяются, встречаются редко. Чаще приходится рассматривать несколько, а то и все возможные механизмы. Проиллюстрируем сказанное примером.

Найдем параметр нагрузки, разрушающей плоскую раму, изображенную на рис. 20.19.

Возможные механизмы разрушения изображены на рис. 20.20 а, б, в. Найдем разрушающую нагрузку, соответствующую каждому из них.

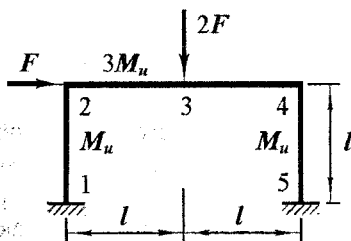


Рис. 20.19

Первый механизм (рис. 20.20 а).

Работа внешней нагрузки $W_{ext} = F \delta_2$.

Углы поворота в пластических шарнирах $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = \delta_2/l$.
Работа внутренних сил $W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5) = 4M_u \delta_2/l$. Из равенства работ следует $F_u^1 = 4M_u/l$.

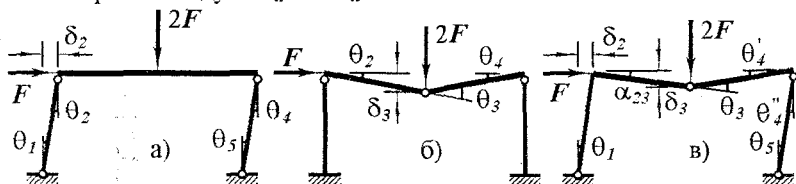


Рис. 20.20

Второй механизм (рис. 20.20 б).

Работа внешней нагрузки $W_{ext} = 2F \delta_3$.

Углы поворота в пластических шарнирах $\theta_3 = \theta_2 + \theta_4$; $\theta_2 = \theta_4 = \delta_3/l$.
Работа внутренних сил $W_{int} = M_u(\theta_2 + \theta_4) + 3M_u \theta_3 = 8M_u \delta_3/l$. Приравнявая работы, находим $F_u^2 = 4M_u/l$.

Третий механизм (рис. 20.20 в).

Работа внешней нагрузки $W_{ext} = F \delta_2 + 2F \delta_3$. Но $\delta_2 = \delta_3$. Таким образом, $W_{ext} = 3F \delta_3$.

Углы поворота в шарнирах: $\theta_1 = \theta_4'' = \theta_5 = \delta_2/l = \delta_3/l$; $\alpha_{23} = \theta_4' = \delta_3/l$; $\theta_3 = \alpha_{23} + \theta_4' = 2\delta_3/l$. Внутренние силы в рассматриваемом механизме разрушения совершают работу

$$W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_4' + \theta_4'' + \theta_5) + 3M_u \theta_3 = 10M_u \delta_3/l.$$

Из равенства работ $F_u^3 = 3,33M_u/l$. Минимальное значение – третье: $F_u = 3,33M_u/l$.

В рассмотренной расчетной схеме число возможных механизмов разрушения – три. Расчет оказался несложным. Однако с ростом степени статической неопределимости конструкции и количества сил, действующих на нее, число возможных механизмов быстро растет и проиллюстрированный перебор всех вариантов разрушения становится чрезмерно громоздким. В таких условиях необходим формализованный метод формирования расчетных условий и алгоритм вычисления разрушающей нагрузки.

20.3.5. Система условий задачи кинематического метода расчета балок и плоских рам

Остановимся на процедуре формирования расчетных соотношений для балок и плоских рам. Система ограничений задачи включает:

- условия совместности приращений пластических деформаций (кинематической возможности);
- выражений перемещений точек приложения сил через пластические деформации;
- условия разрушения.

20.3.5.1. Порядок формирования условий кинематической возможности приращений пластических деформаций:

1) Выбирают основную систему метода сил и строят эпюры моментов от единичных реакций избыточных связей.

2) Назначают конкретные сечения, в которых могут открыться пластические шарниры с углами поворота θ_i .

3) Записывают условия совместности пластических деформаций

$$\sum_j^{j^+} M_{ij}^{(j)} \theta_i = 0. \quad (a)$$

В нем: j – номер избыточной связи; i – номер сечения с пластическим шарниром; $M_{ij}^{(j)}$ – изгибающий момент в i -м сечении от $X_j = 1$; i^+ – общее число сечений; j^+ – степень статической неопределимости конструкции. Равенства (a) справедливы и для приращений углов поворота $\Delta\theta_i$: $\sum_j^{j^+} M_{ij}^{(j)} \Delta\theta_i = 0$.

