

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

**В.А.Икрин**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ  
С ЭЛЕМЕНТАМИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
И ПЛАСТИЧНОСТИ**

Рекомендован  
Учебно-методическим объединением вузов РФ  
по образованию в области строительства  
в качестве учебника для студентов,  
обучающихся по направлению 653500 “Строительство”

Москва  
Издательство АСВ  
2004

ББК 30.121  
УДК 539.3

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. Иванов И.А.; каф. сопротивления материалов Челябинского государственного аграрного университета (зав. кафедрой докт. техн. наук, проф. Жилкин В.А.); канд. техн. наук, доц. Симонов В.И.; каф. прикладной механики Челябинского военного автомобильного института (зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. Осипов Г.Л.).

В.А.Икрин. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: Учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 “Строительство”. – М: Изд. АСВ, 2004. – 424 с.

Приведены экспериментально-теоретические основы курса, методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Теоретический материал проиллюстрирован примерами.

Ориентирован на студентов специальности “Промышленное и гражданское строительство”. Может быть использован на других архитектурно-строительных специальностях.

Ил. 375, спр. табл. 14.

ISBN 5-696-01677-4

© Автор

---

---

## Оглавление

Предисловие .....	14
Основные буквенные обозначения .....	15
1. Введение	
1.1. Задача науки о сопротивлении материалов .....	18
1.2. Классификация тел по геометрическому признаку. Объект изучения в сопротивлении материалов .....	19
1.3. Методы науки .....	20
1.4. Место сопротивления материалов среди других наук .....	21
1.5. Реальный объект и расчетная схема .....	22
1.6. Основные физические гипотезы, используемые в сопротивлении материалов .....	23
1.7. Идеализация внешних сил при выборе расчетной схемы ...	25
1.8. Идеализация связей при выборе расчетной схемы .....	26
2. Геометрические характеристики плоских фигур	
2.1. Основные геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов .....	27
2.2. Статические моменты. Центр тяжести фигуры .....	29
2.3. Моменты инерции простейших геометрических фигур .....	30
2.3.1. Прямоугольник .....	30
2.3.2. Треугольники .....	30
2.3.3. Круг .....	31
2.3.4. Кольцо .....	32
2.4. Изменения моментов инерции при переносе координатной системы .....	32
2.4.1. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей .....	33
2.4.2. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатной системы .....	34

2.5. Главные оси. Главные центральные оси.....	34	5. Растяжение и сжатие.....	75
2.6. Главные моменты инерции.....	36	5.1. Испытания материалов на растяжение.	
2.7. Пояснения к таблицам геометрических характеристик прокатных профилей.....	37	Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали.....	75
2.8. Примеры определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции.....	38	5.2. Сравнение диаграмм растяжения различных материалов..	78
2.8.1. Симметричные фигуры.....	38	5.3. Испытания на сжатие.....	79
2.8.2. Составная фигура общего очертания.....	41	5.4. Закон Гука при одноосном напряженном состоянии.....	82
3. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы		5.5. Испытания на растяжение и сжатие при сложных программах нагружения.....	84
3.1. Внешние и внутренние силы.....	43	5.6. Понятие о нормативном и расчетном сопротивлении материала. Условия прочности.....	86
3.2. Понятия напряжений и напряженного состояния.....	44	5.7. Влияние температуры и длительности действия нагрузки на механические характеристики и свойства материалов... 88	
3.3. Обобщенные силы в сечении. Внутренние силовые факторы		5.8. План решения основной задачи сопротивления материалов <sup>92</sup>	
3.3.1. Понятия и термины.....	45	5.9. Напряжения в поперечном сечении стержня при растяжении и сжатии. Теоретическое решение задачи 94	
3.3.2. Геометрические представители стержня в расчетной схеме.....	46	5.10. Критический анализ формулы нормальных напряжений. Принцип Сен-Венана.	
3.3.3. Метод сечений.....	47	Понятие о концентрации напряжений.....	96
3.4. Эпюры внутренних силовых факторов.....	50	5.11. Напряженное состояние стержня. Расчет на прочность при растяжении и сжатии.....	97
3.4.1. Продольные силы.....	51	5.12. Равнонапряженный сжатый стержень.....	101
3.4.2. Крутящие моменты.....	52	5.13. Деформации при растяжении и сжатии.....	102
3.4.3. Внутренние силовые факторы в балках.....	53	5.14. Перемещения при растяжении и сжатии. Расчет на жесткость.....	105
3.4.3.1. Дифференциальные зависимости при изгибе.....	54	5.15. Работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии.....	107
3.4.3.2. Примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	55	5.16. Понятие о коэффициенте запаса.....	109
3.4.3.3. Некоторые закономерности очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	60	6. Кручение.....	111
3.4.4. Внутренние силовые факторы в плоских системах.....	61	6.1. Испытания на сдвиг. Расчетное сопротивление материала на срез. Условие прочности.....	111
3.4.5. Внутренние силовые факторы в общем случае.....	64	6.2. Напряжения в круглом или кольцевом поперечном сечении стержня. 113	
4. Плоское напряженное состояние.....	67	6.3. Напряженное состояние при кручении. Расчет на прочность.....	116
4.1. Постановка задачи.....	67	6.4. Деформации и перемещения при кручении. Расчет на жесткость.....	118
4.2. Теорема о парности касательных напряжений.....	69		
4.3. Напряжения в наклонных площадках.....	69		
4.4. Нормальные напряжения, действующие во взаимно перпендикулярных площадках.....	70		
4.5. Главные площадки и главные напряжения.....	71		
4.6. Наибольшее касательное напряжение.....	73		
4.7. Виды напряженного состояния.....	74		

6.5. Потенциальная энергия деформации при кручении .....	120	8.2. Дифференциальное уравнение задачи.	
6.6. Кольцо оптимальная форма сечения при кручении .....	120	Математическая модель расчетной схемы .....	170
6.7. Понятие о свободном и стесненном кручении.		8.3. Бесконечная балка .....	172
Мембранная аналогия .....	122	8.3.1. Действие сосредоточенной силы .....	172
6.8. Свободное кручение стержней массивного сечения.		8.3.2. Балка под равномерно распределенной нагрузкой .....	176
Прямоугольное сечение .....	123	8.3.3. Действие сосредоточенного момента .....	177
6.9. Свободное кручение тонкостенных стержней		8.4. Формулы для полубесконечной балки,	
открытого профиля.....	125	нагруженной на краю .....	181
6.10. Напряжения в поперечном сечении тонкостенного стержня		8.4.1. Балка нагружена силой на краю .....	181
закрытого профиля при свободном кручении.....	126	8.4.2. Балка нагружена моментом на краю .....	181
6.11. Деформации тонкостенных стержней закрытого профиля		8.5. Балки конечной длины .....	182
при свободном кручении.....	128	8.5.1. Длинные балки .....	182
7. Прямой изгиб .....	131	8.5.2. Короткие балки.....	183
7.1. Напряжения в поперечном сечении балки		9. Оценка прочности материалов	
при чистом изгибе .....	131	при сложных напряженных состояниях .....	188
7.2. Нормальные напряжения в сечении балки		9.1. Об испытаниях материала	
при поперечном изгибе .....	137	при сложном напряженном состоянии .....	188
7.3. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения		9.2. Некоторые физико-механические соотношения	
(вывод формулы Журавского).....	138	в линейно упругом изотропном теле .....	190
7.4. Касательные напряжения в сечении двутавровой балки.		9.2.1. Обобщенный закон Гука .....	190
Обобщение формулы Журавского		9.2.2. Относительная объемная деформация .....	191
на другие типы сечений .....	141	9.2.3. Связь между упругими константами материала .....	192
7.5. Оценка нормальных напряжений		9.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации .....	193
в горизонтальных сечениях балок.....	144	9.2.5. Удельная потенциальная энергия изменения формы.....	194
7.6. Напряженное состояние балок при поперечном изгибе ...	145	9.3. Теории предельных напряженных состояний	
7.7. Понятие о траекториях главных напряжений.....	150	9.3.1. Постановка и план решения задачи .....	194
7.8. Расчет на прочность при поперечном изгибе .....	152	9.3.2. Теории прочности хрупких материалов	
7.9. Рациональные типы сечений балок .....	158	9.3.2.1. Первая теория прочности	
7.10. Понятие о балках равного сопротивления .....	159	(теория наибольших нормальных напряжений) .....	196
7.11. Потенциальная энергия деформации		9.3.2.2. Вторая теория прочности	
при поперечном изгибе .....	160	(теория наибольших относительных удлинений).....	197
7.12. Перемещения при прямом изгибе.		9.3.3. Гипотезы пластичности .....	198
Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.		9.3.3.1. Третья теория	
Расчет на жесткость .....	162	(теория наибольших касательных напряжений) .....	199
8. Расчет балок на упругом основании .....	168	9.3.3.2. Четвертая теория	
8.1. Исходные предпосылки.		(теория удельной потенциальной энергии	
Механическая модель основания .....	168	изменения формы).....	200
		9.3.4. Теория прочности О.Мора .....	201

10. Сложное сопротивление.....	204	11.6.2. Изменение секториальной координаты при переносе полюса .....	235
10.1. Косой изгиб .....	205	11.6.3. Определение положения центра изгиба и главной нулевой точки.....	236
10.1.1. Напряжения в поперечном сечении .....	205	11.7. Пример расчета .....	236
10.1.2. Нейтральная линия при косом изгибе. Наибольшие нормальные напряжения. Расчет на прочность.....	207	11.7.1. Геометрические характеристики сечения.....	236
10.1.3. Перемещения при косом изгибе .....	210	11.7.2. Дифференциальное уравнение углов поворота сечений. Решение уравнения .....	239
10.2. Внецентренное сжатие. Растяжение или сжатие с изгибом		11.7.3. Обобщенные усилия в стержне. Напряжения в опасном сечении .....	240
10.2.1. Внецентренное сжатие .....	211	12. Устойчивость	
10.2.1.1. Напряжения в поперечном сечении.....	211	12.1. Понятие устойчивости .....	243
10.2.1.2. Нейтральная линия при внецентренном сжатии. Положение опасной точки. Расчет на прочность ...	212	12.2. Устойчивость прямолинейной формы равновесия центрально сжатого упругого стержня (вывод формулы Эйлера).....	244
10.2.1.3. Ядро сечения .....	214	12.3. Зависимость критического значения силы от условий закрепления стержня .....	247
10.2.2. Растяжение или сжатие с изгибом .....	216	12.4. Пределы применимости формулы Эйлера.....	249
10.3. Общий случай нагружения .....	217	12.5. Экспериментальные данные о потере устойчивости за пределом упругости. Эмпирическая формула .....	250
10.3.1. Общий случай нагружения стержня круглого сечения.....	218	12.6. Критическое значение сжимающей силы при потере устойчивости за пределом упругости. Теория приведенного модуля .....	253
10.3.2. Общий случай нагружения стержня прямоугольного сечения.....	219	12.7. Диаграмма критических напряжений. Расчет сжатых стержней по коэффициенту уменьшения расчетного сопротивления .....	256
10.3.3. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии .....	220	12.8. Устойчивость плоской формы изгиба .....	260
10.4. Условия применимости принципа суперпозиции .....	224	12.9. Заключение к разделу .....	262
11. Основы технической теории тонкостенных стержней открытого профиля.....	226	13. Понятие о расчете по деформированной схеме .....	263
11.1. Исходные предпосылки. Расчетные уравнения.....	226	13.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси при продольно-поперечном изгибе .....	264
11.1.1. Геометрические соотношения .....	227	13.2. Приближенный метод расчета сжато-изогнутых стержней .....	265
11.1.2. Физические и статические уравнения .....	229	13.3. О применении принципа суперпозиции при расчете сжато-изогнутых стержней .....	269
11.2. Нормальные напряжения в сечении .....	229	14. Динамическое действие нагрузки	
11.3. Бимомент .....	231	14.1. Понятие о динамическом нагружении .....	272
11.4. Касательные напряжения в сечении .....	231		
11.4.1. Кососимметричные касательные напряжения .....	232		
11.4.2. Симметричные касательные напряжения .....	232		
11.5. Деформации стержня. Обобщенные усилия в сечении	233		
11.5.1. Дифференциальное уравнение угла закручивания и его решение .....	233		
11.5.2. Граничные условия .....	234		
11.6. Секториальные геометрические характеристики			
11.6.1. Секториальная координата.....	235		

14.2. Учет сил инерции при заданном движении. Простейшие расчеты на динамическое воздействие .....	273	15.1. Основные геометрические понятия .....	309
14.3. Механическая модель упругой конструкции в задачах динамики. Коэффициент жесткости системы .....	274	15.2. Исходные предположки. Виды напряженных состояний оболочек.....	310
14.4. Колебания упругих систем .....	278	15.3. Усилия в оболочке по безмоментной теории .....	311
14.4.1. Свободные колебания .....	279	15.4. Заключение к разделу .....	315
14.4.1.1. Свободные колебания без сопротивления движению .....	279	16. Основы теории упругости.....	317
14.4.1.2. Свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости.....	281	16.1. Задача теории упругости. Плоская задача и ее разновидности .....	318
14.4.2. Вынужденные колебания .....	284	16.2. Уравнения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах .....	320
14.4.2.1. Колебания при действии гармонической силы .....	285	16.2.1. Статические уравнения .....	320
14.4.2.2. Резонанс при гармоническом воздействии .....	287	16.2.1.1. Уравнения равновесия.....	320
14.4.2.3. Колебания в условиях резонанса .....	290	16.2.1.2. Граничные условия для напряжений.....	320
14.4.2.4. Некоторые частные случаи действия возмущающей силы .....	291	16.2.2. Геометрические соотношения .....	321
14.5. Ударное воздействие .....	293	16.2.2.1. Зависимость деформаций от перемещений.....	321
14.5.1. Напряжения и деформации в невесомой конструкции при ударе. Динамический коэффициент .....	293	16.2.2.2. Геометрические граничные условия .....	322
14.5.2. Учет массы деформируемой системы при расчете на удар .....	295	16.2.3. Физические зависимости.....	322
14.5.3. Понятие о коэффициенте приведения массы .....	298	16.2.3.1. Плоское напряженное состояние .....	322
14.6. Прочность материалов при циклически изменяющихся напряжениях .....	301	16.2.3.2. Плоская деформация.....	322
14.6.1. Понятие об усталостном разрушении .....	301	16.3. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях .....	323
14.6.2. Основные виды и характеристики циклов напряжений.....	302	16.4. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях .....	324
14.6.3. Понятие о пределе выносливости .....	303	16.4.1. Преобразования системы уравнений.....	324
14.6.4. Диаграмма усталостной прочности. Запас выносливости образца .....	304	16.4.2. Функция напряжений. Рамная аналогия.....	326
14.6.5. Основные факторы, влияющие на предел выносливости.....	305	17. Понятие о численных методах решения уравнений теории упругости .....	331
14.6.6. Расчет на прочность при циклических напряжениях....	307	17.1. Методы аппроксимирующих функций.....	332
15. Основы безмоментной теории тонких осесимметрично нагруженных оболочек вращения.....	309	17.1.1. Метод коллокаций .....	333
		17.1.2. Метод наилучшего квадратичного приближения .....	335
		17.1.3. Метод ортогонализации .....	337
		17.2. Метод конечных разностей .....	338
		17.2.1. Конечно-разностные представления производных функции одной переменной .....	339
		17.2.2. Конечно-разностные представления производных функции двух переменных .....	340

17.2.3. Пример решения плоской задачи теории упругости методом конечных разностей .....	342
17.3. Заключение к разделу .....	351
18. Основы технической теории изгибаемых пластин .....	352
18.1. Исходные предпосылки теории тонких жестких пластин .....	353
18.2. Разрешающие уравнения в декартовых координатах .....	353
18.2.1. Статические уравнения .....	353
18.2.2. Геометрические соотношения .....	355
18.2.3. Физические зависимости .....	355
18.3. Преобразования системы уравнений. Расчетные формулы .....	356
18.4. Граничные условия .....	357
18.4.1. Защемленный край .....	358
18.4.2. Шарнирно опертый край .....	358
18.4.3. Свободный край .....	358
18.5. Расчет прямоугольных шарнирно опертых пластин в двойных тригонометрических рядах .....	363
19. Простейшие энергетические принципы и вариационные методы теории упругости .....	366
19.1. Понятия вариации функции, функционала и вариации функционала .....	366
19.2. Принцип минимума потенциальной энергии системы (принцип Лагранжа) .....	368
19.3. Некоторые формулы потенциальной энергии деформации, выраженной через перемещения .....	370
19.3.1. Пластика, нагруженная в своей плоскости .....	371
19.3.2. Пластика, изгибаемая поперечной нагрузкой .....	372
19.3.3. Стержневой элемент конструкции .....	372
19.4. Принцип минимума дополнительной энергии (принцип Кастильяно) .....	374
19.5. Формулировка вариационной задачи. Метод Ритца .....	379
20. Основы теории предельного равновесия .....	381
20.1. Особенности работы упругопластических конструкций	
20.1.1. Зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии. Диаграмма Прандтля .....	382
20.1.2. Монотонное нагружение конструкции .....	383

20.1.3. Остаточные напряжения и деформации после разгрузки .....	387
20.1.4. Характеристики напряженно-деформированного состояния. Соотношения между ними. Свойства характеристик .....	388
20.2. Статический метод расчета упругопластических конструкций .....	391
20.2.1. Статическая теорема теории предельного равновесия .....	391
20.2.2. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси балки .....	393
20.2.3. Несущая способность сечений балок .....	394
20.2.4. Расчетные соотношения статического метода теории предельного равновесия балок и плоских рам .....	396
20.2.5. Примеры расчета балок статическим методом .....	397
20.2.6. Жордановы преобразования систем линейных равенств .....	398
20.2.7. Алгоритм расчета предельного параметра нагрузки статическим методом .....	399
20.3. Кинематический метод расчета упругопластических конструкций .....	402
20.3.1. Кинематически возможные пластические деформации. Механизмы разрушения .....	402
20.3.2. Кинематическая теорема теории предельного равновесия. Алгоритм расчета разрушающей нагрузки кинематическим методом .....	404
20.3.3. Примеры расчетов балок кинематическим методом при известных механизмах разрушения .....	408
20.3.4. Пример расчета плоской рамы перебором возможных механизмов разрушения .....	409
20.3.5. Система условий задачи кинематического метода расчета балок и плоских рам .....	411
20.3.6. Пример расчета балки по формализованному алгоритму .....	412
20.3.7. Пример расчета железобетонной плиты .....	414
20.4. Заключение к разделу .....	416
Заключение к курсу .....	417
Приложения .....	418

---

---

## Предисловие

Учебник “Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности” написан на основе многолетнего опыта преподавания отмеченных дисциплин на архитектурно-строительном факультете Южно-Уральского государственного университета. В нем объединены и методически обработаны учебные пособия, опубликованные автором в течение последних 30 лет, использованы также основные учебники, изданные в СССР и РФ.