Так как знаки $\Delta\theta_i$ могут быть любыми, вводят разности

$$\Delta\theta_i = \Delta\lambda_{2i-1} - \Delta\lambda_{2i} \text{ при } \Delta\lambda_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 2i^+). \quad (б)$$

После этого условия кинематической возможности принимают вид

$$\sum_j^{j^+} M_{ij}^{(j)} (\Delta\lambda_{2i-1} - \Delta\lambda_{2i}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, j^+). \quad (20.29)$$

Равенства (20.29) описывают все возможные механизмы разрушения.

20.3.5.2. Условие разрушения запишем в виде $W_{ext} \geq W_{int}$:

$$\sum_k^{k^+} F_{uk} \delta_k \geq \sum_i^{i^+} M_{ii} (\Delta\lambda_{2i-1} + \Delta\lambda_{2i}), \quad (в)$$

где F_{ik} – разрушающее значение k -й силы; δ_k – перемещение точки приложения силы F_k в механизме разрушения; M_{ui} – предельный момент i -го сечения. В состоянии предельного равновесия условие (в) превращается в равенство.

Выразим все внешние силы через один параметр: $F_k = H_k F$, где H_k – числовой коэффициент. После этого условие (в) принимает вид

$$F \sum_I^{k^+} H_k \delta_k \geq \sum_I^{i^+} M_{ui} (\Delta \lambda_{2i-1} + \Delta \lambda_{2i}). \quad (г)$$

С другой стороны, на основании теоремы виртуальных работ

$$\delta_k = \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} \Delta \theta_i \quad (k = 1, 2, \dots, k^+). \quad (д)$$

Здесь $M_{ik}^{(I)}$ – изгибающий момент в заданной статически неопределимой конструкции от $F_k = 1$. Умножив равенство (д) на соответствующие H_k и просуммировав, получаем

$$\sum_I^{k^+} H_k \delta_k = \sum_I^{k^+} H_k \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} \Delta \theta_i. \quad (е)$$

Поскольку длина пути, на которой сравниваются работы постоянных сил, не имеет значения, величины δ_k не влияют на условие разрушения. Их можно подобрать так, чтобы $\sum_I^{k^+} H_k \delta_k = l$, где l – некоторый геометрический параметр, имеющий размерность длины. Учитывая введенный масштаб, запишем условие разрушения (г) в виде

$$Fl \geq \sum_I^{i^+} M_{ui} (\Delta \lambda_{2i-1} + \Delta \lambda_{2i}). \quad (20.30)$$

В связь перемещений с приращениями пластических деформаций (е) введем индексы текучести (б) и получим равенство

$$l - \sum_I^{k^+} H_k \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} (\Delta \lambda_{2i-1} - \Delta \lambda_{2i}) = 0. \quad (20.31)$$

Система ограничений задачи состоит из $j^+ + 2$ выражений: j^+ условий совместности (20.29), равенства (20.31) и неравенства (20.30) при $\Delta \lambda_m \geq 0$ и $F > 0$. Требуется найти $\min F$.

20.3.6. Пример расчета балки по формализованному алгоритму

Не всегда можно указать действительный механизм разрушения, перебирать все – громоздко. Нужен формализованный алгоритм расчета. Проиллюстрируем алгоритм, описанный в разд. 20.3.2, примером. Найдем силу F_u , разрушающую балку (рис. 20.21 а).

В соответствии с описанной последовательностью составления условий задачи выбираем основную систему метода сил (рис. 20.21 б). Эпюры моментов от единичной силы приведена на рис. 20.21 в. Появление пластических шарниров возможно в сечениях 1 и 2. Условие кинематической совместности приращений углов поворота в шарнирах (20.29) имеет вид

$$I(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2) + 2I(\Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_4) = 0. \quad (a)$$

Условие разрушения (20.30) –

$$F_u l \geq M_u(\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \Delta\lambda_3 + \Delta\lambda_4). \quad (б)$$

Для связи перемещения точки 1 с пластическими деформациями построим эпюру изгибающих моментов от $F=1$ (рис. 20.21 г, д). Согласно равенству (20.31) имеем

$$I - 0,406I(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2) + 0,188I(\Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_4) = 0.$$

Решим задачу (а), (б), (в). Сведем условия в таблицу.

Действия

	1	$F_u l / M_u$	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$	$\Delta\lambda_4$	
по алгоритму, $Y_1 =$	0	1	-1	-1	-1	-1	≥ 0 ,
описанному в $Y_2 =$	1	0	-0,406	0,406	0,188	-0,188	$= 0$,
п. 20.3.2.3, по- следовательнo получаем:	$Y_3 =$	0	0	1	-1	2	$= 0$.

При $F/M_u = 3$, $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_3 = 0$ все условия выполнены. Так как коэф-

	1	$F_u l / M_u$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$	$\Delta\lambda_4$	
$Y_1 =$	-2,462	1	-2	-1,462	-0,538	≥ 0 ,
$\Delta\lambda_1 =$	2,462	0	1	0,462	-0,462	≥ 0 ,
$Y_3 =$	2,462	0	0	2,462	-2,462	$= 0$.

фициенты при $\Delta\lambda_2$ и $\Delta\lambda_3$ в первой строке отрицательны, $F_u = 3M_u/l$. Это совпадает с найденными выше значениями. Механизм разрушения описывается равенством $\Delta\lambda_4 = 1$, $\Delta\lambda_1 = 2$ (рис. 20.21 е).

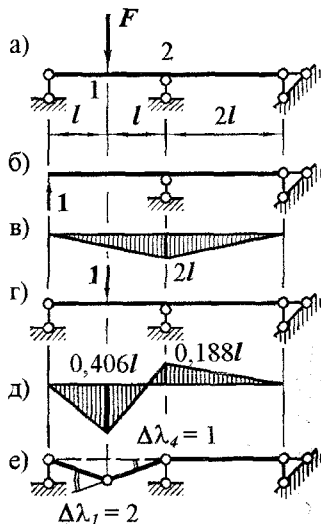


Рис. 20.21

(в)

20.3.7. Пример расчета железобетонной плиты

Теория предельного равновесия применяется при расчетах железобетонных конструкций – балок, рам и плит. С целью иллюстрации практического приложения кинематического метода приведем пример оценки несущей способности железобетонной плиты.

Железобетонная плита, защемленная по периметру, подвержена равномерному давлению p по всей поверхности (рис. 20.22).

Исходные данные:

- размер $l = 2$ м;
- армирование – две сетки с ячейкой $b \times b = 10 \times 10$ см,
- диаметр проволоки сеток $d = 5$ мм;
- толщина плиты $h = 16$ см,
- рабочая высота сечения $h_0 = 13$ см;
- расчетное сопротивление бетона $R_{снс} = 8$ МПа, арматуры $R_{ст} = 300$ МПа.

Определим давление, разрушающее плиту.

В нормативной литературе по расчету железобетонных плит для подобных схем рекомендуют принимать механизм разрушения, в котором девять цилиндрических пластических шарниров:

– по периметру 1–2, 2–6, 5–6 и 1–5;

– наклонные 1–3, 2–3, 4–5 и 4–6;

– посередине плиты 3–4.

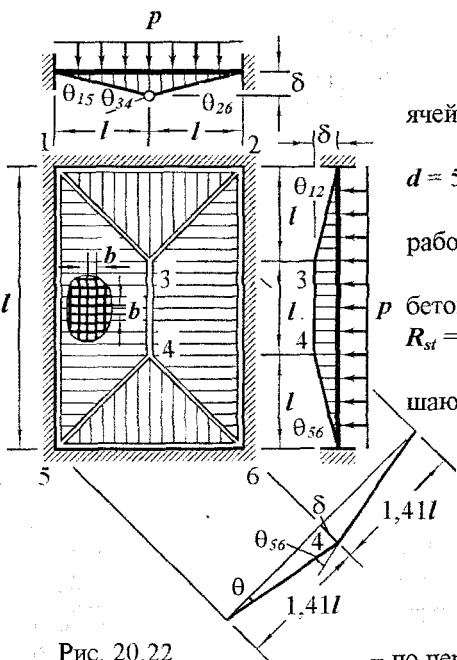
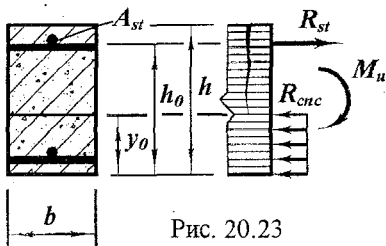


Рис. 20.22

Работа давления на перемещения механизма $W_{ext} = pV_w$, где V_w – объем эпюры прогибов. Представив ее двумя пирамидами с основаниями $2l \times l$, высотами δ , и трехгранной призмой с ребром 3–4, находим $W_{ext} = p(2 \cdot 2l \cdot l \cdot \delta / 3 + 2l \cdot l \cdot \delta / 2) = 2,33 p \delta l^2$.

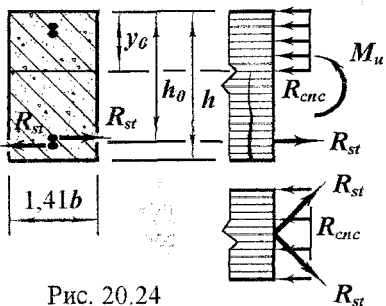
Найдем предельные моменты в пластических шарнирах.