Тематическое содержание учебника определено, главным образом, Государственными образовательными стандартами, введенными в действие в 1994 и 2000 гг. Кроме того, в учебник включены некоторые относящиеся к указанным дисциплинам разделы, потенциально необходимые студентам при курсовом и дипломном проектировании, а также инженерам-строителям в практической работе.

При изложении материала автор стремился придерживаться единой методической схемы:

- обоснование и постановка задачи;
- обсуждение и введение исходных предпосылок;
- формирование расчетных соотношений;
- преобразования соотношений к конечному виду;
- критический анализ полученных результатов.

Расчетные формулы, как правило, зафиксированы в виде, приводимом в соответствующих выпусках СНиП.

Автор с благодарностью примет все пожелания и замечания читателей.

---

---

## Основные буквенные обозначения

- A* – площадь; амплитуда;  
*B* – бимомент;  
*C* – константа; критерий предельного состояния;  
*D* – диаметр; цилиндрическая жесткость;  
*E* – модуль упругости;  
*F* – сила;  
*G* – модуль сдвига;  
*H* – сила;  
*J* – момент инерции;  
*K* – кинетическая энергия;  
*M* – момент;  
*N* – продольная сила; число циклов до разрушения;  
*P* – потенциальная энергия;  
*Q* – поперечная сила;  
*R* – сопротивление материала;  
*S* – статический момент;  
*T* – температура; сила; период;  
*U* – потенциальная энергия деформации;  
*V* – объем;  
*W* – момент сопротивления; работа;  
*X, Y, Z* – опорные реакции; проекции сил на оси;  
*a* – ускорение; отрезки, отсекаемые на осях;  
*b* – ширина; символ изгиба;  
*c* – коэффициент жесткости; центр тяжести; символ сжатия;  
*d* – диаметр; толщина стенки прокатного профиля; декремент затухания колебаний; дифференциал;



$e$  – эксцентриситет; символ упругости;  
 $f$  – перемещение; функция;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $h$  – высота; толщина;  
 $i$  – радиус инерции; номерной индекс;  
 $k$  – коэффициент; номерной индекс;  
 $l$  – длина; символ линейного, левого;  
 $m$  – интенсивность момента; масса; целочисленный индекс;  
 $n$  – коэффициент запаса; нормаль; целочисленный индекс;  
 $p$  – давление; полное напряжение; символ полярного;  
 символ пластичности;  
 $q$  – интенсивность нагрузки, распределенной по линии; коэффициент концентрации;  
 $r$  – радиус; коэффициент сопротивления; коэффициент асимметрии цикла; символ правого; символ остаточного;  
 $s$  – окружная координата в цилиндрической системе; символ сдвига;  
 $t$  – время; толщина; символ кручения; символ растяжения;  
 $u$  – координата (аналог  $x$ ); перемещение вдоль оси  $x$ ; удельная потенциальная энергия деформации; символ предельного;  
 $v$  – координата (аналог  $y$ ); перемещение вдоль оси  $y$ ;  
 $w$  – удельная работа; перемещение вдоль оси  $z$ ;  
 $x, y, z$  – декартовы координаты;  
 главная координатная система стержня;  
 $\Delta$  – функция-ошибка; символ приращения;  
 $\Phi$  – функционал;  
 $\Pi$  – изменение потенциала внешней нагрузки; плоскость;  
 $\Sigma$  – знак суммы;  
 $\Omega$  – площадь;  
 $\alpha$  – угол; коэффициент затухания колебаний; масштабный коэффициент; параметр разностной сетки;  
 $\beta$  – ширина (аналог лат.  $b$ ); угол; коэффициент; параметр системы балка – упругое основание; коэффициент поверхностной чувствительности;  
 $\gamma$  – относительный сдвиг; коэффициент;

$\delta$  – отношение внутреннего диаметра кольца к наружному; относительное остаточное удлинение при разрыве; перемещение; толщина; вариация;  
 $\varepsilon$  – относительное удлинение;  
 $\kappa$  – кривизна;  
 $\lambda$  – гибкость стержня; индекс текучести;  
 $\xi$  – координата; перемещение;  
 $\eta$  – координата; гиперболо-тригонометрическая функция;  
 $\zeta$  – координата; перемещение;  
 $\theta$  – относительный угол закручивания; угол поворота сечения балки; частота; угол поворота в пластическом шарнире;  
 $\mu$  – коэффициент формы сечения; коэффициент приведения длины стержня;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $\rho$  – плотность; координата;  
 $\sigma$  – нормальное напряжение;  
 $\tau$  – касательное напряжение;  
 $\varphi$  – угол поворота; угол закручивания; коэффициент снижения расчетного сопротивления; начальная фаза; функция текучести;  
 $\psi$  – относительное остаточное сужение при разрыве; начальная фаза; функция;  
 $\omega$  – секториальная координата; угловая частота; скорость;  
 $\nabla$  – оператор Лапласа.

## 1. Введение

### 1.1. Задача науки о сопротивлении материалов

В ходе проектирования инженеру приходится решать много вопросов, связанных с будущей работой объекта: выбирать материал, назначать размеры элементов, виды и способы соединений конструкций между собой и т.п. Главная цель – обеспечить **прочность**<sup>1</sup> сооружения. Оно должно выдерживать действующие на него нагрузки как в ходе строительства, так и в период эксплуатации. Кроме того, нельзя допустить чрезмерного **деформирования**<sup>2</sup> конструкций – они должны быть достаточно **жесткими**<sup>3</sup>. Наконец, необходимо обеспечить **устойчивость**<sup>4</sup> сооружения и отдельных его частей.

Простейший путь выполнения этих требований – увеличение поперечных размеров конструкций. Однако это ведет к перерасходу материалов. Надежность и экономия противоречат друг другу. *Противоречие надежности и экономии является главным фактором, обуславливающим развитие науки о сопротивлении материалов.* Для проектирования надежных и экономичных сооружений нужно знать механические свойства материалов и уметь прогнозировать поведение конструкций в возможных неблагоприятных ситуациях.

<sup>1</sup> **Прочность** – способность выдерживать нагрузки. Здесь и далее при первом знакомстве с термином дано лишь качественное его толкование. Количественные меры той или иной способности будут введены в месте ее детального изучения.

<sup>2</sup> **Деформация** – изменение формы и (или) размеров.

<sup>3</sup> **Жесткость** – способность сохранять форму и размеры под нагрузкой.

<sup>4</sup> **Устойчивость** – способность сохранять состояние при малых возмущениях внешнего воздействия.

Ориентируясь на названные потребности, наука о сопротивлении материалов изучает процессы деформирования и разрушения твердых тел и разрабатывает методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

### 1.2. Классификация тел по геометрическому признаку.

#### Объект изучения в сопротивлении материалов

Экспериментально и теоретически установлено, что возможность применения того или иного расчетного метода зависит от соотношения размеров тела. Отсюда вытекает необходимость в классификации тел по геометрическому признаку.

В зависимости от соотношения основных габаритных размеров (длина  $l$ , ширина  $b$  и высота  $h$ ) тело относят к одной из категорий (рис 1.1):

**Стержень** (рис. 1.1 а) – тело, два размера которого ( $b$  и  $h$ ) одного порядка<sup>1</sup> и значительно<sup>2</sup> меньше третьего ( $l$ ); представителями стержня являются его ось и поперечное сечение.

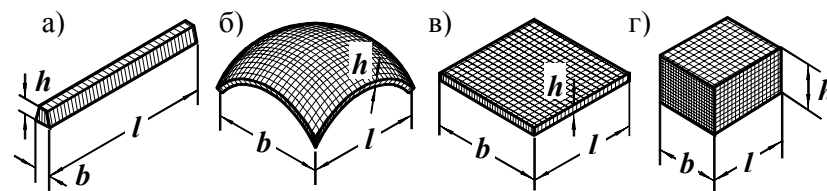


Рис. 1.1

**Оболочка** (рис. 1.1 б) – тело, два размера которого одного порядка и значительно больше третьего; в расчетной схеме оболочку представляют срединной поверхностью (поверхностью, расположенной посередине толщины) и толщиной.

**Пластинка** – оболочка, срединная поверхность которой является плоскостью (рис. 1.1 в).

**Массив** (рис. 1.1 г) – тело, все три размера которого одного порядка.

<sup>1</sup> Мерой порядка в сопротивлении материалов обычно служит число 10: два размера (в данном случае  $b$  и  $h$ ) имеют один порядок, если их отношение лежит в пределах  $0,1 \leq b/h \leq 10$ .

<sup>2</sup> Мерой значительного преобладания одного размера над другим также служит число 10; у стержня  $b$  и  $h \leq 0,1l$ .

Приведенная классификация является в известной мере условной. Тем не менее она позволяет установить, какой метод для данного тела способен дать достоверные результаты расчета.

*Объектом изучения в сопротивлении материалов является стержень.*

Существенно, что в основу данной классификации положено соотношение, а не величины размеров. Поэтому в сопротивлении материалов к стержням могут быть отнесены и такие строительные конструкции, как многометровые колонны зданий, балки перекрытий, пояса, стойки и раскосы ферм, и (для сравнения) бытовая швейная игла.

### 1.3. Методы науки

Методы науки определяются задачами, решаемыми ею. Изучение процессов деформирования и разрушения тел невозможно без лабораторных испытаний. Поэтому в сопротивлении материалов экспериментальные методы занимают ведущее положение. Анализ внутренних процессов заставляет привлекать физические представления о строении тел и взаимодействии его частиц.

С другой стороны, рассматривая стержневые элементы в состоянии равновесия или в режиме движения, приходится использовать законы механики. Необходимость вычислительного прогнозирования естественно вовлекает в методы сопротивления материалов математический аппарат.

Как отмечено выше, сопротивление материалов разрабатывает практические методы расчетов элементов конструкций, основанные на упрощенных представлениях о внутренних процессах. Упрощения процессов порождают погрешность предсказываемого результата. В сопротивлении материалов для оценки погрешностей вновь привлекают эксперимент. Выполняя в подобных случаях контрольные функции, эксперимент является критерием корректности предлагаемых методов расчетов.

Методы сопротивления материалов характеризуются

- экспериментально-теоретическим подходом к задачам;
- применением законов физики, механики и математического аппарата;
- широким использованием упрощающих предпосылок.

### 1.4. Место сопротивления материалов среди других наук

Характеризуя место сопротивления материалов, следует рассмотреть его связь с тремя группами наук:

- фундаментальными для сопротивления материалов;
- родственными по решаемым задачам;
- профилирующими для инженера-строителя.

Первая группа. Фундаментальными для сопротивления материалов являются названные выше математика, физика и механика. Они вооружают используемые методы возможностями решения поставленных задач.

Вторая группа. Задачи, рассматриваемые в сопротивлении материалов, в той или иной мере решаются и в других науках. По исследованиям процессов деформирования и разрушения сопротивление материалов соприкасается с циклом дисциплин, входящих в группу материаловедения (для строительных материалов это теории металлов, бетона, пластмасс, древесины и т.п.). В них устанавливаются специфические особенности деформирования названных материалов и применяются, в основном, экспериментальные методы.

Другой цикл наук той же группы объединяет механика твердого деформируемого тела (теории упругости, пластичности и ползучести). Она рассматривает те же процессы, но, главным образом, с теоретических позиций и в рамках более строгих предпосылок.

Задачи о прочности, жесткости и устойчивости также рассматриваются в других дисциплинах: в строительной механике, теориях упругости, пластичности и ползучести.

Третья группа наук – профилирующая. Сюда входят металлические, каменные, бетонные, железобетонные конструкции, конструкции из древесины и пластмасс. Для них сопротивление материалов является базовой дисциплиной. Установленные в нем принципиальные закономерности деформирования материалов, методы оценки прочности, способы определения внутренних сил дополняются в профилирующих дисциплинах спецификой поведения конкретных материалов и положениями нормативных документов.

Следует отметить, что границы и между указанными дисциплинами весьма нечетки, а связи многообразны. Поэтому описанное соотношение наук отражено в известной мере условно.

## 1.5. Реальный объект и расчетная схема

Полный учет всех свойств реального объекта при его расчете принципиально невозможен в силу бесконечной их сложности. Поэтому первым шагом при анализе работы конструкции является упрощение задачи. *Реальный объект заменяют расчетной схемой.*

Чтобы выбрать расчетную схему, нужно из множества внешних воздействий, геометрических особенностей объекта и физических свойств материала выделить наиболее существенные в данной задаче и отбросить слабо влияющие на результат анализа. Степень упрощений зависит от требуемой точности, математических возможностей, а также от того, какая сторона явления рассматривается в задаче.

При выборе расчетной схемы приходится идеализировать геометрические параметры объекта, физические свойства материала, внешнее воздействие, опоры и связи.

Трудно назвать все приемы, которые используют при выборе расчетной схемы. В конкретных условиях появляются конкретные возможности, определяющие необходимую и допустимую степень идеализации объекта. Нередко оказывается, что предпосылки, пригодные для расчета одних конструкций, неприменимы для других.

Отметим, что для одного и того же объекта возможен выбор различных расчетных схем в зависимости от поставленной задачи. Например, при определении усилий в ферме стержни считают соединенными шарнирно. Основанное на этом решение вполне достоверно для усилий на средних участках стержней. Если же интерес представляют усилия в местах соединения стержней, необходимо точнее отразить силовое взаимодействие сочлененных элементов.

С другой стороны, одной и той же расчетной схеме может быть поставлено в соответствие несколько разных объектов. Скажем, растянутый стержень может моделировать и канаты подъемных машин, и стойки, раскосы, пояса ферм, и т.п.

Переход от реального объекта к расчетной схеме является важным шагом, так как от введенных предпосылок зависит результат расчета. Выбор схемы осложняется еще и тем, что во многих случаях трудно заранее оценить степень влияния той или иной особенности конструкции. Приходится полагаться на интуицию, а иногда рассчитывать конструкцию, применяя разные расчетные схемы.

Нужно усвоить, что расчет состоит не только в выборе расчетных формул и вычислениях по ним. Нельзя забывать о первом шаге – идеализации реальных свойств, который неизбежно в определенной степени отразится на конечном результате. С какой бы точностью ни производились вычисления, результат оказывается приближенным. Поэтому получаемые решения всегда необходимо оценивать критически на фоне использованных предпосылок.

## 1.6. Основные физические гипотезы, используемые в сопротивлении материалов

Важным шагом при выборе расчетной схемы является отражение механических свойств материала. Отказ от понятия жесткого тела потребовал введения гипотез, описывающих эти свойства. Нет такой физической модели, которая бы достаточно хорошо отражала поведение всех материалов. Для одних пригодны одни предпосылки, для других – другие. Тем не менее есть некоторые общие гипотезы, используемые в большинстве задач сопротивления материалов.

**Гипотеза непрерывности.** Согласно ей считают, что *материал занимает объем тела сплошь – без разрывов и пустот.*

Такое предположение, строго говоря, противоречит физическому учению об атомно-молекулярном строении тел. Однако гипотеза непрерывности позволила использовать теорию непрерывных функций – сравнительно простой и эффективный математический аппарат – и в то же время получать вполне удовлетворительные решения, сглаживая силовые взаимодействия между микрообъектами.

**Гипотеза о ненапряженном начальном состоянии.** В соответствии с этой гипотезой *в ненагруженном теле внутренних сил нет.*

В действительности в любом теле всегда действуют межатомные внутренние силы. Они обеспечивают существование тела как геометрической единицы. Игнорирование внутренних сил, действующих в ненагруженном теле, приводит к тому, что в расчетах определяются не сами внутренние силы, а добавки к ним, вызванные внешним воздействием. Использование этой гипотезы оправдывается тем, что механические характеристики материалов также определяются без учета начальных сил.

**Гипотеза однородности.** *Однородным* называется такое тело, свойства которого во всех точках одинаковы.

В природе нет однородных тел, хотя бы в силу атомно-молекулярного их строения. Однако с некоторым приближением свойства материала осредненно можно считать одинаковыми во всем объеме. Гипотеза однородности освобождает от необходимости учета изменчивости механических свойств по объему, чем упрощает расчеты.

Обсуждаемая гипотеза применима не ко всем материалам. В тех случаях, когда свойства тела в разных точках существенно различны, его считают *неоднородным* и вводят в расчеты соответствующие механические характеристики.

**Гипотеза изотропии.** *Изотропным* называется такой материал, свойства которого во всех направлениях одинаковы.

Предпосылка об изотропии является приближенной. Тем не менее для большинства материалов в силу хаотичной структурной ориентации можно считать свойства не зависящими от направления. К изотропным материалам можно отнести металлы, естественные и искусственные камни, некоторые виды пластмасс и т.п.

Материал, свойства которого в разных направлениях различны, называют *анизотропным*. Примерами анизотропных материалов служат древесина, ориентировано армированные пластмассы и т.п.

**Гипотеза упругости.** *Тело, которое после устранения внешнего воздействия восстанавливает свои размеры и форму, называется упругим.*

Реальные тела и материалы, строго говоря, не являются упругими. После каждого воздействия в них остаются некоторые отклонения от начальных размеров. Величины этих отклонений зависят от величин нагрузок. При небольших усилиях остаточные деформации невелики, материал можно считать упругим. При больших – существенны, наделять материал свойством упругости нельзя.

В упругом теле внутренние силы и деформации зависят только от тех нагрузок, которые действуют в рассматриваемый момент; от предшествующих воздействий никаких последствий не остается.

В сопротивлении материалов используют много различных предпосылок, имеющих локальное значение. Поэтому изложение их здесь преждевременно и более оправдано в месте введения.

## 1.7. Идеализация внешних сил при выборе расчетной схемы

Внешняя нагрузка, фигурирующая в расчетной схеме, – это силы, с которыми исключенные из анализа конструкции действуют на рассматриваемую. Любые силы взаимодействия распределены в пределах контактных поверхностей. Установить распределения этих сил практически невозможно. По этой причине внешнюю нагрузку также идеализируют. В зависимости от размеров площади загрузки усилие относят к одной из следующих категорий.

*Сосредоточенные силы.* Ими представляют давления, передаваемые через площадку, размеры которой малы по сравнению с размерами исследуемой области. Количественные меры сосредоточенных сил –  $H$ ,  $кН$ ,  $МН$  и т.п.

*Нагрузки, распределенные по линии.* Так схематизируют давления, передаваемые по поверхности, длина которой, с одной стороны, значительно превышает ширину, с другой, соизмерима с большим размером тела. Величину такой нагрузки измеряют интенсивностью в  $H/м$ ,  $кН/м$ ,  $МН/м$  и т.п.

Если размеры поверхности, по которой передается нагрузка, соизмеримы с размерами тела, то идеализируют характер ее распределения. Интенсивность *распределенной по поверхности нагрузки* измеряют давлением в  $H/м^2$  ( $Па$ ),  $кН/м^2$  ( $кПа$ ),  $МН/м^2$  ( $МПа$ ) и т.п.

В том случае, когда нагрузку можно представить парой сил с малым плечом, ее изображают в виде *сосредоточенного момента*, имеющего размерность  $Нм$ ,  $кНм$ ,  $МНм$  и т.п.

Приведенная классификация сил дана по такому признаку как размеры контактной поверхности. Можно разделить силы и по другим показателям. Скажем, по

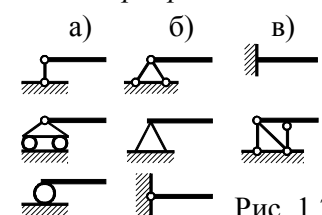
- характеру распределения (равномерные, неравномерные);
- месту действия (поверхностные и объемные);
- положению точки приложения (неподвижные и подвижные);
- изменению во времени (постоянные, переменные) и т.д.

Детальное обсуждение этих категорий приведено в курсах физики, механики, спецдисциплинах и здесь представляется излишним.

## 1.8. Идеализация связей при выборе расчетной схемы

Связи, фигурирующие в расчетной схеме, – это элементы соседних конструкций, накладывающие ограничения на перемещения соединяемых точек. Кинематическое и силовое действие связей сложно и многообразно. Поэтому их также идеализируют. В зависимости от преобладающей стороны кинематического влияния элемента, заменяемого связью, его абсолютизируют.

*Шарнирно-подвижная опора* (примеры ее изображения приве-



дены на рис. 1.2 а). Ее выбирают при слабом сопротивлении реальной связи повороту вокруг опорной точки и смещению в каком-либо направлении, но практически исключению перемещения в другом направлении, перпендикулярном первому.

*Шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.2. б). Так имитируют реальную опору при сильном сопротивлении линейному перемещению в любом направлении, но при слабом препятствии повороту.

*Защемление* (рис. 1.2 в). Эту связь вводят, когда заменяемый ею элемент практически исключает перемещения места соединения.

В приведенном кратком перечне рассмотрены примеры плоских связей. Нет необходимости подробного описания других их типов, введенных и используемых в курсе механики. Здесь они позаимствованы для приближенной имитации взаимодействия реальных тел.

Идеализация связей влечет за собой и идеализацию реакций, однозначно определяемых способом закрепления элемента.

Таким образом, в расчетной схеме должны быть представлены:

- геометрические параметры (размеры и очертание оси, данные о поперечном сечении);
- связи, наложенные на стержень;
- механическая модель материала (оговорены используемые физико-механические гипотезы);
- внешнее воздействие.

Отмеченные в настоящем разделе характерные особенности сопротивления материалов позволяют рассматривать его как *общинженерную экспериментально-теоретическую науку о прочности, жесткости и устойчивости стержневых элементов конструкций*.

## 2. Геометрические характеристики плоских фигур

### 2.1. Основные геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов

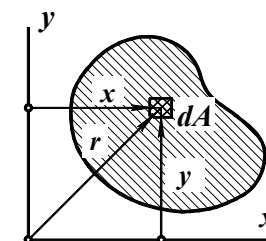
Прочность, жесткость и устойчивость стержня зависят не только от материала, но и от формы и размеров поперечного сечения. Эти зависимости проявляются через различные геометрические характеристики. Познакомимся с некоторыми из них.

Рассмотрим плоскую фигуру (поперечное сечение стержня), связанную с осями  $x$  и  $y$  (рис. 2.1). Обозначим площадь фигуры буквой  $A$ <sup>1</sup>. Выделим в произвольной точке элементарную площадку  $dA$ .

*Интеграл произведений элементарных площадок и их координат, отсчитываемых от данной оси, называется статическим<sup>2</sup> моментом* фигуры относительно оси:

$$\int_A y dA = S_x, \int_A x dA = S_y. \quad (2.1)$$

$S_x$  – статический момент фигуры относительно оси  $x$ ;  $S_y$  – относительно  $y$ . Индекс "A" под интегралом означает, что интегрирование ведется по всей площади фигуры.



Размерность статических моментов –  $см^3$ ,  $м^3$  и т. п. Рис. 2.1

Из подынтегральных произведений, входящих в равенства (2.1), видно, что статический момент может быть и положительным, и отрицательным, а следовательно, и равным нулю.

<sup>1</sup> От англ. *area* – площадь.

<sup>2</sup> От англ. *statical* – статический.

Интеграл произведений элементарных площадок и квадратов их расстояний от оси, называется **осевым моментом инерции**<sup>1</sup> фигуры относительно данной оси:

$$\int_A y^2 dA = J_x, \int_A x^2 dA = J_y. \quad (2.2)$$

$J_x$  – осевой момент инерции фигуры относительно оси  $x$ ;  $J_y$  – относительно  $y$ . По равенствам (2.2) нетрудно установить, что осевые моменты инерции всегда положительны.

Интеграл произведений элементарных площадок и их координат, называется **центробежным моментом инерции** фигуры относительно данных осей:

$$\int_A xy dA = J_{xy}. \quad (2.3)$$

В зависимости от положения фигуры на координатной плоскости центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Интеграл произведений элементарных площадок и квадратов расстояний их от фиксированной точки называется **полярным моментом инерции** фигуры относительно данного полюса:

$$\int_A r^2 dA = J_p. \quad (2.4)$$

Полярный момент инерции всегда положителен.

Размерность моментов инерции –  $см^4, м^4$  и т.п.

Если полюс совпадает с началом координат, то

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y. \quad (2.5)$$

полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Так как определенный интеграл – это сумма, **статический момент или момент инерции фигуры, составленной из  $n$  частей, равен сумме вычисленных в той же координатной системе одноименных геометрических характеристик  $i$ -х составляющих фигур.**

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^i, S_y = \sum_{i=1}^n S_y^i, J_x = \sum_{i=1}^n J_x^i, J_y = \sum_{i=1}^n J_y^i, J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{xy}^i, J_p = \sum_{i=1}^n J_p^i. \quad (2.6)$$

Приведенный перечень не охватывает все геометрические характеристики, используемые в сопротивлении материалов. Ниже будут введены новые понятия, опирающиеся на приведенные выше или аналогичные им.

<sup>1</sup> От англ. *inertia* – инерция. Подобные интегралы фигурируют в динамике, отсюда и перешло их название.

## 2.2. Статические моменты. Центр тяжести фигуры

Рассмотрим горизонтальную пластинку произвольного очертания (рис. 2.2). Вес элементарного параллелепипеда с основанием  $dA$  равен  $\rho gh dA$  ( $\rho$  – плотность материала,  $g$  – ускорение свободного падения). Сумму моментов этих сил относительно оси  $x$  запишем так:  $M = \int_A y \rho gh dA$ . С другой стороны, согласно теореме Вариньона момент системы сил равен моменту равнодействующей. Вес пластинки – это  $\rho gh A$ ; плечо относительно оси  $x$  равно  $y_c$ ; момент  $M = \rho gh A y_c$ . Приравниваем выражения момента:  $\int_A y \rho gh dA = \rho gh A y_c$ . Вынося  $\rho gh$  из под интеграла и сокращая на них, согласно обозначению (2.1) имеем

$$S_x = A y_c. \quad (2.7)$$

Аналогично,  $S_y = A x_c. \quad (2.8)$

Статический момент равен произведению площади фигуры на координату ее центра тяжести, определяющую расстояние между центром и осью.

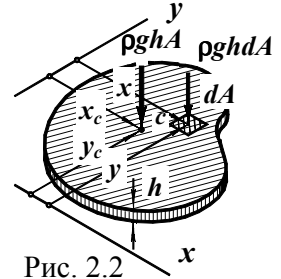


Рис. 2.2

Формулы (2.7) и (2.8) позволяют вычислить статические моменты, если известны площадь и положение центра тяжести фигуры. А поскольку из этих равенств следует

$$x_c = S_y / A, y_c = S_x / A, \quad (2.9)$$

то положение центра тяжести может быть установлено, если известны площадь и статические моменты фигуры.

На практике нередко приходится находить центр тяжести сложной фигуры, составленной из простых<sup>1</sup> частей. В таких случаях удобно пользоваться формулами (2.9) в ином виде. Учтывая, что  $A = \sum_{i=1}^n A_i, S_x = \sum_{i=1}^n S_x^i, S_y = \sum_{i=1}^n S_y^i$ , и записывая  $S_x^i = A_i y_i, S_y^i = A_i x_i$ ,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (2.10)$$

где  $x_c$  и  $y_c$  – координаты центра тяжести сложной фигуры;  $x_i, y_i$  и  $A_i$  – координаты центра тяжести и площадь  $i$ -й составляющей фигуры.

<sup>1</sup> Фигур с известными площадями и положениями центров тяжести.

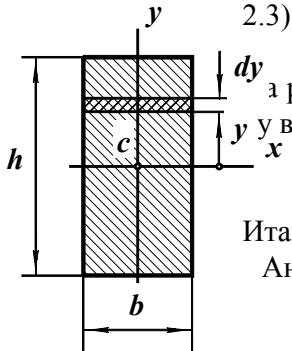
Важную роль в сопротивлении материалов играют так называемые **центральные оси** – оси, проходящие через центр тяжести фигуры. Из формул (2.7) и (2.8) следует, что **статический момент фигуры относительно центральной оси равен нулю**.

### 2.3. Моменты инерции простейших геометрических фигур

Ознакомимся с методами определения моментов инерции некоторых геометрических фигур и выведем соответствующие формулы.

#### 2.3.1. Прямоугольник

Найдем осевые моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  прямоугольника (рис. 2.3) относительно осей симметрии  $x$  и  $y$ .



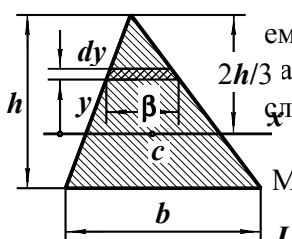
Вспользуемся первой формулой из (2.2) а расстоянии  $y$  выделим элементарную полоску  $dy$  у высотой  $dy$ . Площадь ее  $dA = bdy$ . Теперь

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = bh^3/12.$$

Итак,  $J_x = bh^3/12.$  (2.11)  
Аналогично,  $J_y = hb^3/12.$  (2.12)

#### 2.3.2. Треугольники

2.3.2.1. Найдем момент инерции треугольника относительно центральной оси  $x$ , параллельной основанию  $b$  (рис. 2.4).



Выделив элементарную полоску, имеем  $dA = \beta dy$ . Из подобия треугольников (заметного и расположенного выше полоски) следует  $\beta/b = (2h/3 - y)/h$ . Теперь  $dA = b(2h/3 - y)dy/h$ .

Момент инерции  $J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 b(2h/3 - y)dy/h$ . После интегрирования имеем  $J_x = bh^3/36.$  (2.13)

Результат (2.13) не зависит от положения вершины по ширине. У разных треугольников с равными  $b$  и равными  $h$  равны и моменты инерции относительно осей  $x$ , параллельных основаниям  $b$ .

2.3.2.2. Найдем момент инерции равнобедренного треугольника относительно оси симметрии  $y$  (рис. 2.5).

Выделим элементарную полоску, параллельную оси  $y$ , высотой  $\eta$ . Из подобия треугольников следуют равенства:

$$\eta/h = (b/2 - x)/(b/2), \quad \eta = 2h(b/2 - x)/b;$$

$$dA = \eta dx = 2h(b/2 - x)dx/b.$$

Момент инерции  $J_y = \int_A x^2 dA = 2 \int_0^{b/2} x^2 2h(b/2 - x)dx/b.$

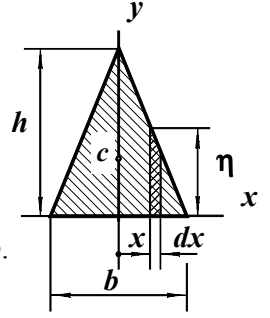


Рис. 2.5

В итоге  $J_y = hb^3/48.$  (2.14)

2.3.2.3. Выведем формулу центробежного момента инерции прямоугольного треугольника относительно центральных осей, параллельных катетам (рис. 2.6).

Как и прежде,  $\beta = b(2h/3 - y)/h$ , площадка  $dA = \beta dy = b(2h/3 - y)dy/h$ . Абсцисса  $x = b/3 - \beta/2 = b/3 - b(2h/3 - y)/(2h)$ . По выражению (2.3)  $J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{-h/3}^{2h/3} ((b/3 - b(2h/3 - y)/(2h))yb(2h/3 - y)dy/h.$

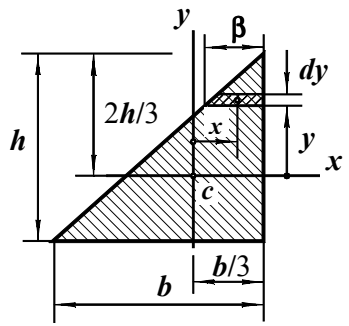


Рис. 2.6

Результат:  $J_{xy} = b^2 h^2 / 72.$  (2.15)

Если при данном положении треугольника изменить направление какой-либо оси, знак центробежного момента изменится. Изменится знак  $J_{xy}$  и в случае поворота треугольника на  $180^\circ$  вокруг любой из осей.

#### 2.3.3. Круг

Выведем формулы осевых  $J_x$  и  $J_y$  и полярного  $J_p$  моментов инерции круга (рис. 2.7).

У элементарной площадки  $dA = 2\beta dy$ ,  $\beta = 0,5D \cos \alpha$ . Но  $y = 0,5D \sin \alpha$ , дифференциал  $dy = 0,5D \cos \alpha d\alpha$ . Момент инерции  $J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^2 \sin^2 \alpha D^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \pi D^4 / 64$ . Ясно, что

$J_x = J_y$ . Итак,  $J_x = J_y = \pi D^4 / 64.$  (2.16)

По равенству (2.5)  $J_p = \pi D^4 / 32.$  (2.17)

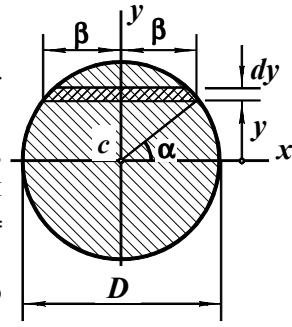


Рис. 2.7



### 2.3.4. Кольцо

Найдем осевые  $J_x$ ,  $J_y$  и полярный  $J_p$  моменты инерции кольца (рис. 2.8).