Рассмотрим, например, шарнир 1-5 (рис. 20.23). Отсутствие продольной силы дает равенство $R_{cnc}by_o = R_{st}A_{st}$. Учитывая, что $A_{st} = \pi d^2/4 = 3,14 \cdot 0,5^2/4 = 0,196 \text{ см}^2$, находим высоту сжатой зоны бетона в шарнире $y_o = R_{st}A_{st}/(R_{cnc}b) = 30 \cdot 0,196/(0,8 \cdot 10) = 0,74 \text{ см}$. Предельный момент $M_u = R_{st}A_{st}(h_o - y_o/2)/b = 30 \cdot 0,196(13 - 0,74/2)/10 = 7,43 \text{ кН}$.



В наклонных шарнирах арматурные стержни наклонены к сечению под 45° (рис. 20.24). Рассмотрим отрезок, обслуживаемый парой стержневой сетки. Из равенства растягивающей и сжимающей сил

$R_{cnc}1,41by_o = R_{st}A_{st}0,707 \cdot 2$,
находим $y_o = R_{st}A_{st}/(R_{cnc}b) = 0,74 \text{ см}$.
Предельный момент в шарнире $M_u = 2R_{st}A_{st}0,707(h_o - y_o/2)/(1,41b) = R_{st}A_{st}(h_o - y_o/2)/b = 7,43 \text{ кН}$.



Равенство предельных моментов во всех шарнирах – следствие одинакового армирования плиты в обоих направлениях.

Углы поворотов θ в пластических шарнирах и параметр механизма δ связаны так (рис. 20.22):

$$\theta_{12} = \theta_{56} = \delta/l; \theta_{34} = 2\delta/l;$$

$$\theta_{13} = \theta_{23} = \theta_{45} = \theta_{46} = 2\delta/(1,41l) = 1,41\delta/l; \theta_{15} = \theta_{26} = \delta/l.$$

Работа внутренних сил $W_{int} = M_u(2\theta_{12}2l + 2\theta_{15}3l + 4\theta_{13}1,41l + \theta_{34}l)$. Выразив углы поворота через параметр механизма, получаем $W_{int} = 20M_u\delta$. По равенству $W_{ext} = W_{int}$ находим $p_u = 8,57M_u/l^2 = 8,57 \cdot 7,43/2^2 = 15,9 \text{ кН/м}^2$. Этот результат больше действительного, так как истинный механизм разрушения не известен.

В заключении к разделу, посвященному кинематическому методу, отметим и его достоинство – наглядность, и недостаток – отклонения приближенных решений не в запас прочности.

20.4. Расчет кинетики деформирования – статико-кинематический метод

Разрушающую нагрузку можно найти, следя за деформированием конструкции в процессе монотонного роста нагрузки. При этом выполняются условия и статической, и кинематической теорем.

20.4.1. Решение задачи теории предельного равновесия шарнирно-стержневой системы

20.4.1.1. Проиллюстрируем метод на шарнирно-стержневой системе (рис. 20.2). Расчет включает два этапа – формирование условий задачи с записью их в таблицу и преобразования таблицы.

Первый этап состоит из:

- а) “упругого” расчета, определяющего напряжения;
- б) представления полных напряжений в виде сумм (20.19);
- в) выражения остаточных напряжений через пластические деформации (20.14);
- г) разложения пластических деформаций на разности, аналогичные (20.5) или (20.18);
- д) введения функций текучести типа (20.3).

В итоге формируется таблица (а).

σ_{yl}	F/A	$E\lambda_1$	$E\lambda_2$	$E\lambda_3$	$E\lambda_4$	$E\lambda_5$	$E\lambda_6$	$E\lambda_7$	$E\lambda_8$		
$\varphi_1 =$	-1	0,4	-0,3	0,3	0,4	-0,4	0,1	-0,1	-0,2	0,2	$\leq 0,$
$\varphi_2 =$	-1	-0,4	0,3	-0,3	-0,4	0,4	-0,1	0,1	0,2	-0,2	$\leq 0,$
$\varphi_3 =$	-1	0,3	0,4	-0,4	-0,7	0,7	0,2	-0,2	0,1	-0,1	$\leq 0,$
$\varphi_4 =$	-1	-0,3	-0,4	0,4	0,7	-0,7	-0,2	0,2	-0,1	0,1	$\leq 0,$
$\varphi_5 =$	-1	0,2	0,1	-0,1	0,2	-0,2	-0,7	0,7	0,4	-0,4	$\leq 0,$
$\varphi_6 =$	-1	-0,2	-0,1	0,1	-0,2	0,2	0,7	-0,7	-0,4	0,4	$\leq 0,$
$\varphi_7 =$	-1	0,1	-0,2	0,2	0,1	-0,1	0,4	-0,4	-0,3	0,3	$\leq 0,$
$\varphi_8 =$	-1	-0,1	0,2	-0,2	-0,1	0,1	-0,4	0,4	0,3	-0,3	$\leq 0.$

Второй этап. При условиях (20.17), следим за развитием пластических деформаций в ходе роста силы от нуля при всех $\lambda_m = 0$.