Кольцо можно рассматривать как разность кругов. Поэтому согласно свойствам (2.6)  $J_x = J_x^1 - J_x^2$  (верхний индекс "1" относится к большому кругу, "2" – к малому). В соответствии с формулой (2.16)

$$J_x = \pi D^4/64 - \pi d^4/64.$$

Обозначив  $d/D = \delta$  и учитывая, что у кольца  $J_x = J_y$ , запишем формулы в виде

$$J_x = J_y = \pi D^4(1 - \delta^4)/64. \quad (2.18)$$

$$J_p = \pi D^4(1 - \delta^4)/32. \quad (2.19)$$

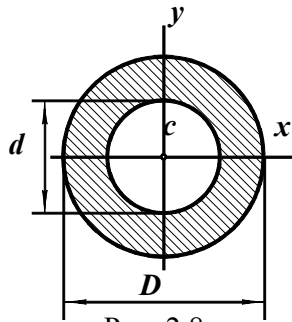


Рис. 2.8

Аналогично,

### 2.4. Изменения моментов инерции при переносе координатной системы

Приведенные примеры проиллюстрировали методы определения моментов инерции, основанные на непосредственном интегрировании. Эти способы могут быть использованы при любом взаимном расположении фигуры и координатной системы. Однако такой путь связан с громоздкими выкладками. Поэтому целесообразно установить закономерности изменения моментов инерции при переносе осей. Это позволит, найдя моменты инерции в некоторой базовой системе, определить их в любой другой, минуя интегрирование. Обычно в качестве базовых принимают оси из семейства центральных осей.

Переход от одной системы координат ( $\xi\eta$  на рис. 2.9) к другой ( $xy$ ) можно осуществить в два этапа – параллельный перенос осей до положения  $uv$  с последующим поворотом на угол  $\alpha$  в позицию  $xy$ .

Рассмотрим изменения осевых и центробежного моментов инерции фигуры на каждом из указанных этапов переноса осей.

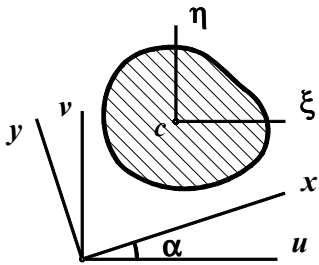


Рис. 2.9

### 2.4.1. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей

Пусть задана фигура и связанные с ней оси  $u$  и  $v$  (рис. 2.10). Проведем центральные оси  $\xi$  и  $\eta$ , параллельные заданным. Взаимное положение систем задано координатами центра тяжести  $u_c$ ,  $v_c$ .

Считаем известными площадь фигуры  $A$ , осевые  $J_\xi$ ,  $J_\eta$  и центробежный  $J_{\xi\eta}$  моменты инерции относительно центральных осей.

Найдем осевые  $J_u$ ,  $J_v$  и центробежный  $J_{uv}$  моменты инерции.

Из рисунка видно, что  $v = \eta + v_c$ . Учитывая это, находим

$$J_u = \int_A v^2 dA = \int_A (\eta + v_c)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2v_c \int_A \eta dA + v_c^2 \int_A dA.$$

Интегралы в последних трех слагаемых: в первом –  $J_\xi$ , во втором –  $S_\xi$  ( $S_\xi = 0$ , так как ось  $\xi$  центральная), в третьем –  $A$ . Итак,  $J_u = J_\xi + v_c^2 A$ . (2.20)

Аналогично, при  $u = \xi + u_c$  получаем

$$J_v = J_\eta + u_c^2 A. \quad (2.21)$$

Осевой момент инерции относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Из формул (2.20) и (2.21) следует, что в семействе параллельных осей центральная ось сообщает осевому моменту инерции минимум.

Найдем теперь центробежный момент инерции:

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (\xi + u_c)(\eta + v_c) dA = \int_A \xi\eta dA + u_c \int_A \eta dA + v_c \int_A \xi dA + u_c v_c \int_A dA.$$

Интегралы во втором и третьем слагаемых равны нулю, так как являются статическими моментами относительно центральных осей.

Учитывая, что  $\int_A \xi\eta dA = J_{\xi\eta}$ , а  $\int_A dA = A$ , получаем

$$J_{uv} = J_{\xi\eta} + u_c v_c A. \quad (2.22)$$

Центробежный момент инерции относительно пары осей равен центробежному моменту инерции относительно центральной параллельной пары плюс произведение площади фигуры и координат центра тяжести в новых осях. При использовании формулы (2.22) необходимо учитывать знаки координат  $u_c$  и  $v_c$ .

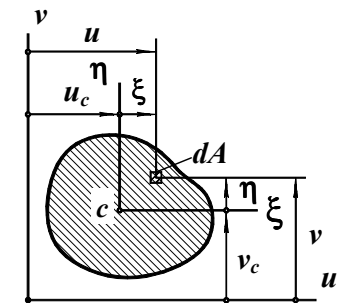


Рис. 2.10

### 2.4.2. Изменения осевых и центробежного моментов инерции при повороте координатной системы

Установим закономерности изменения моментов инерции при повороте осей (рис. 2.11). Будем считать известными осевые  $J_u, J_v$  и центробежный  $J_{uv}$  моменты инерции. Повернем оси  $u$  и  $v$  до положения  $x, y$  и найдем моменты инерции  $J_x, J_y$  и  $J_{xy}$ .

Из вспомогательного построения  $x = u \cos \alpha + v \sin \alpha$ ,  
 $y = v \cos \alpha - u \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Теперь } J_x &= \int_A y^2 dA = \\ &= \int_A (v \cos \alpha - u \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A v^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A u^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A uv dA. \end{aligned}$$

Рис. 2.11

$$= \cos^2 \alpha \int_A v^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A u^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A uv dA.$$

Интеграл в первом слагаемом есть  $J_u$ , во втором  $J_v$ , в третьем  $J_{uv}$ .

$$\text{Итак, } J_x = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha - J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (2.23)$$

$$\text{Аналогично, } J_y = J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha + J_{uv} \sin 2\alpha. \quad (2.24)$$

Центробежный момент инерции:  $J_{xy} = \int_A xy dA =$

$$\begin{aligned} &= \int_A (u \cos \alpha + v \sin \alpha)(v \cos \alpha - u \sin \alpha) dA = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left( \int_A v^2 dA - \int_A u^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A uv dA. \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$J_{xy} = 0,5(J_u - J_v) \sin 2\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha. \quad (2.25)$$

При использовании формул (2.23) ... (2.25) нужно иметь в виду, что положительный угол  $\alpha$  откладывается против хода часовой стрелки.

Итак, формулы (2.20) ... (2.25) позволяют, определив моменты инерции фигуры относительно центральных осей, перейти к любой координатной системе, минуя трудоемкое интегрирование.

### 2.5. Главные оси. Главные центральные оси

Расчетные формулы сопротивления материалов намного упрощаются, если при решении задач использовать так называемые главные центральные оси.

**Главными** называются такие оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Установим, под каким углом по отношению к осям  $u$  и  $v$  следует расположить оси  $x$  и  $y$  (рис. 2.11), чтобы они стали главными. Для этого воспользуемся формулой (2.25). Обозначив искомый угол  $\alpha_0$ , запишем:  $J_{xy} = 0,5(J_u - J_v) \sin 2\alpha_0 + J_{uv} \cos 2\alpha_0 = 0$ . Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_v - J_u). \quad (2.26)$$

Поскольку тангенс – периодическая функция с периодом  $180^\circ$ , равенству (2.26) удовлетворяют два значения угла  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ . Поэтому формула (2.26) определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных осей.

**Главными центральными** называются главные оси, проходящие через центр тяжести. Если в качестве  $u$  и  $v$  взять центральные оси, то формула (2.26) определит положение главных центральных осей.

У любой фигуры существует бесчисленное множество главных (нецентральных) осей. Центральных (неглавных) осей также бесчисленное множество. Осей же главных центральных в общем случае – только одна пара. Таким образом, **главные центральные оси – это геометрический объект, однозначно определяемый формой и размерами фигуры и жестко связанный с ней**. Отмеченное свойство главных центральных осей имеет важное методическое значение, поскольку позволяет использовать их в качестве обобщенных представителей фигуры (поперечного сечения стержня).

Выделим частные случаи.

У симметричной фигуры (рис. 2.12) любой элементарной площадке в одной половине найдется симметричная в другой. Произведения  $xy dA$  у этих площадок равны по величине, но обратны по знаку. Центробежный момент инерции (2.3) фигуры будет равен нулю. Таким образом, ось симметрии и любая перпендикулярная ей ось являются главной парой.

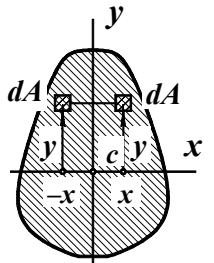


Рис. 2.12

Ось симметрии и перпендикулярная ей центральная ось являются главными центральными осями симметричной фигуры.

У фигуры, имеющей две оси симметрии, центр тяжести лежит в точке их пересечения, так что оси симметрии и являются главными центральными.

## 2.6. Главные моменты инерции

*Главными<sup>1</sup> моментами инерции называются моменты инерции относительно главных центральных осей.*

После определения угла  $\alpha_0$  по равенству (2.26) главные моменты инерции могут быть вычислены по формулам (2.23) и (2.24).

С целью иллюстрации важного свойства главных моментов инерции исследуем равенства (2.23) и (2.24). Просуммируем их:

$$J_u + J_v = J_x + J_y. \quad (2.27)$$

*Сумма осевых моментов инерции при повороте координатных осей остается постоянной<sup>2</sup>.*

Теперь исследуем момент инерции  $J_x$  (2.23) на экстремум – продифференцируем его по  $\alpha$  и приравняем производную нулю:

$$dJ_x/d\alpha = -2J_u \cos\alpha \sin\alpha + 2J_v \sin\alpha \cos\alpha - 2J_{uv} \cos 2\alpha = 0.$$

Прежде чем делать выводы, преобразуем полученное выражение.

$$dJ_x/d\alpha = -2(J_u \cos\alpha \sin\alpha - J_v \sin\alpha \cos\alpha + J_{uv} \cos 2\alpha) = -2J_{xy} \text{ (см. (2.25)).}$$

Итак, 
$$dJ_x/d\alpha = -2J_{xy}. \quad (2.28)$$

Из равенства (2.28) следует, что *главные моменты инерции принимают экстремальные значения в тех взаимно перпендикулярных осях, которые обращают в нуль центробежный момент.* Добавляя к сказанному свойство (2.27), видим, что *одна главная ось доставляет осевому моменту инерции максимум, другая минимум.*

Наконец, наличие минуса в равенстве (2.28) определяет:

– если  $J_{uv} > 0$ , то первая главная ось при положительном отсчете угла  $\alpha$  сообщает моменту инерции минимум;

– если же  $J_{uv} < 0$ , – максимум.

Для уменьшения объема вычислений при определении главных моментов инерции преобразуем формулы (2.23), (2.24) и (2.26). По формулам тригонометрии и равенству (2.26) имеем:

$$\cos 2\alpha_0 = \pm 1/\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha_0} = \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\sin 2\alpha_0 = \text{tg} 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0 = \mp 2J_{uv}/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2};$$

$$\cos^2 \alpha_0 = (1 + \cos 2\alpha_0)/2 = (1 \pm (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2;$$

$$\sin^2 \alpha_0 = (1 - \cos 2\alpha_0)/2 = (1 \mp (J_u - J_v)/\sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2.$$

<sup>1</sup> Ради краткости термина определение "центральными" опущено.

<sup>2</sup> Это равенство, впрочем, вытекает и из соотношения (2.5).

Заменяя тригонометрические функции в равенствах (2.23) и (2.24) представленными здесь выражениями, приходим к формулам

$$J_{\max/\min} = (J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2})/2. \quad (2.29)$$

## 2.7. Пояснения к таблицам

### геометрических характеристик прокатных профилей

Для строительных конструкций широко применяются прокатные профили. По очертанию они настолько сложны, что вычисление геометрических характеристик для них описанными выше способами практически невозможно. Поэтому для прокатных профилей составлены специальные таблицы. Наиболее распространенные из таблиц включены в приложения<sup>1</sup>.

В них приведены

- поясняющие рисунки;
- необходимые размеры;
- площади сечений;
- расстояния, определяющие положения центров тяжести;
- моменты инерции относительно различных осей;
- обозначения;
- размерности.

Кроме геометрических характеристик, рассматриваемых в настоящем разделе, таблицы содержат и другие величины, применяемые в курсе сопротивления материалов.

Для двутавров и швеллеров приведены такие величины как  $W_x$ ,  $i_x$ ,  $S_x$ ,  $W_y$  и  $i_y$ . Они будут использоваться в последующих разделах курса. Там же будут даны необходимые пояснения к ним.

Для равнобоких уголков в силу симметрии сечения даны лишь

- одна координата центра тяжести сечения;
- моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$ .

Они равны соответствующим величинам, связанным с вертикальной осью.

<sup>1</sup> Таблицы приведены с сокращениями. В них не включены характеристики, которые в сопротивлении материалов используются редко или не используются вообще. В таблицах сохранены стандартные обозначения, отличающиеся от используемых здесь.

Наличие таблиц, содержащих необходимые геометрические характеристики, позволяет рассматривать прокатные профили как "простые" фигуры, для которых требуемые в расчетах величины известны.

В заключение отметим, что со временем нормативы на прокатные профили пересматриваются, составляются новые таблицы. Поэтому возможно несовпадение значений, приведенных ниже, с содержащимися в других источниках.

## 2.8. Примеры определения положения главных центральных осей и величин главных моментов инерции

Находить положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции приходится во многих задачах сопротивления материалов. С целью иллюстрации решения подобных задач приведем примеры.

### 2.8.1. Симметричные фигуры

**Пример 2.1.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, изображенной на рис. 2.13.

Фигура имеет две оси симметрии –  $x$  и  $y$ . Они и являются главными центральными осями.

Заданная фигура имеет сложное очертание, но составлена из двух простых частей – прямоугольника и круга. Поэтому искомые моменты инерции найдем как разности:  $J_x = J_x^1 - J_x^2$ ,  $J_y = J_y^1 - J_y^2$  (верхний индекс 1 относится к прямоугольнику, 2 – к кругу).

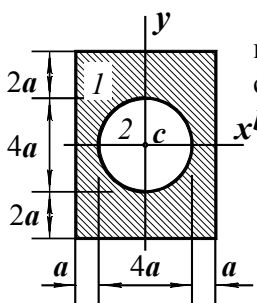


Рис. 2.13

Для вычисления моментов инерции названных частей относительно осей  $x$  и  $y$  воспользуемся формулами (2.11), (2.12) и (2.16), приняв в них

$$b = 6a, h = 8a; D = 4a. \text{ И так,}$$

$$J_x^1 = 6a(8a)^3/12 = 256a^4, J_y^1 = 8a(6a)^3/12 = 144a^4;$$

$$J_x^2 = J_y^2 = \pi(4a)^4/64 = 12,6a^4.$$

Главные моменты инерции

$$J_x = J_x^1 - J_x^2 = 256a^4 - 12,6a^4 = 243,4a^4;$$

$$J_y = J_y^1 - J_y^2 = 144a^4 - 12,6a^4 = 131,4a^4.$$

**Пример 2.2.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции фигуры, показанной на рис. 2.14.

Поскольку фигура симметрична, центр тяжести лежит на оси  $x$ .

Определим координату центра тяжести в системе  $xy^0$ . Для этого разделим фигуру на две части: 1 – прямоугольник и 2 – треугольник и воспользуемся формулой из (2.10), которая при двух составляющих принимает вид  $x_c^0 = (A_1x_1^0 + A_2x_2^0)/(A_1 + A_2)$ . В ней  $A_1 = 12 \text{ см}^2$ ,  $x_1^0 = -1,5 \text{ см}$ ;  $A_2 = 6 \text{ см}^2$ ,  $x_2^0 = 1 \text{ см}$ . Теперь

$$x_c^0 = (A_1x_1^0 + A_2x_2^0)/(A_1 + A_2) = (12(-1,5) + 6 \cdot 1)/(12 + 6) = -0,67 \text{ см}.$$

Главные центральные оси фигуры – ось симметрии  $x$  и центральная ось  $y$ .

Вычислим вначале момент инерции  $J_x$ . Так как фигура состоит из двух частей, то  $J_x = J_x^1 + J_x^2$ . По формуле (2.11)  $J_x^1 = 3 \cdot 4^3/12 = 16 \text{ см}^4$ . У треугольника  $J_x^2 = 3 \cdot 4^3/48 = 4 \text{ см}^4$  (ось  $x$  является осью симметрии равнобедренного треугольника, поэтому используем формулу (2.14)). Суммируя, получаем  $J_x = J_x^1 + J_x^2 = 16 + 4 = 20 \text{ см}^4$ .

Момент инерции  $J_y$ . Он также равен сумме:  $J_y = J_y^1 + J_y^2$ . Но главная центральная ось фигуры  $y$  и для прямоугольника, и для треугольника является осью общего положения. Готовой формулы для вычисления составляющих моментов инерции нет. Поэтому проведем главные центральные оси прямоугольника  $y^1$  и треугольника  $y^2$  и воспользуемся формулой (2.21), которую применительно к используемому в задаче обозначениям запишем так: для прямоугольника  $J_y^1 = J_{y^1}^1 + (x_1^0 - x_c^0)^2 A_1$ ; для треугольника  $J_y^2 = J_{y^2}^2 + (x_2^0 - x_c^0)^2 A_2$ .

Первые слагаемые в записанных формулах – моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей:  $J_{y^1}^1 = 4 \cdot 3^3/12 = 9 \text{ см}^4$  (форм. (2.12));  $J_{y^2}^2 = 4 \cdot 3^3/36 = 3 \text{ см}^4$  ((2.13), т.к. ось  $y^2$  – центральная и параллельная стороне треугольника).

Вторые слагаемые – изменения моментов инерции при переходе от центральных осей к нецентральному, равные произведениям площадей составляющих фигур на квадраты расстояний от оси  $y$  до осей  $y^1$  и  $y^2$  соответственно. Теперь

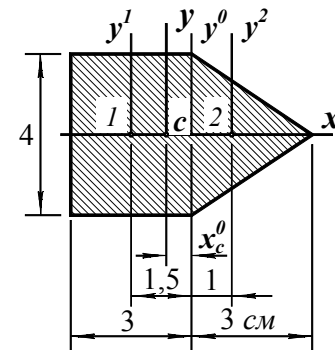


Рис. 2.14

$$J_y^1 = J_{y_1}^1 + (x_1^0 - x_c^0)^2 A_1 = 9 + (-1,5 - (-0,67))^2 12 = 17,3 \text{ см}^4;$$

$$J_y^2 = J_{y_2}^2 + (x_2^0 - x_c^0)^2 A_2 = 3 + (1 - (-0,67))^2 6 = 19,7 \text{ см}^4.$$

В итоге  $J_y = J_y^1 + J_y^2 = 17,3 + 19,7 = 37 \text{ см}^4.$

**Пример 2.3.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции симметричного сечения, состоящего из прокатного двутавра № 12 и швеллера № 16а (рис. 2.15).

Ось симметрии  $y$  – главная центральная. Вторую ось найдем, определив положение центра тяжести  $c$ .

Проведем вспомогательную ось  $x^0$ . По таблицам сортамента (см. табл. 1 и 2 приложения) находим

$$A_1 = 14,7 \text{ см}^2, y_1^0 = -6 \text{ см};$$

$$A_2 = 19,5 \text{ см}^2, y_2^0 = 2 \text{ см}.$$

Ордината точки  $c$

$$y_c^0 = (A_1 y_1^0 + A_2 y_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (14,7(-6) + 19,5 \cdot 2) / (14,7 + 19,5) = -1,44 \text{ см}.$$

Вторая главная центральная ось – ось  $x$ .

Главные моменты инерции.

Момент  $J_x = J_x^1 + J_x^2$ . Поскольку ось  $x$  не является центральной ни для швеллера, ни для двутавра, то

$$J_x^1 = J_{x_1}^1 + (y_1^0 - y_c^0)^2 A_1, J_x^2 = J_{x_2}^2 + (y_2^0 - y_c^0)^2 A_2,$$

где  $J_{x_1}^1$  и  $J_{x_2}^2$  – соответственно моменты инерции двутавра и швеллера относительно центральных осей  $x^1$  и  $x^2$ . По тем же таблицам находим  $J_{x_1}^1 = 350 \text{ см}^4$ , и  $J_{x_2}^2 = 78,8 \text{ см}^4$  (в табл. 2 это число расположено в колонке, соответствующей  $J_y$ , так как "табличная" ось  $y$  занимает в швеллере такое же положение, что и ось  $x^2$  в рассматриваемом примере). Теперь

$$J_x = J_{x_1}^1 + (y_1^0 - y_c^0)^2 A_1 + J_{x_2}^2 + (y_2^0 - y_c^0)^2 A_2 =$$

$$= 350 + (-6 - (-1,44))^2 14,7 + 78,8 + (2 - (-1,44))^2 19,5 = 966 \text{ см}^4.$$

Момент инерции  $J_y = J_y^1 + J_y^2$ . Ось  $y$  – главная центральная и для двутавра, и для швеллера, и для всего сечения. Поэтому согласно таблицам  $J_y^1 = 27,9 \text{ см}^4$ ,  $J_y^2 = 823 \text{ см}^4$ . Итак,

$$J_y = J_y^1 + J_y^2 = 27,9 + 823 = 851 \text{ см}^4.$$

## 2.8.2. Составная фигура общего очертания

**Пример 2.4.** Найдем положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции сечения, составленного из прокатных швеллера № 20 и равнобокого уголка 250·30 (рис. 2.16).

Найдем положение центра тяжести  $c$ .

Введем оси  $u^0$  и  $v^0$ .

Координаты точки  $c$ :

$$u_c^0 = (A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0) / (A_1 + A_2),$$

$$v_c^0 = (A_1 v_1^0 + A_2 v_2^0) / (A_1 + A_2).$$

По табл. 2 и 3 находим:

$$u_1^0 = -10 \text{ см},$$

$$v_1^0 = 2,07 \text{ см},$$

$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2;$$

$$u_2^0 = v_2^0 = 7,31 \text{ см},$$

$$A_2 = 142 \text{ см}^2.$$

Теперь

$$u_c^0 = (A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (23,4(-10) + 142 \cdot 7,31) / (23,4 + 142) = 4,86 \text{ см};$$

$$v_c^0 = (A_1 v_1^0 + A_2 v_2^0) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (23,4 \cdot 2,07 + 142 \cdot 7,31) / (23,4 + 142) = 6,57 \text{ см}.$$

Через центр тяжести сечения проведем оси  $u$  и  $v$ .

Осевые моменты инерции.

Проведем центральные оси швеллера  $u^1, v^1$  и уголка  $u^2, v^2$ .

$$J_u = J_u^1 + J_u^2 = J_{u_1}^1 + (v_1^0 - v_c^0)^2 A_1 + J_{u_2}^2 + (v_2^0 - v_c^0)^2 A_2.$$

По табл. 2 и 3  $J_{u_1}^1 = 113 \text{ см}^4$ ,  $J_{u_2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ . Теперь

$$J_u = 113 + (2,07 - 6,57)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 6,57)^2 142 = 8842 \text{ см}^4.$$

Второй осевой момент инерции

$$J_v = J_v^1 + J_v^2 = J_{v_1}^1 + (u_1^0 - u_c^0)^2 A_1 + J_{v_2}^2 + (u_2^0 - u_c^0)^2 A_2.$$

Из тех же таблиц  $J_{v_1}^1 = 1520 \text{ см}^4$ ,  $J_{v_2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ , так что

$$J_v = 1520 + (-10 - 4,86)^2 23,4 + 8177 + (7,31 - 4,86)^2 142 = 15720 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции  $J_{uv} = J_{uv}^1 + J_{uv}^2$ . В соответствии с равенством (2.22) и приведенной там же формулировкой

$$J_{uv}^1 = J_{u^1 v^1}^1 + (u_1^0 - u_c^0)(v_1^0 - v_c^0) A_1.$$

Так как оси  $u^1$  и  $v^1$  являются главными центральными осями швеллера (фигура симметричная),  $J_{u^1 v^1}^1 = 0$ .

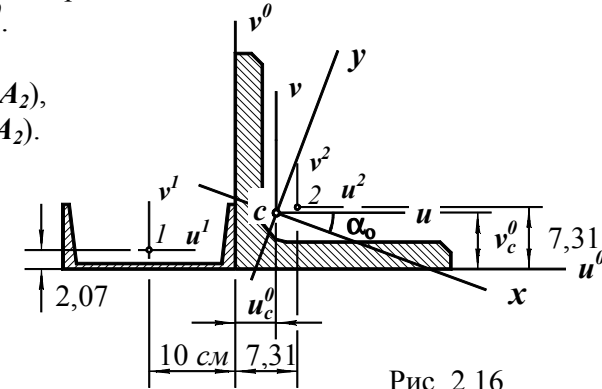


Рис. 2.16

У уголка также  $J_{uv}^2 = J_{u^2 v^2} + (u_2^0 - u_c^0)(v_2^0 - v_c^0)A_2$ . Но  $J_{u^2 v^2} \neq 0$ , поскольку оси  $u^2$  и  $v^2$  не являются главными для уголка. В таблице 3 центробежного момента инерции уголка нет. Поэтому определение  $J_{u^2 v^2}$  выливается в самостоятельную задачу.

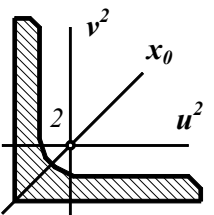


Рис. 2.17

Изобразим уголок отдельно (рис. 2.17).

Кроме осей  $u^2$  и  $v^2$  проведем главную центральную ось уголка  $x_0$ .

В соответствии с формулой (2.23) и фигурирующими в примере обозначениями

$$J_{x_0}^2 = J_{u^2}^2 \cos^2 \alpha + J_{v^2}^2 \sin^2 \alpha - J_{u^2 v^2} \sin 2\alpha.$$

Здесь  $J_{x_0}^2 = 12965 \text{ см}^4$ ,  $J_{u^2}^2 = J_{v^2}^2 = 8177 \text{ см}^4$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Подставляя числовые значения, имеем  $12965 = 8177 \cos^2 45 + 8177 \sin^2 45 - J_{u^2 v^2} \sin(2 \cdot 45)$ , откуда  $J_{u^2 v^2} = -4788 \text{ см}^4$ .

Итак,

$$\begin{aligned} J_{uv} &= J_{uv}^1 + J_{uv}^2 = \\ &= J_{uv}^1 + (u_1^0 - u_c^0)(v_1^0 - v_c^0)A_1 + J_{u^2 v^2} + (u_2^0 - u_c^0)(v_2^0 - v_c^0)A_2 = \\ &= 0 + (-10 - 4,86)(2,07 - 6,57)23,4 - \\ &- 4788 + (7,31 - 4,86)(7,31 - 6,57)142 = -2966 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Угол  $\alpha_0$ , на который нужно повернуть оси  $u$  и  $v$ , чтобы они, оставаясь центральными, стали главными, найдем по формуле (2.26):

$$\text{tg} 2\alpha_0 = 2J_{uv} / (J_v - J_u) = 2(-2966) / (15720 - 8842) = -0,862; \alpha_0 = -20,4^\circ.$$

Главные центральные оси, повернутые к  $u$  и  $v$  по ходу часовой стрелки, обозначим  $x$  и  $y$ .

Главные моменты инерции.

В соответствии с формулой (2.29)

$$\begin{aligned} J_{\max(\min)} &= (J_u + J_v \pm \sqrt{(J_u - J_v)^2 + 4J_{uv}^2}) / 2 = \\ &= (8842 + 15720 \pm \sqrt{(8842 - 15720)^2 + 4 \cdot 2966^2}) / 2 = 16820 \text{ (7739)} \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Поскольку центробежный момент инерции  $J_{uv}$  отрицателен, главный момент  $J_y = J_{\max}$  ( $y$  – первая ось при положительном отсчете угла  $\alpha$ ), а  $J_x = J_{\min}$ .

Итак,  $J_x = 7739 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 16820 \text{ см}^4$ .

Вычисление геометрических характеристик поперечных сечений стержней является, как правило, одним из этапов задачи прочности, жесткости или устойчивости стержня. Поэтому важно усвоить этот материал и развить прочные расчетные навыки.

### 3. Внутренние силы. Внутренние силовые факторы

#### 3.1. Внешние и внутренние силы

В сопротивлении материалов, как и во многих других разделах механики, силы подразделяют на внешние и внутренние. Поскольку рассматриваемые ниже силы могут фигурировать как в том, так и в другом ранге, остановимся на признаках их подразделения.

С философской точки зрения силы являются мерой механического взаимодействия объектов единой системы и поэтому они всегда внутренние. Однако в задачах анализа обычно фигурирует конкретный элемент системы. Его мысленно выделяют. Но для сохранения условий существования анализируемого объекта воспроизводят влияние на него со стороны отброшенной части системы. Это влияние и представляет собою внешнее воздействие.

В соответствии с отмеченным *внешними* называются силы действия отброшенных тел на рассматриваемое.

Силы же взаимодействия разных частей одного тела являются *внутренними*.

Выделим из конструкции стержневой элемент (рис. 3.1). Действие отброшенных частей конструкции заменим силами (на рисунке – это  $F_1, F_2, F_3, F_4$ ). Показанные силы – внешние для рассматриваемого стержня.

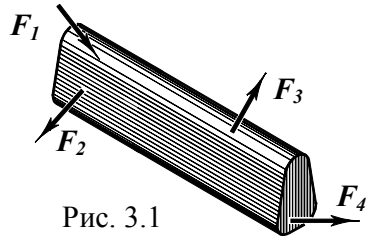


Рис. 3.1

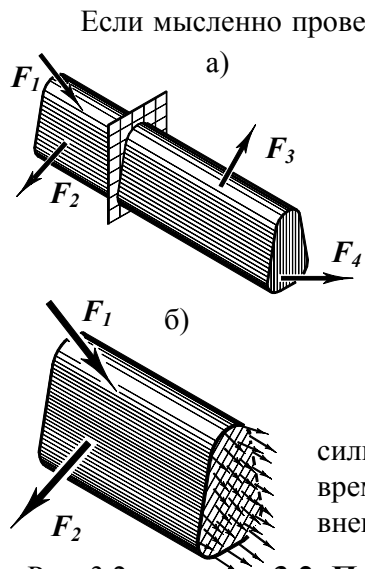


Рис. 3.2

Если мысленно провести сечение в стержне (рис. 3.2 а), силы взаимодействия в нем являются внутренними. В то же время, если отбросить часть стержня (например, правую) и заменить действие на оставшуюся часть силами (рис. 3.2 б), последние перейдут в категорию внешних. Таким образом, силы, действующие в сечении, являются внутренними для стержня и внешними для его части, ограниченной этим сечением.

В дальнейшем возникающие в сечении силы будем называть внутренними и в то же время на рисунках изображать их в виде внешних.

### 3.2. Понятия напряжений и напряженного состояния

Внутренние силы в сечении стержня действуют в каждой точке. Они распределены по сечению. Введем количественную меру внутренних сил.

Выделим в произвольной точке сечения малую площадку  $\Delta A$  (рис. 3.3 а). Равнодействующую сил, возникающих в ней, обозначим  $\Delta F$ . Средняя интенсивность внутренних сил в рассматриваемой площадке равна отношению  $\Delta F/\Delta A$ . Стянув площадку в точку, получим истинное значение интенсивности:  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F/\Delta A = p$ ;  $p$  носит название **напряжения**.

В сопротивлении материалов *количественной мерой интенсивности внутренних сил в точке является напряжение*.

Поскольку направление напряжения  $p$  может быть произвольным, его обычно заменяют составляющими  $\sigma$  и  $\tau$ . Перпендикулярную сечению часть полного напряжения  $\sigma$  называют **нормальным** напряжением и отмечают индексом  $z$ , соответствующим параллельной оси (нормали к площадке). Лежащую в плоскости сечения составляющую полного напряжения обычно обозначают буквой  $\tau$  с тем же индексом и называют **касательным** напряжением.

Касательное напряжение  $\tau_z$  также может быть разложено на составляющие  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$ , параллельные координатным осям (рис. 3.3 б). Второй индекс у напряжения соответствует параллельной оси.

Размерность напряжений –  $H/m^2$  (Па) и т.п.

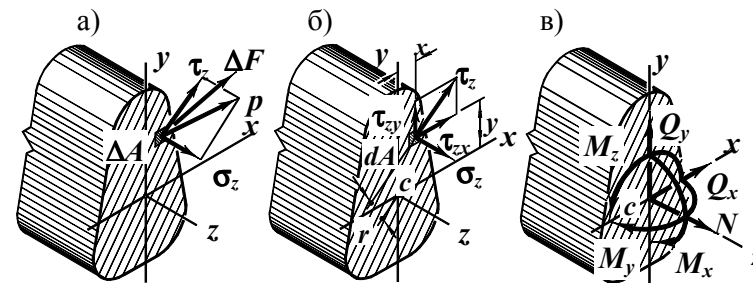


Рис. 3.3

Величины напряжений зависят не только от положения точки, но и от ориентации в пространстве проведенного через нее сечения. Важнейшим в сопротивлении материалов является понятие **напряженного состояния**. *Напряженное состояние в точке характеризуется совокупностью напряжений, действующих во всевозможных площадках, проходящих через данную точку*. Ниже будут введены методы оценки и количественные характеристики напряженного состояния.

### 3.3. Обобщенные силы в сечении.

#### Внутренние силовые факторы

##### 3.3.1. Понятия и термины

Распределенные по сечению силы образуют пространственную систему и приводятся к статически эквивалентным им главному вектору и главному моменту – обобщенным усилиям. Эти усилия могут быть представлены составляющими, связанными с координатными осями (рис. 3.3 в). В сопротивлении материалов, характеризуя усилия в стержне, обычно рассматривают поперечные сечения, а обобщенные усилия представляют в **главной координатной системе**, где *оси  $x$  и  $y$  – главные центральные оси поперечного сечения* (естественно, в этом случае  $z$  является продольной осью).

*Проекции главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, на главные координатные оси называются внутренними силовыми факторами*.