При $F = 0$ и $\lambda_m = 0$ все функции $\varphi_m = -\sigma_{yl}$. С ростом F растут $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ и φ_7 . Быстрее других φ_1 . Значение $F = F^I$, при котором φ_1 достигнет нуля, найдем из равенства $\varphi_1 = -\sigma_{yl} + 0,4F^I/A = 0$, что дает $F^I = 2,5\sigma_{yl}A$. Из условий (20.17) $\varphi_1 \leq 0$, $\varphi_1 \Delta\lambda_1 = 0$ следует, что φ_1 , достигнув нуля, остановится в росте, а начнет расти λ_1 . Поменяем местами φ_1 и λ_1 – таблица (б).

	σ_{yl}	F/A	φ_1	$E\lambda_2$	$E\lambda_3$	$E\lambda_4$	$E\lambda_5$	$E\lambda_6$	$E\lambda_7$	$E\lambda_8$	
$E\lambda_1$	-3,33	1,33	-3,33	1	1,33	-1,33	0,33	-0,33	-0,67	0,67	≥ 0 ,
φ_2	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	≤ 0 ,
φ_3	-2,33	0,83	-1,33	0	-0,17	0,17	0,33	-0,33	-0,17	0,17	≤ 0 ,
φ_4	0,33	-0,83	1,33	0	0,17	-0,17	-0,33	0,33	0,17	-0,17	≤ 0 , (б)
φ_5	-1,33	0,33	-0,33	0	0,33	-0,33	-0,67	0,67	0,33	-0,33	≤ 0 ,
φ_6	-0,67	-0,33	0,33	0	-0,33	0,33	0,67	-0,67	-0,33	0,33	≤ 0 ,
φ_7	-0,33	-0,17	0,67	0	-0,17	0,17	0,33	-0,33	-0,17	0,17	≤ 0 ,
φ_8	-1,67	0,17	-0,67	0	0,17	-0,17	-0,33	0,33	0,17	-0,17	≤ 0 .

На рассматриваемой ступени $\varphi_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_8 = 0$, изменения всех величин, стоящих слева, описываются первыми двумя столбцами таблицы (б). Найдем значение силы, при котором следующая функция φ достигнет нуля. Растут функции с положительными коэффициентами при F . Рассмотрим φ_3, φ_5 и φ_8 . Из условий $\varphi_3 \leq 0$, $\varphi_5 \leq 0$, $\varphi_8 \leq 0$ находим: $F^2 \leq 2,8\sigma_{yl}A$, $F^2 \leq 4\sigma_{yl}A$, $F^2 \leq 10\sigma_{yl}A$. Таблица (б) справедлива при $2,5 \leq F/(\sigma_{yl}A) \leq 2,8$.

Дальнейший рост силы F вызовет пластические деформации, соответствующие $\Delta\lambda_3 > 0$ – текучесть второго стержня от растягивающих напряжений. Поменяем местами φ_3 с λ_3 – таблица (в).

	σ_{yl}	F/A	φ_1	$E\lambda_2$	φ_3	$E\lambda_4$	$E\lambda_5$	$E\lambda_6$	$E\lambda_7$	$E\lambda_8$	
$E\lambda_1$	-22	8	-12	1	-8	0	3	-3	-3	2	≥ 0 ,
φ_2	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	≤ 0 ,
$E\lambda_3$	-14	5	-1,33	0	-6	1	2	-2	-1	1	≥ 0 ,
φ_4	-2	0	1,33	0	-1	0	0	0	0	0	≤ 0 , (в)
φ_5	-6	2	-0,33	0	-2	0	0	0	0	0	≤ 0 ,
φ_6	-4	-2	0,33	0	2	0	0	0	0	0	≤ 0 ,
φ_7	2	-1	0,67	0	1	0	0	0	0	0	≤ 0 ,
φ_8	-4	1	-0,67	0	-1	0	0	0	0	0	≤ 0 .

На следующем этапе роста силы увеличиваются φ_5 и φ_8 . Они отрицательны, пока $F^3 \leq 3\sigma_{yl}A$, $F^3 \leq 4\sigma_{yl}A$. Действительно меньшее значение силы. При $F = 3\sigma_{yl}A$ начнется пластическое удлинение третьего стержня, $\Delta\lambda_5 > 0$. Остановить рост функции φ_5 за счет $\Delta\lambda_5 > 0$ нельзя – коэффициент при λ_5 в выражении φ_5 нулевой. Это признак разрушения. Таким образом, $F_u = 3\sigma_{yl}A$.

При $F = 3\sigma_{yl}A$ по таблице (в) $\lambda_1 = 2\sigma_{yl}/E + 3\lambda_5$, $\lambda_3 = \sigma_{yl}/E + 2\lambda_5$. Первые слагаемые в этих равенствах – пластические деформации, достигнутые к моменту разрушения, вторые характеризуют наметившийся механизм, изображенный на рис. 20.3.

20.4.1.2. Таблицы (а), (б), (в) позволяют определить характеристики напряженно-деформированного состояния конструкции при любом значении силы. Например, при $F = 2,9\sigma_{yl}A$ (справедлива таблица (в)) $\lambda_1 = 1,2\sigma_{yl}/E$, $\lambda_3 = 0,5\sigma_{yl}/E$. По равенствам (20.5) имеем $\varepsilon_1^e = \lambda_1$, $\varepsilon_2^e = \lambda_3$, $\varepsilon_3^e = \varepsilon_4^e = 0$. Остаточные напряжения (20.14) равны: $\sigma_1^r = -0,16\sigma_{yl}$, $\sigma_2^r = 0,13\sigma_{yl}$, $\sigma_3^r = 0,22\sigma_{yl}$, $\sigma_4^r = -0,19\sigma_{yl}$. Они совпадают с найденными в разд. 20.3.

Упругие напряжения: $\sigma_1^e = 1,16\sigma_{yl}$, $\sigma_2^e = 0,87\sigma_{yl}$, $\sigma_3^e = 0,58\sigma_{yl}$, $\sigma_4^e = 0,29\sigma_{yl}$. Полные: $\sigma_1 = \sigma_{yl}$, $\sigma_2 = \sigma_{yl}$, $\sigma_3 = 0,8\sigma_{yl}$, $\sigma_4 = 0,1\sigma_{yl}$.

Относительные удлинения достигли значений: $\varepsilon_1 = 2,2\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_2 = 1,5\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_3 = 0,8\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_4 = 0,1\sigma_{yl}/E$. В них остаточные части: $\varepsilon_1^r = 1,04\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_2^r = 0,63\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_3^r = 0,22\sigma_{yl}/E$, $\varepsilon_4^r = -0,19\sigma_{yl}/E$.

20.4.1.3. Нетрудно заметить, что описанный метод расчета удовлетворяет требования и статической, и кинематической теорем:

- упругие напряжения – статически возможны, полные тоже;
- условия $\varphi_m \leq 0$ держат напряжения в допустимом диапазоне;
- окончание счета в момент образования механизма разрушения – использование критерия кинематической теоремы.

Сравнивая трудоемкости решения задач, видим, что расчет кинетики деформирования уступает и статическому, и кинематическому методам, но по полноте получаемой информации – выигрывает, так как позволяет не только найти разрушающую нагрузку, но и все характеристики напряженно-деформированного состояния.

20.4.2. Формулы расчета кинетики деформирования балок и плоских рам.

Пример расчета несущей способности двухпролетной балки

20.4.2.1. Последовательность формирования условий задачи – та же, что и п. 20.4.1.

Раскрытие статической неопределимости изгибаемой стержневой конструкции сводится к решению системы уравнений

$$\int_l M_j^{(I)} \kappa dz = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, j^+), \quad (a)$$

где $M_j^{(I)}$ – изгибающий момент от единичной реакции j -й лишней связи; κ – кривизна оси; j^+ – степень статической неопределимости.

Кривизна оси определяется равенством (20.21). Момент

$$M = M^{oF} + \sum_j^{j^+} X_j M_j^{(I)}, \quad (б)$$

где M^{oF} – момент от внешней нагрузки в основной системе метода сил; X_j – реакция j -й лишней связи; $M_j^{(I)}$ – момент от $X_j = 1$. Подстановка равенства (б) и (20.21) придает уравнениям (а) вид

$$\int_l (M^{oF} M_n^{(I)} dz / (EJ)) + \sum_j^{j^+} X_j \int_l (M_n^{(I)} M_j^{(I)} dz / (EJ)) + \int_l M_n^{(I)} \kappa^p dz = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, j^+).$$

Обозначив $\kappa^p dz = \theta_i$ и заменив последний интеграл суммой, имеем

$$\int_l (M^{oF} M_n^{(I)} dz / (EJ)) + \sum_j^{j^+} X_j \int_l (M_n^{(I)} M_j^{(I)} dz / (EJ)) + \sum_j^{j^+} M_{ij}^{(I)} \theta_i = 0.$$

Здесь $M_{ij}^{(I)}$ – момент в i -м сечении от $X_j = 1$.