Итак, количественной мерой внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, являются внутренние силовые факторы. Обозначения и термины для них:

$N$  – продольная сила (иногда ее называют нормальной силой);

$Q_x$  и  $Q_y$  – поперечные (перерезывающие) силы;

$M_z$  – крутящий момент;

$M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты.

Выбранный способ разложения главного вектора и главного момента позволяет выделить их составляющие, связанные с простейшими видами нагружения:  $N$  – осевым растяжением или сжатием;  $Q_x$  и  $Q_y$  – срезом (этот вид еще называют сдвигом и скалыванием);  $M_z$  – кручением;  $M_x$  и  $M_y$  – изгибом.

Поскольку напряжения и обобщенные силы являются мерами одной и той же системы сил, между ними существует связь. Для внутренних силовых факторов эта связь выглядит так:

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad Q_x = \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_z = \int_A \tau r dA \quad \text{или} \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA. \quad (3.1)$$

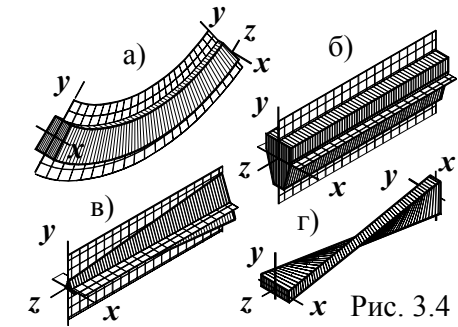
Подынтегральные выражения в равенствах (3.1) представляют собой элементарные внутренние усилия. Так,  $\sigma_z dA$ ,  $\tau_{zx} dA$ ,  $\tau_{zy} dA$ , являются элементарными продольной и поперечными силами;  $\sigma_z y dA$ ,  $\sigma_z x dA$ ,  $\tau r dA$  – элементарные изгибающие и крутящий моменты, а  $\tau_{zy} x dA$  и  $\tau_{zx} y dA$  – элементарные моменты относительно оси  $z$  вертикальной и горизонтальной составляющих касательного напряжения.

При известных напряжениях по формулам (3.1) можно найти внутренние силовые факторы. Однако решить обратную задачу – определить из равенств (3.1) напряжения по внутренним силовым факторам – нельзя. В этом случае нужно знать, как распределены напряжения по сечению.

### 3.3.2. Геометрические представители стержня в расчетной схеме

Геометрическими характеристиками стержня являются длина, очертание оси, форма, размеры и ориентация поперечных сечений. В зависимости от них различают стержни постоянного (рис. 3.4 а, б, г) и переменного (рис. 3.4 в) сечения, прямые (рис. 3.4 б, в, г) и кривые (рис. 3.4 а), выделяют естественно закрученные стержни (рис. 3.4 г).

Введем понятие **главной плоскости стержня** – плоскости, образованной совокупностью одноименных главных центральных осей. Стержень, изображенный на рис. 3.4 а, имеет одну главную плоскость, на 3.4 б, в – по две, у естественно закрученного стержня (рис. 3.4 г) главных плоскостей нет.



При изображении расчетной схемы, будем, как правило, указывать лишь ось стержня и, если особо не оговаривается, подразумевать, что главная его плоскость совпадает с плоскостью чертежа.

### 3.3.3. Метод сечений

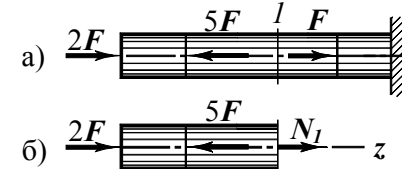
Определение величин и направлений внутренних силовых факторов производится из условий равновесия части стержня. Такой метод носит название **метода сечений**. Он позволяет перевести внутренние силовые факторы в категорию внешних и, подчинив условиям равновесия, определить их величины и направления.

Метод сечений включает следующие действия:

- поперечной плоскостью разрезают стержень в том месте, где требуется найти внутренние силовые факторы;
- отбрасывают одну часть стержня;
- действие отброшенной части на оставленную заменяют силами – внутренними силовыми факторами;
- из условий равновесия рассматриваемой части стержня находят величины и направления внутренних силовых факторов.

Рассмотрим примеры.

**Пример 3.1.** Определим внутренние силовые факторы и установим вид нагружения стержня (рис. 3.5 а) в сечении  $l$ .



Используем метод сечений.

Разрежем стержень поперечной плоскостью  $l$ . Рис. 3.5

Отбросим правую часть (вообще, можно отбрасывать любую из двух, но здесь правая часть несвободна, поэтому отбрасываем ее).



Действие правой части на левую заменим силами. Так как линии действия сил совпадают с осью стержня, в сечении  $l$  возникнет лишь продольная сила (рис. 3.5 б). Направим ее вправо.

Запишем условие равновесия<sup>1</sup>:  $\Sigma Z = 0: 2F - 5F + N_l = 0, \Rightarrow N_l = 3F$ . Положительный результат подтверждает правильность выбранного направления силы  $N_l$ .

Итак, в сечении  $l$  стержень растянут силой  $3F$ .

**Пример 3.2.** Определим величину и направление крутящего момента в сечении  $l$  стержня, подверженного сосредоточенным и распределенным моментам, действующим вокруг оси  $z$  (рис. 3.6 а).

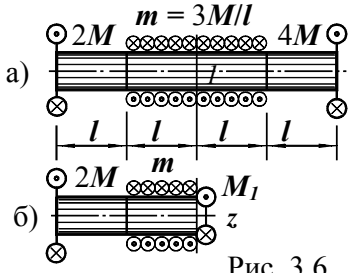


Рис. 3.6

Выполнив первые три операции метода сечений, приходим к рис. 3.6 б. Из условия  $\Sigma M_z = 0$  имеем  $2M - m \cdot l + M_l = 0, \Rightarrow M_l = 3M - 2M = M$ . Момент  $M_l$  направлен как показано на рисунке.

**Пример 3.3.** Найдем величины и направления поперечной силы и изгибающего момента в сечении  $l$  балки, показанной на рис. 3.7 а.

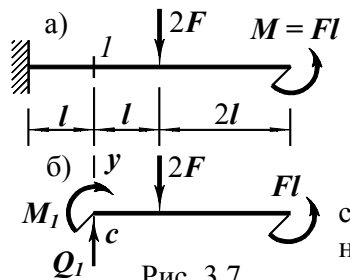


Рис. 3.7

Разрезав балку сечением  $l$ , отбросив левую часть и приложив силу  $Q_l$  и момент  $M_l$  (рис. 3.7 б), записываем условия равновесия:  $\Sigma Y = Q_l - 2F = 0, \Rightarrow Q_l = 2F$ .  $\Sigma M_c = M_l + 2F \cdot l - Fl = 0, \Rightarrow M_l = -Fl$ .

Направление силы  $Q_l$  совпадает с действительным; момент  $M_l$  направлен в сторону, обратную показанной на рис. 3.7 б.

**Пример 3.4.** Найдем внутренние силовые факторы в сечении  $l$  плоской рамы (рис. 3.8 а).

Разрезав раму, отбрасываем правую часть, заменяем ее действие силами  $N_l, Q_l, M_l$ , составляем и решаем уравнения равновесия:

$$\Sigma Z = N_l + q \cdot 2l = 0, \Rightarrow N_l = -2ql; \Sigma Y = Q_l + ql = 0, \Rightarrow Q_l = -ql; \Sigma M_c = M_l + q \cdot 2l \cdot l - ql \cdot l = 0, \Rightarrow M_l = -ql^2.$$

Выбранные направления  $N_l, Q_l$  и  $M_l$  оказались ошибочными. Действительные силы направлены в стороны, обратные показанным на рис. 3.8 б.

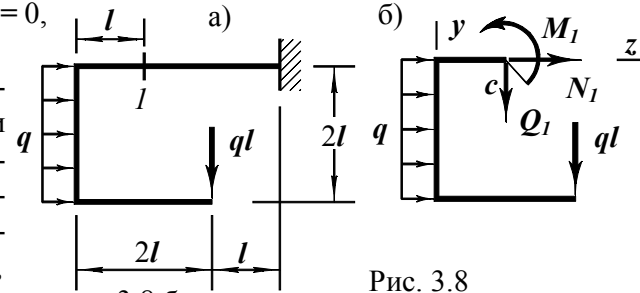


Рис. 3.8

**Пример 3.5.** Определим внутренние силовые факторы в сечении  $l$  пространственной рамы, показанной на рис. 3.9 а.

Часть рамы, рассматриваемая в равновесии, изображена на рис. 3.9 б.

Система действующих на нее сил – произвольная пространственная. Соответствующие этой системе уравнения статики и их решения:

$$\begin{aligned} \Sigma X = ql - Q_x = 0, & \Rightarrow Q_x = ql. \\ \Sigma Y = Q_y = 0. \\ \Sigma Z = N + q \cdot 4l = 0, & \Rightarrow N = -4ql. \\ \Sigma M_x = M_x + q \cdot 4l \cdot 2l = 0, & \Rightarrow M_x = -8ql^2. \\ \Sigma M_y = M_y + q \cdot 4l \cdot 3l - ql \cdot 2l = 0, & \Rightarrow M_y = -10ql^2. \\ \Sigma M_z = M_z + ql \cdot 4l = 0, & \Rightarrow M_z = -4ql^2. \end{aligned}$$

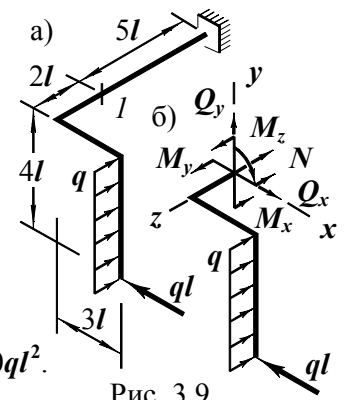


Рис. 3.9

Отрицательные знаки у  $N, M_x, M_y$  и  $M_z$  указывают на ошибочность принятых направлений этих внутренних силовых факторов. Действительные их направления противоположны изображенным на рисунке.

Приведенные примеры проиллюстрировали технику определения величин и направлений внутренних силовых факторов в конкретных сечениях. Эти же действия лежат в основе решения более сложных задач – анализа распределения обобщенных сил в конструкции.

<sup>1</sup> При записи уравнений равновесия нет необходимости вводить правила знаков проекций сил, связанные с направлением осей. Проекции разных направлений будем включать в уравнения с разными знаками. Так же будем поступать и при суммировании моментов.

### 3.4. Эпюры внутренних силовых факторов

При расчетах конструкций часто приходится строить графики, показывающие зависимость внутренних силовых факторов от положения сечения. Такие графики называют **эпюрами**.

В отличие от обычных графиков изображение эпюр сопровождается некоторыми особенностями:

- нулевая линия эпюры повторяет очертание оси стержня;
- ординаты эпюры откладываются перпендикулярно оси в местах расположения соответствующих сечений;
- изображение и обозначение координатных осей, в которых строится эпюра, как правило, опускается;
- ординаты эпюры откладываются согласно правилу знаков;
- при необходимости на эпюре ставят знак, определяющий направление внутреннего силового фактора;
- из декоративных соображений на эпюру наносят штриховку.

Для построения эпюры могут быть использованы разные приемы построения графиков. На начальном этапе освоения этой темы воспользуемся простейшим способом, опирающимся на

- понятие внутреннего силового фактора;
- правило знаков для него;
- метод сечений;
- аппарат элементарной алгебры.

При решении задач будем выполнять такие действия:

- 1) Определение опорных реакций (при необходимости<sup>1</sup>).
- 2) Деление конструкции на участки в зависимости от ее геометрической схемы и вида внешней нагрузки.
- 3) Построение эпюры внутреннего силового фактора на участке:
  - выбор сечения произвольного положения;
  - определение величины и направления (знака) внутреннего силового фактора с помощью метода сечений;
  - графическое оформление эпюры.

<sup>1</sup> Так как при определении величины внутреннего силового фактора достаточно знать внешние силы, приложенные только с одной стороны от сечения, некоторые опорные реакции можно не находить. Более того, иногда вообще отпадает необходимость в определении опорных реакций (см. приведенные выше примеры).

#### 3.4.1. Продольные силы

Если линии действия внешних сил, приложенных к стержню, совпадают с его осью (рис. 3.10), в поперечных сечениях возникают только продольные силы.



Рис. 3.10

**Правило знаков:**

- Продольную силу будем считать
- *положительной*, если она направлена от сечения (растягивающая) (рис. 3.11а),
  - *отрицательной*, если к сечению (сжимающая) (рис. 3.11б).

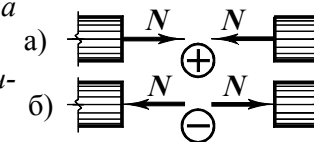


Рис. 3.11

**Пример 3.6.** Построим эпюру силы  $N$  в стержне, показанном на рис. 3.12а.

На стержне два участка.

Левый участок ( $0 < z < 2l$ ).

Рассечем стержень поперечной плоскостью  $I$  произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие правой части на левую заменим силой  $N(z)$ , предположив, ее растягивающей<sup>1</sup> (рис. 3.12 б).

Из условия равновесия левого отрезка стержня следует  $3F - N(z) = 0$ ,  $\Rightarrow N(z) = 3F$ . Сила постоянна.

Правый участок ( $2l < z < 5l$ ).

Действуя аналогично (рис. 3.12 в), имеем  $3F - 5F - N(z) = 0$ ,  $\Rightarrow N(z) = -2F$  – постоянна.

Итак, на левом участке стержень растянут силой  $3F$ , на правом сжат силой  $2F$ . Эпюра  $N$  изображена на рис. 3.12 г.

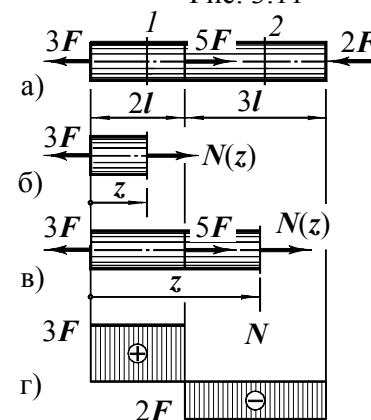


Рис. 3.12

<sup>1</sup> Предварительное направление силы можно выбрать любым. Но так как в сопротивлении материалов введены правила знаков, связанные с видом нагружения, целесообразно задаваться положительным направлением  $N$ . Если оно окажется ошибочным, из условия равновесия сила  $N$  получится отрицательной. При таком выборе удастся избежать дополнительного анализа, связанного с переходом от знака решения уравнения равновесия к знаку, соответствующему введенному правилу для  $N$ . Аналогично будем поступать при определении и других внутренних силовых факторов.

**Пример 3.7.** Построим эпюру продольной силы, учитывая собственный вес стержня (рис. 3.13 а).  $A$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – плотность материала.

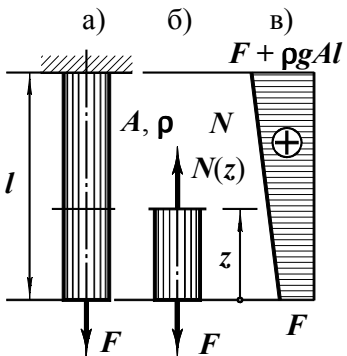


Рис. 3.13

На стержне один участок. Рассечем стержень горизонтальной плоскостью произвольного положения, отбросим верхнюю часть и заменим действие отброшенной части растягивающей силой  $N(z)$  (рис. 3.13 б).

Из условия равновесия следует:

$$N(z) - \rho g A z - F = 0, \Rightarrow N(z) = F + \rho g A z.$$

Сила  $N$  линейно переменна. При  $z = 0$  ее значение  $N(0) = F$ ; если же  $z = l$ , то  $N(l) = F + \rho g A l$ .

Эпюра продольной силы изображена на рис. 3.13 в.

### 3.4.2. Крутящие моменты

С построением эпюр крутящих моментов познакомимся на простейших схемах, когда стержень нагружен моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных продольной оси (рис. 3.14). При таких нагрузках в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты.

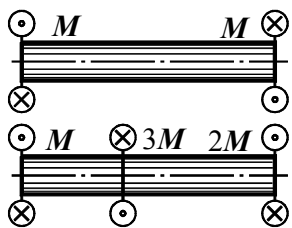


Рис. 3.14

**Правило знаков:** Внутренний крутящий момент будем считать

– положительным, если он направлен против хода часовой стрелки (рис. 3.15 а);

– отрицательным, если – по ходу часовой стрелки (рис. 3.15 б).

При определении знака крутящего момента следует смотреть на сечение со стороны отброшенной части стержня.

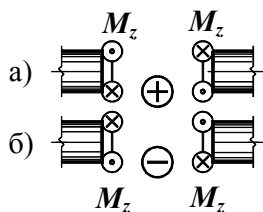


Рис. 3.15

Рассмотрим пример.

**Пример 3.8.** Построим эпюру крутящего момента для стержня, показанного на рис. 3.16а.

На стержне два участка.

Левый участок (рис. 3.16 б;  $0 < z < 3l$ ).

Согласно методу сечений разрезаем стержень поперечной плоскостью  $I$ , отбрасываем правую часть и заменяем ее действие крутящим моментом, полагая, что он положителен<sup>1</sup>. Из условия равновесия  $M + M_z(z) = 0$  устанавливаем, что  $M_z(z) = -M$ .