Представим опорные реакции в виде сумм

$$X_j = X_j^e + X_j^r. \quad (в)$$

Упругая X_j^e и остаточная X_j^r части удовлетворяют уравнениям:

$$\int_l (M^{oF} M_j^{(I)} dz / (EJ)) + \sum_j^{j^+} X_j^e \int_l (M_n^{(I)} M_j^{(I)} dz / (EJ)) = 0; \quad (г)$$

$$\sum_j^{j^+} X_j^r \int_l (M_n^{(I)} M_j^{(I)} dz / (EJ)) + \sum_j^{j^+} M_{ij}^{(I)} \theta_i = 0.$$

Составляющие изгибающего момента (20.26) и опорных реакций (в) связаны между собой: упругие моменты $M^e = M^{oF} + \sum_j^{j^+} X_j^e M_j^{(I)}$,

а остаточные – $M^r = \sum_j^{j^+} X_j^r M_j^{(I)}$. (д)

Подготовительный этап состоит из двух частей: “упругого” расчета (впрочем, он может быть выполнен любым методом строительной механики), в результате которого устанавливаются зависимости

$$M_i^e = F \sum_I^{k^+} B_i, \quad (e)$$

и выражений остаточных моментов через углы поворотов в возможных пластических шарнирах, дающих равенства

$$M_i^r = \sum_I^{i^+} C_{il} \theta_l \quad (l = 1, 2, \dots, i^+). \quad (ж)$$

Ограничения на величины изгибающих моментов:

$$\varphi_{2i-1} = M_i - M_{ui} \leq 0; \quad \varphi_{2i} = -M_i - M_{ui} \leq 0. \quad (и)$$

После подстановки в них равенств (20.26), (е) и (ж) имеем:

$$\varphi_{2i-1} = F \sum_I^{k^+} B_i + \sum_I^{i^+} C_{il} \theta_l - M_{ui} \leq 0; \quad \varphi_{2i} = -F \sum_I^{k^+} B_i - \sum_I^{i^+} C_{il} \theta_l - M_{ui} \leq 0. \quad (к)$$

Представив углы поворота в пластических шарнирах разностями

$$\theta_i = \lambda_{2i-1} - \lambda_{2i}, \quad (л)$$

записываем условия текучести и закон течения

$$\varphi_m \Delta \lambda_m = 0; \quad \Delta \lambda_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 2i^+). \quad (м)$$

Условия (к), (л) и (м) позволяют проследить за кинетикой деформирования в процессе роста параметра нагрузки.

По равенству (20.26) кривизну оси (20.21) запишем в виде

$$\kappa = M^e/(EJ) + M^r/(EJ) + \kappa^p.$$

Первое слагаемое – обратимая часть; обозначим ее $M^e/(EJ) = \kappa^{ee}$; другая – остаточная кривизна $\kappa^r = M^r/(EJ) + \kappa^p$.

20.4.2.2. Найдем нагрузку, разрушающую двухпролетную балку (рис. 20.25 а).

Эпюра упругих моментов показана на рис. 20.25 б.

Построив единичную эпюру моментов (рис. 20.25 в, г), имеем $\int_I (M^{(1)} M^{(2)} dz)/(EJ) = 16l^3/(3EJ)$. Пластические шарниры возможны в сечениях 1, 2 и 3. Сумма произведений $\sum_I^3 M^{(1)} \theta_i = l(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3)$.

Уравнение (г) принимает вид $5,333X^r l^3/(EJ) - l(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3) = 0$. Из него $X^r = 0,1875EJl(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3)/l^2$.

Остаточные моменты (и) находим по выражению (д):

$$\begin{vmatrix} M_1^r \\ M_2^r \\ M_3^r \end{vmatrix} = -0,1875EJl \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{vmatrix}. \quad (н)$$

Заменив углы поворота разностями (л), просуммировав упругие и остаточные моменты, формируем функции текучести (к) (табл. п).

При начальных $\lambda_m = 0$ увеличиваем F . Вместе с нею растут φ_1 , φ_4 и φ_5 . Быстрее других φ_4 . Она достигает нуля при $F^I = 2,6596M_u/l$. Меняем местами φ_4 с λ_4 (табл. р).

В ходе дальнейшего роста $F > F^I$ в нуль одновременно обращаются φ_1 и φ_5 . Это происходит при $F = 3M_u/l$. Увеличение сил сверх этого значения невозможно, так как коэффициенты при λ_1 и λ_5 в выражениях φ_1 и φ_5 равны нулю. Итак, $F_u = 3M_u/l$.

В рассмотренной балке возможна реализация одного из трех механизмов (рис. 20.25 д, е или ж).