Правый участок (рис. 3.16 в;  $3l < z < 5l$ ).

Для этого участка  $M - 3M + M_z(z) = 0$ ,  $\Rightarrow M_z(z) = 2M$ .

На обоих участках моменты постоянны. Эпюра крутящего момента изображена на рис. 3.16 г.

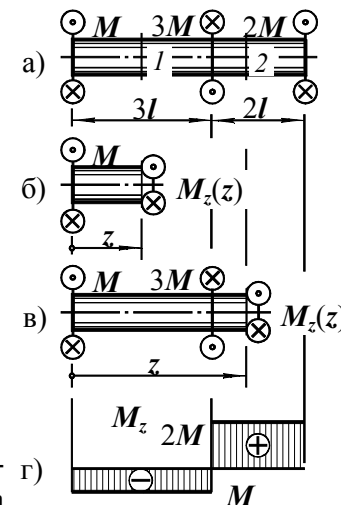


Рис. 3.16

### 3.4.3. Внутренние силовые факторы в балках

*Балкой* будем называть стержень, работающий на изгиб. Ограничимся рассмотрением балок, у которых имеются главные плоскости (рис. 3.17 а). Кроме того, из всего многообразия внешних нагрузок ограничимся такими, которые лежат в одной из главных плоскостей и не содержат продольных сил. В таких случаях из шести возможных внутренних силовых факторов в сечении балки отличными от нуля могут быть только два – поперечная сила и изгибающий момент, лежащие в плоскости нагружения ( $Q_y$  и  $M_x$  на рис. 3.17 б).

Отсутствие в сечении одноименных внутренних силовых факторов позволяет отказаться от индексов, определяющих плоскость действия поперечной силы и изгибающего момента.

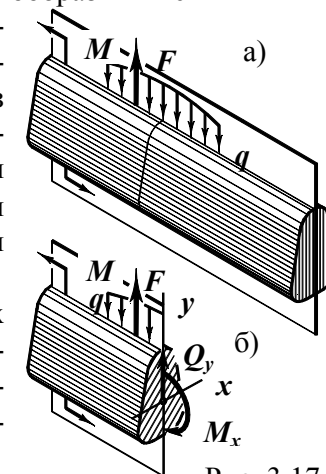


Рис. 3.17

<sup>1</sup> Здесь также будем задаваться положительным крутящим моментом, чтобы избежать процедуры определения его знака после решения уравнения равновесия.

### Правила знаков.

#### Правило знаков для поперечной силы.

Поперечную силу будем считать

- положительной, если на левую часть балки она действует вниз, а на правую вверх (рис. 3.18 а),
- отрицательной, если на левую часть балки она действует вверх, а на правую вниз (рис. 3.18 б).

Рис. 3.18

#### Правило знаков для изгибающего момента.

Изгибающий момент будем считать

- положительным, если он растягивает верхние волокна балки (рис. 3.19 а),
- отрицательным, если у балки растянуты нижние волокна<sup>1</sup> (рис. 3.19 б).

Рис. 3.19

### 3.4.3.1. Дифференциальные зависимости при изгибе

Балка и каждый ее элемент находятся в равновесии. Из равновесия элемента вытекают зависимости между усилиями, действующими на него. Выделим из балки (рис. 3.20 а) элементарный отрезок (рис. 3.20 б). Внешние силы, приложенные к нему,

- распределенная нагрузка интенсивности  $q_y(z)$  (отрезок  $dz$  бесконечно мал, поэтому интенсивность можно считать постоянной);
- поперечные силы  $Q_y(z)$  слева,  $Q_y(z)+dQ_y(z)$  справа;
- изгибающие моменты  $M_x(z)$  слева,  $M_x(z)+dM_x(z)$  справа.

Равновесие сил означает, что

$$\Sigma Y = Q_y(z) - q_y(z) \cdot dz - (Q_y(z) + dQ_y(z)) = 0.$$

Отсюда после приведения подобных членов и деления на  $dz$  следует

$$dQ_y(z)/dz = -q_y(z). \quad (3.2)$$

Производная поперечной силы равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком

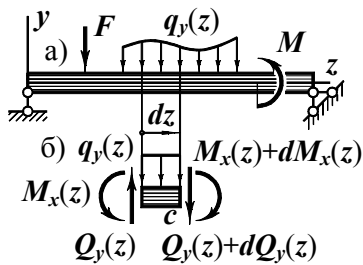


Рис. 3.20

<sup>1</sup> В учебной литературе по сопротивлению материалов и строительной механике (для студентов строительной специальности) обычно используют обратное правило знаков. При этом, строя эпюру моментов, положительные ординаты откладывают вниз. Введенное здесь правило исключает отмеченную аномалию, не изменяя очертания эпюры.

Второе условие равновесия:

$$\Sigma M_c = M_x(z) - Q_y(z) \cdot dz + q_y(z) \cdot dz \cdot dz/2 - (M_x(z) + dM_x(z)) = 0.$$

Приведа подобные члены, отбросив бесконечно малое второго порядка  $q_y(z)dz^2/2$  и поделив на  $dz$ , приходим к равенству

$$dM_x(z)/dz = -Q_y(z). \quad (3.3)$$

Производная изгибающего момента равна поперечной силе, взятой с обратным знаком.

Зависимости (3.2) и (3.3) играют важную роль при построении эпюр. К ним неоднократно будем обращаться и в других задачах теории изгиба балок.

### 3.4.3.2. Примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Перейдем к примерам.

**Пример 3.9.** Построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, показанной на рис. 3.21 а.

На балке один участок  $0 < z < l$ .

Рассечем балку поперечной плоскостью произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие ее на левую заменим поперечной силой и изгибающим моментом. Допустим, что они положительны: поперечная сила действует справа вниз, момент растягивает верхние волокна (рис. 3.21 б).

Из условий равновесия следует:

$\Sigma Y = F + Q(z) = 0, \Rightarrow Q(z) = -F$ , поперечная сила постоянна; эпюра  $Q$  изображена на рис. 3.21 в.

$\Sigma M_c = F \cdot z - M(z) = 0, \Rightarrow M(z) = Fz$ . Момент линейно переменен;  $M(0) = 0, M(l) = Fl$ . Эпюра  $M$  показана на рис. 3.21 г<sup>1</sup>.

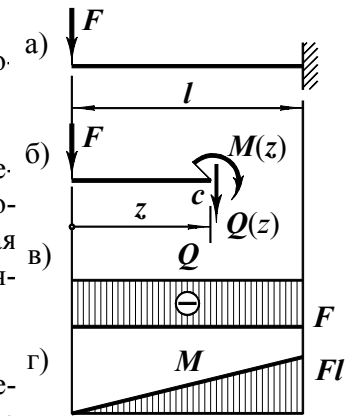


Рис. 3.21

<sup>1</sup> На эпюре изгибающих моментов знаки обычно не ставят. Это объясняется тем, что в сложных стержневых системах возможно противоречивое толкование знака. Следствием введенного выше правила является то, что ординаты эпюры моментов оказываются на стороне растянутых волокон балки.

**Пример 3.10.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 3.22 а.

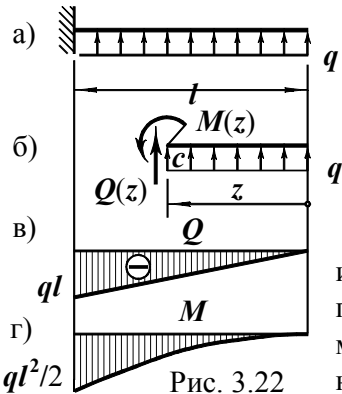


Рис. 3.22

На балке один участок  $0 < z < l$ .

Рассмотрим равновесие правой части (рис. 3.22 б). При этом действие отброшенной левой части заменим положительными поперечной силой (слева вверх) и моментом (растянуты верхние волокна).

Проецируя силы на вертикальную ось, имеем  $\Sigma Y = Q(z) + q \cdot z = 0, \Rightarrow Q(z) = -qz$ . Поперечная сила отрицательна, линейно переменна;  $Q(0) = 0, Q(l) = -ql$ . Эпюра  $Q$  показана на рис. 3.22 в.

Приравняем нулю сумму моментов сил, приложенных к рассматриваемой части балки, (моментная точка –  $c$ ):

$$\Sigma M_c = M(z) + q \cdot z \cdot z/2 = 0, \Rightarrow M(z) = -qz^2/2.$$

Изгибающий момент растягивает нижние волокна (отрицателен), изменяется по квадратной параболе.  $M(0) = 0, M(l) = -ql^2/2$ .

Двух значений изгибающего момента недостаточно для построения квадратной параболы. Чтобы провести ее, можно найти значение момента в третьей точке, например, при  $z = l/2$ . Однако примем во внимание равенство (3.3). Так как на правом краю поперечная сила равна нулю, в этом месте  $dM/dz = 0$  – экстремум. Отмеченного дополнения достаточно, чтобы построить эпюру  $M$ . Она изображена на рис. 3.22 г.

**Пример 3.11.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, показанной на рис. 3.23 а.

Наличие связей на концах балки не позволяет одним сечением выделить из нее свободную часть. Необходимо определить опорные реакции. По крайней мере, одну<sup>1</sup>.

Освободим балку от опорных связей и приложим силы реакций, как показано на рис. 3.23 б. Из условий равновесия вытекает:

<sup>1</sup> Для построения эпюры в данном случае достаточно найти реакцию одной опоры. Определив обе реакции, получаем возможность проверки правильности решения.

$$\Sigma Z = Z_b = 0; \Sigma M_a = q \cdot l \cdot l/2 - Y_b \cdot l = 0, \Rightarrow Y_b = ql/2;$$

$$\Sigma M_b = q \cdot l \cdot l/2 - Y_a \cdot l = 0, \Rightarrow Y_a = ql/2.$$

Рассечем балку, освобожденную от опор, поперечным сечением произвольного положения.

Отбросим правую часть.

Действие ее на левый отрезок заменим положительно направленными  $Q(z)$  и  $M(z)$  (рис. 3.23 в).

Равновесие рассматриваемого отрезка означает, что  $\Sigma Y = ql/2 - q \cdot z - Q(z) = 0$   
 $\Rightarrow Q(z) = ql/2 - qz$  – линейная функция с  $Q(0) = ql/2, Q(l) = -ql/2$ .

Эпюра поперечной силы изображена на рис. 3.23 г.

Второе условие равновесия

$\Sigma M_c = (ql/2) \cdot z - q \cdot z \cdot z/2 + M(z) = 0$   
 дает  $M(z) = qz^2/2 - qlz/2$  – квадратная парабола с  $M(0) = 0$  и  $M(l) = 0$ .

Третью точку для построения квадратной параболы возьмем в месте экстремума изгибающего момента – посередине балки (здесь поперечная сила, т.е.  $dM/dz$  обращается в нуль). При  $z = l/2$  момент  $M(l/2) = -ql^2/8$ .

Эпюра изгибающего момента показана на рис. 3.23 д.

**Пример 3.12.** Построим эпюры  $Q$  и  $M$  в свободно опертой балке от линейно переменной распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью  $q$  (рис. 3.24 а).

В этом примере также нужно найти хотя бы одну опорную реакцию. Найдем левую. Освободив балку от опор и заменив их действие силами (рис. 3.24 б), запишем уравнение  $\Sigma M_b = Y_a \cdot l - 0,5 \cdot q \cdot l \cdot l/3 = 0$ . Из него находим  $Y_a = ql/6$ .

Теперь разрежем балку сечением произвольного положения и рассмотрим равновесие левой ее части (рис. 3.24 в). Интенсивность нагрузки на правом краю рассматриваемого отрезка может быть найдена из подобия треугольников, изображающих нагрузку на рис. 3.24 б, 3.24 в:  $q/l = q(z)/z$ , откуда  $q(z) = qz/l$ .

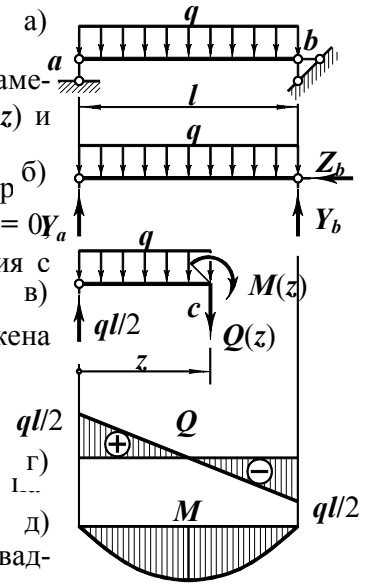


Рис. 3.23

Уравнения равновесия:

Первое:  $\Sigma Y = ql/6 - 0,5 \cdot q(z) \cdot z - Q(z) = 0$ . Подставив сюда выражение  $q(z)$ , получаем  $Q(z) = ql/6 - qz^2/(2l)$  – квадратная парабола.  $Q(0) = ql/6$ ,  $Q(l) = -ql/3$ . На левом краю балки интенсивность нагрузки равна нулю. Согласно равенству (3.2) в этом месте  $dQ(z)/dz = 0$  – экстремум на эпюре  $Q$ . Эпюра поперечной силы, построенная по этим данным, изображена на рис. 3.24 г.

Второе уравнение:

$$\Sigma M_c = (ql/6) \cdot z - 0,5 \cdot q(z) \cdot z \cdot z/3 + M(z) = 0.$$

Учитывая зависимость  $q(z)$  от  $z$ , получаем  $M(z) = qz^3/(6l) - qlz/6$  – кубическая парабола с  $M(0) = 0$  и  $M(l) = 0$ .

Найдем места экстремумов. По равенству (3.3)

$$dM(z)/dz = -Q(z) = qz^2/(2l) - ql/6 = 0.$$

Корни этого уравнения  $z = l/\sqrt{3}$  и  $z = -l/\sqrt{3}$ . Отбрасывая отрицательный корень, находим  $M(l/\sqrt{3}) = -ql^2/(9\sqrt{3})$ . По полученным

данным строим эпюру изгибающего момента<sup>1</sup> (рис. 3.24 д).

Приемы, показанные на балках с одним участком, применяются для построения эпюр в балках с несколькими участками.

**Пример 3.13.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в балке, изображенной на рис. 3.25.

На балке три участка. На правом участке можно строить эпюры без определения опорных реакций, так как после отсечения консоли она становится свободным телом. На левом же и среднем участках такое невозможно. Чтобы не разрывать процесс определения внутренних силовых факторов, найдем вначале реакции опор.

Из равновесия балки, освобожденной от опор (рис. 3.25 б), следует:

<sup>1</sup> Кубическая парабола построена по четырем данным: трем значениям и месту экстремума.

$$\Sigma Z = Z_a = 0.$$

$$\Sigma M_a = q \cdot 2l \cdot l - ql^2 - Y_b \cdot 3l + ql \cdot 4l = 0, \Rightarrow Y_b = 5ql/3.$$

$$\Sigma M_b = Y_a \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l - ql^2 + ql \cdot l = 0, \Rightarrow Y_a = 4ql/3.$$

Переходим к определению поперечных сил и изгибающих моментов.

Левый участок (рис. 3.25 в;  $0 < z_1 < 2l$ ):

$$\Sigma Y = 4ql/3 - q \cdot z_1 - Q(z_1) = 0, \Rightarrow Q(z_1) = 4ql/3 - qz_1 - \text{линейно переменная функция с } Q(0) = 4ql/3, Q(2l) = -2ql/3.$$

$$\Sigma M_c = (4ql/3)z_1 - q \cdot z_1 \cdot z_1/2 + M(z_1) = 0, \Rightarrow M(z_1) = qz_1^2/2 - 4qlz_1/3 - \text{квадратная парабола. Место экстремума: } dM(z_1)/dz_1 = -Q(z_1) = qz_1 - 4ql/3 = 0, \Rightarrow z_1 = 4l/3. \text{ Значения момента:}$$

$$M(0) = 0, M(4l/3) = -8ql^2/9,$$

$$M(2l) = -2ql^2/3.$$

Средний участок (рис. 3.25 г;  $l < z_2 < 2l$ ).

Рассмотрим равновесие правой части балки.

$$\Sigma Y = Q(z_2) + 5ql/3 - ql = 0, \Rightarrow Q(z_2) = -2ql/3 - \text{поперечная сила постоянна.}$$

$$\Sigma M_c = M(z_2) + (5ql/3)(z_2 - l) - ql \cdot z_2 = 0,$$

$$\Rightarrow M(z_2) = 5ql^2/3 - 2qlz_2/3 - \text{линейная функция с } M(l) = ql^2, M(2l) = ql^2/3.$$

Правый участок (рис. 3.25 д;  $0 < z_2 < l$ ).

$$\Sigma Y = Q(z_2) - ql = 0, \Rightarrow Q(z_2) = ql - \text{постоянна.}$$

$$\Sigma M_c = M(z_2) - ql \cdot z_2 = 0, \Rightarrow M(z_2) = qlz_2 - \text{линейна с } M(0) = 0, M(l) = ql^2.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$  показаны на рис. 3.25 е, ж.