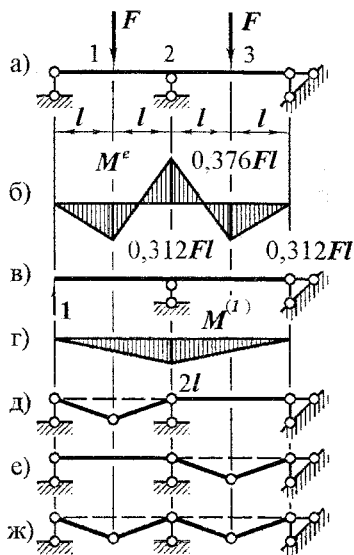


Рис. 20.25

	M_u	Fl	$EJ\lambda_1/l$	$EJ\lambda_2/l$	$EJ\lambda_3/l$	$EJ\lambda_4/l$	$EJ\lambda_5/l$	$EJ\lambda_6/l$	
$\varphi_1 =$	-1	0,312	-0,188	0,188	-0,375	0,375	-0,188	0,188	≤ 0 ,
$\varphi_2 =$	-1	-0,312	0,188	-0,188	0,375	-0,375	0,188	-0,188	≤ 0 ,
$\varphi_3 =$	-1	-0,376	-0,375	0,375	-0,75	0,75	-0,375	0,375	≤ 0 ,
$\varphi_4 =$	-1	0,376	0,375	-0,375	0,75	-0,75	0,375	-0,375	≤ 0 , (п)
$\varphi_5 =$	-1	0,312	-0,188	0,188	-0,375	0,375	-0,188	0,188	≤ 0 ,
$\varphi_6 =$	-1	-0,312	0,188	-0,188	0,375	-0,375	0,188	-0,188	≤ 0 .

	M_u	Fl	$EJ\lambda_1/l$	$EJ\lambda_2/l$	$EJ\lambda_3/l$	φ_4	$EJ\lambda_5/l$	$EJ\lambda_6/l$	
$\varphi_1 =$	-1,5	0,5	0	0	0	-0,5	0	0	≤ 0 ,
$\varphi_2 =$	-0,5	-0,5	0	0	0	0,5	0	0	≤ 0 ,
$\varphi_3 =$	-2	0	0	0	0	-1	0	0	≤ 0 ,
$EJ\lambda_4/l =$	-1,33	0,501	0,5	-0,5	1	-1,33	0,5	-0,5	≥ 0 , (р)
$\varphi_5 =$	-1,5	0,5	0	0	0	-0,5	0	0	≤ 0 ,
$\varphi_6 =$	-0,5	-0,5	0	0	0	0,5	0	0	≤ 0 .

К моменту разрушения угол поворота в шарнире 2 достиг $EJ\theta_2/l = EJ\lambda_4/l = (0,501 \cdot 3 - 1,33)M_u = 0,171M_u$.

Заключение

Статический и кинематический методы можно рассматривать как методы альтернативные. Первый из них опирается на условия, при которых конструкция сохраняет способность воспринимать нагрузку, второй – на условия разрушения. Это различие отразилось и в соотношении нагрузок, удовлетворяющих соответствующим теоремам. Любая нагрузка, отвечающая требованиям статической теоремы, не может быть больше разрушающей. И наоборот, силы, при которых согласно кинематической теореме обязательно произойдет разрушение, естественно, не менее предельных. Действительная разрушающая нагрузка – наибольшая по статическому критерию и наименьшая по кинематическому.

Все рассмотренные методы позволяют решить задачу о несущей способности конструкции при однократном монотонном (однопараметрическом) нагружении. В этом их сходство. В то же время статический и кинематический подходы не дают полной информации об остаточных напряжениях, деформациях и перемещениях в конструкции. Расчет же кинетики деформирования предоставляет больше сведений о напряженно-деформированном состоянии. В этом его отличие и в известной мере достоинство.

Линеаризация всех расчетных соотношений позволила решать задачи методами линейной алгебры. Но и внутри этого раздела математики методы приводят к разным задачам: статический и кинематический к задачам линейного программирования, расчет кинетики деформирования – к решению систем неравенств в последовательности, опирающегося на физическую основу. Отметим, что размерность задач, определяемая числом переменных, в последнем методе выше. Это – “плата” за больший объем получаемой информации.

Владимир Андреевич Икрин

**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ПРЕДЕЛЬНОГО
РАВНОВЕСИЯ**

Учебное пособие

Техн. редактор А.В.Миних

Издательство Южно-Уральского
государственного университета

ИД № 00200 от 28.09.99. Подписано в печать 27.03.2002. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,86. Тираж 150 экз. Заказ 63/70.

ООО "ТРАМП". 454092, г. Челябинск, ул. Воровского, 41.