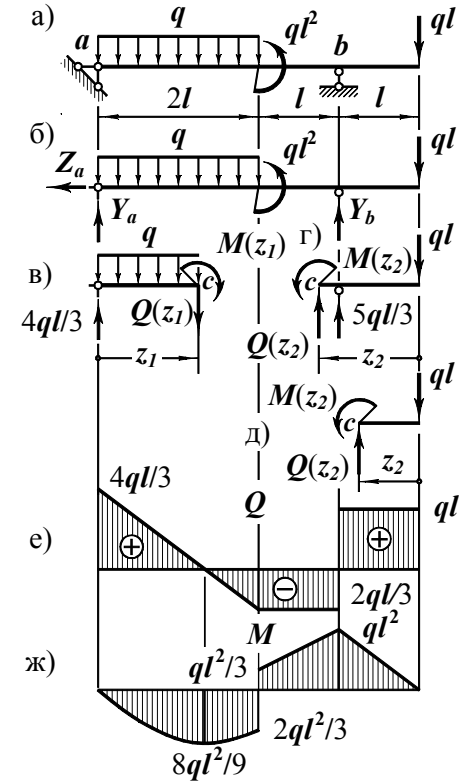


Рис. 3.25

### 3.4.3.3. Некоторые закономерности очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Вытекающие из условий равновесия дифференциальные зависимости (3.2) и (3.3) позволяют установить связь очертаний эпюр с видом нагрузки на балку и между собой.

1) На участке балки, свободном от распределенной нагрузки ( $q_y(z) \equiv 0$ ),

– поперечная сила постоянна ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z) \equiv 0, \Rightarrow Q_y(z) = const$ ),

– изгибающий момент линейно переменен ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z) = const, \Rightarrow M_x(z)$  – линейная функция).

2) На участке балки, подверженном равномерно распределенной нагрузке ( $q_y(z) = const$ ),

– поперечная сила линейно переменна ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z) = const, \Rightarrow Q_y(z)$  – линейная функция),

– изгибающий момент описывается квадратной параболой ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z)$  – линейная функция,  $\Rightarrow M_x(z)$  – квадратная парабола).

3) На участке балки, подверженном распределенной нагрузке линейно переменной интенсивности ( $q_y(z)$  – линейна),

– поперечная сила описывается квадратной параболой ( $dQ_y(z)/dz = -q_y(z)$  – линейна,  $\Rightarrow Q_y(z)$  – квадратная парабола),

– изгибающий момент изменяется по кубической параболе ( $dM_x(z)/dz = -Q_y(z)$  – квадратная парабола,  $\Rightarrow M_x(z)$  – кубическая).

4) На участке балки, подверженном распределенной нагрузке,

– при нагрузке, направленной вниз поперечная сила уменьшается, вверх – увеличивается (об этом свидетельствует знак “минус” в правой части равенства (3.2));

– изменение поперечной силы с точностью до знака равно площади эпюры распределенной нагрузки в пределах участка (из равенства (3.2)  $dQ_y(z) = -q_y(z)dz$ , что после интегрирования  $\int_a^b dQ_y(z) = -\int_a^b q_y(z)dz$  и учета геометрического смысла определенного интеграла показывает:  $Q_y(b) - Q_y(a) = -A_q|_a^b$ , где  $A_q|_a^b$  – площадь эпюры  $q_y(z)$  на участке  $ab$ ).

– на эпюре изгибающих моментов кривая выпукла в сторону действия нагрузки (из равенств (3.2) и (3.3)  $d^2M_x(z)/dz^2 = -dQ_y(z)/dz = q_y(z)$ : если  $q_y(z) > 0$  – вниз, то  $d^2M_x(z)/dz^2 > 0$  – кривая выпукла вниз, при  $q_y(z) < 0$  – вверх  $d^2M_x(z)/dz^2 < 0$  – выпуклость вверх).

5) Изменение изгибающего момента с точностью до знака равно площади эпюры поперечной силы в пределах участка (из равенства (3.3)  $dM_x(z) = -Q_y(z)dz$ , что после интегрирования  $\int_a^b dM_x(z) = -\int_a^b Q_y(z)dz$  приводит к  $M_x(b) - M_x(a) = -A_Q|_a^b$ , где  $A_Q|_a^b$  – площадь эпюры  $Q_y(z)$  на участке  $ab$ ).

6) В том сечении, где поперечная сила обращается в нуль, изгибающий момент принимает экстремальное значение (это утверждение непосредственно вытекает из равенства (3.3)).

7) В месте действия на балку внешней сосредоточенной силы поперечная сила изменяется скачком; величина скачка равна величине силы (из рис. 3.26 а видно, что

$Q_{y, k} + F - Q_{y, k+1} = 0, \Rightarrow Q_{y, k+1} = Q_{y, k} + F$ ).

8) В месте действия на балку сосредоточенного внешнего момента изгибающий момент изменяется скачком; величина скачка равна величине момента (из рис. 3.26б следует:

$$M_{x, k} + M - M_{x, k+1} = 0, \Rightarrow M_{x, k+1} = M_{x, k} + M).$$

Знание этих закономерностей предоставляет возможности, с одной стороны, использовать их для контроля правильности построения эпюр, и с другой, уменьшать объемы вычислительных и графических действий при построении эпюр  $Q$  и  $M$ .

### 3.4.4. Внутренние силовые факторы в плоских системах

Систему будем называть **плоской** (рис. 3.27), если

– существует плоскость, являющаяся главной для всех стержней конструкции;

– внешняя нагрузка лежит в этой плоскости.

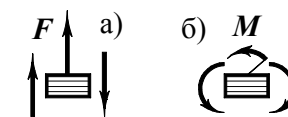


Рис. 3.26

Поскольку внешняя нагрузка образует плоскую произвольную систему сил, отличными от нуля в поперечных сечениях могут быть лишь три внутренних силовых фактора – продольная, поперечная силы и изгибающий момент, лежащие в плоскости системы.

Для построения эпюр в плоских системах достаточно введенных выше правил. Однако из-за геометрической специфики плоских систем к упомянутым правилам нужны дополнительные рекомендации.

При определении знака поперечной силы в вертикальных и наклонных стержнях следует повернуть рисунок (в любую сторону) так, чтобы рассматриваемый стержень стал горизонтальным.

На эпюре изгибающих моментов ординаты необходимо откладывать со стороны растянутых волокон<sup>1</sup>.

Рассмотрим пример.

**Пример 3.14.** Построим эпюры внутренних силовых факторов в плоской раме, изображенной на рис. 3.28а.

Способ закрепления рамы освобождает от необходимости определения опорных реакций.

На раме два участка.

Горизонтальный участок (рис. 3.28 б;  $0 < z < 3l$ ).

Проведем сечение, отбросим правую часть, заменив ее действие положительными  $N_1(z)$ ,  $Q_1(z)$ , а также моментом  $M_1(z)$ , растягивающим верхние волокна.

Запишем и решим уравнения равновесия.

$\Sigma Z = N_1(z) = 0$ . Продольной силы в сечениях горизонтального участка нет.

$\Sigma Y = qz + Q_1(z) = 0, \Rightarrow Q_1(z) = -qz$  – поперечная сила линейно переменна.  $Q_1(0) = 0, Q_1(3l) = -3ql$ .

$\Sigma M_c = q \cdot z \cdot z/2 - M_1(z) = 0, \Rightarrow M_1 = qz^2/2$ . Изгибающий момент описывается квадратной параболой с  $M_1(0) = 0, M_1(3l) = 4,5ql^2$ ; экстремум при  $z = 0$  (здесь  $Q_1(z) = 0$ ).

Вертикальный участок (рис. 3.28 в;  $0 < y < 2l$ ).

Рассечем вертикальный стержень поперечной плоскостью и отбросим нижнюю его часть. Действие ее на оставленную часть заменим силами: положительными  $N_2(y)$ ,  $Q_2(y)$  и моментом  $M_2(y)$ , растягивающим правые волокна.

Из условий равновесия находим:

$\Sigma Y = q \cdot 3l + N_2(y) = 0, \Rightarrow$

$N_2(y) = -3ql$  – продольная сила

в сечениях вертикального участка постоянно отрицательна, стержень сжат.

$\Sigma Z = 4ql - Q_2(y) = 0, \Rightarrow Q_2(y) = 4ql$  – поперечная сила также постоянно положительна.

$\Sigma M_c = q \cdot 3l \cdot 3l/2 - 4ql \cdot y - M_2(y) = 0, \Rightarrow M_2(y) = 4,5ql^2 - 4qly$  – линейно переменный с  $M_2(0) = 4,5ql^2$  (растянуты правые волокна) и  $M_2(2l) = -3,5ql^2$  (растянуты левые волокна).

Эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  изображены на рис. 3.28 г, д, е.

Плоские стержневые конструкции более многообразны чем балки. Они могут

- содержать криволинейные стержни;
- иметь замкнутые контуры;
- быть многоопорными и т.д.

Тем не менее, если конструкция статически определима, метод сечений позволяет найти опорные реакции, а затем величины и направления внутренних силовых факторов и, следовательно, построить их эпюры.

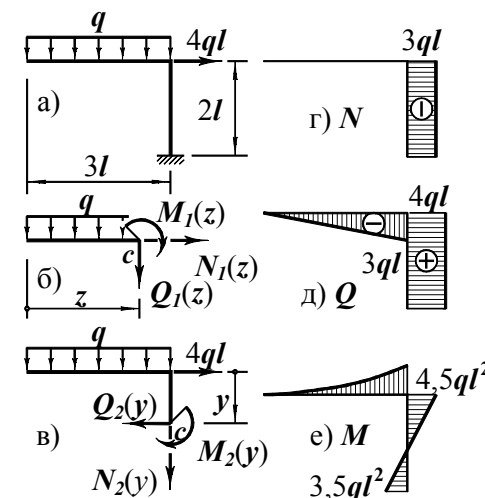


Рис. 3.28

<sup>1</sup> Если опираться на правило знаков, сформулированное для балок, знак момента будет зависеть от того, в какую сторону повернут рисунок – по или против хода часовой стрелки. Очертание же эпюры будет в обоих случаях одинаковым. Во избежание такой неоднозначности и введена иная (равноценная прежней) рекомендация. Естественно, знак на эпюре изгибающих моментов ставить не следует. Это правило построения эпюр изгибающих моментов можно использовать и в балках.



### 3.4.5. Внутренние силовые факторы в общем случае

К общему случаю отнесем такие конструкции и нагрузки, которые не вписываются в рассмотренные выше частные схемы:

- либо у стержня или стержневой системы нет геометрической главной плоскости,
- либо внешние силы образуют пространственную систему,
- либо, наконец, при наличии главной плоскости нагрузка не лежит в ней.

В общем случае внутренние силы в сечении приводятся к шести внутренним силовым факторам.

Ограничимся конструкциями, стержни которых имеют по две главных плоскости. Более того, будем считать, что главные плоскости параллельны координатным плоскостям.

В общем случае будем пользоваться введенными выше правилами знаков, но с дополнением: *при определении знака поперечной силы будем смотреть против оси, перпендикулярной строящейся эпюре*<sup>1</sup>.

**Пример 3.15.** У стержневой рамы, изображенной на рис. 3.29 а, главные плоскости параллельны координатным плоскостям (рис. 3.29 б): у стержня длиной  $l$  плоскостям  $xy$  и  $zx$ , а длиной  $2l$  –  $yz$  и  $zx$ . Построим эпюры внутренних силовых факторов от показанной нагрузки.

Рама закреплена. Опорные реакции можно не определять.

На раме два участка.

Первый участок (рис. 3.29 в;  $0 < x < l$ ).

Описанные ниже действия – приложение метода сечений к первому участку рассматриваемой конструкции.

При выборе положительных направлений сил, заменяющих действие отброшенной части приняты:

- $N_1(x)$  – растягивающей;
- $Q_{1y}(x)$ , приложенная слева, – вверх (при взгляде против оси  $z$ );
- $Q_{1z}(x)$ , также приложенная слева, – тоже вверх (при взгляде против оси  $y$ );

<sup>1</sup> Если это не обусловить, возможно противоречие в установлении знака поперечной силы.

Крутящий момент  $M_{1x}(x)$  направлен против хода часовой стрелки (смотреть со стороны отброшенной части);

Направления изгибающих моментов  $M_{1y}(x)$  и  $M_{1z}(x)$  выбраны произвольно.

Ориентируясь на главную координатную систему, составим и решим уравнения равновесия.

$$\Sigma X = N_1(x) = 0. \text{ Продольной силы на первом участке нет.}$$

$\Sigma Y = Q_{1y}(x) - 2F = 0, \Rightarrow Q_{1y}(x) = 2F.$  Сила постоянна, направлена так, как показано на рисунке.

$\Sigma Z = Q_{1z}(x) + F = 0, \Rightarrow Q_{1z}(x) = -F.$  Сила постоянна, направлена в сторону, противоположную показанной на рисунке.

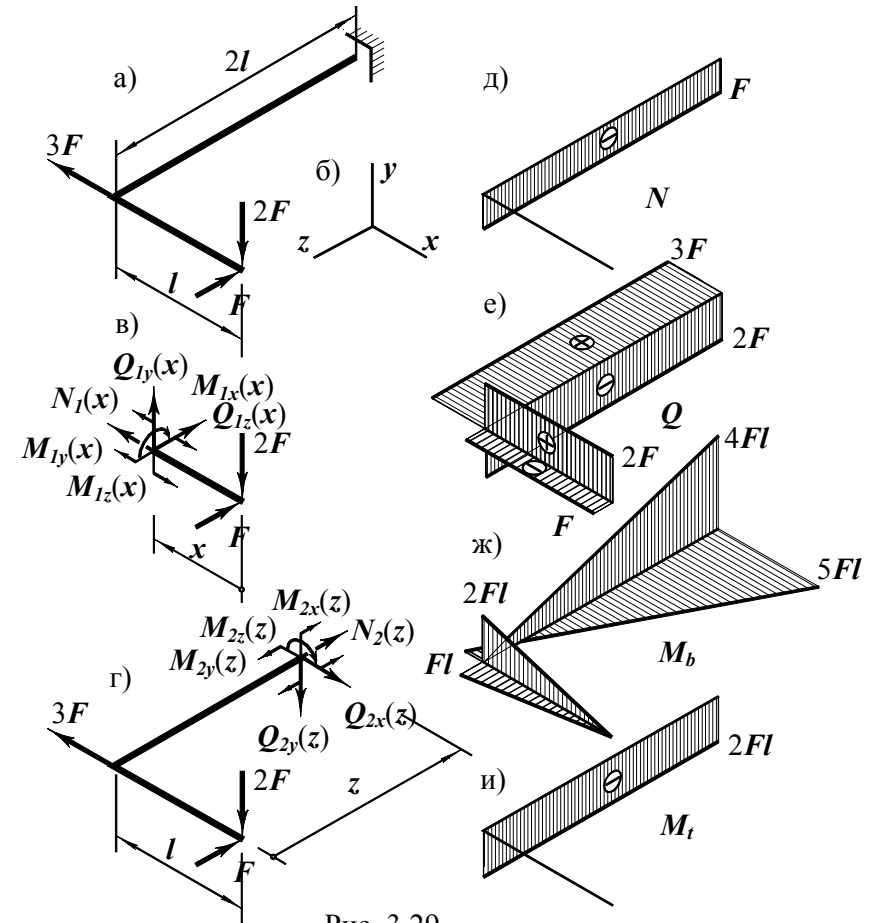


Рис. 3.29

$\Sigma M_x = M_{I_x}(x) = 0$ . Кручение на первом участке отсутствует.

$\Sigma M_y = M_{I_y}(x) - F \cdot x = 0, \Rightarrow M_{I_y}(x) = Fx$ . Момент линейно переменен с  $M_{I_y}(0) = 0$  и  $M_{I_y}(l) = Fl$ ; растянуты левые волокна.

$\Sigma M_z = M_{I_z}(x) - 2F \cdot x = 0, \Rightarrow M_{I_z}(x) = 2Fx$ . Момент также линейно переменен:  $M_{I_z}(0) = 0, M_{I_z}(l) = 2Fl$ ; растянуты верхние волокна.

Второй участок (рис. 3.29 г;  $0 < z < 2l$ ).

Используя метод сечений для второго участка, из условий равновесия отсеченной части находим:

$\Sigma X = Q_{2x}(z) - 3F = 0, \Rightarrow Q_{2x}(z) = 3F$ . Сила постоянна, направлена так, как показано на рисунке.

$\Sigma Y = Q_{2y}(z) + 2F = 0, \Rightarrow Q_{2y}(z) = -2F$ . Сила постоянна, направлена в сторону, противоположную показанной на рисунке.

$\Sigma Z = N_2(z) + F = 0, \Rightarrow N_2(z) = -F$ . Сила постоянна, участок сжат.

$\Sigma M_x = M_{2x}(z) - 2F \cdot z = 0, \Rightarrow M_{2x}(z) = 2Fz$ . Изгибающий момент – линейная функция со значениями  $M_{2x}(0) = 0, M_{2x}(2l) = 4Fl$ ; растянуты верхние волокна.

$\Sigma M_y = M_{2y}(z) + Fl - 3F \cdot z = 0, \Rightarrow M_{2y}(z) = 3Fz - Fl$ . Момент также линейно переменен. Его значения и направления:  $M_{2y}(0) = -Fl$  – растянуты левые (дальние) волокна,  $M_{2y}(2l) = 5Fl$ , растянуты правые (ближние) волокна.

$\Sigma M_z = M_{2z}(z) + 2F \cdot l = 0, \Rightarrow M_{2z}(z) = -2Fl$ . Крутящий момент постоянен, направлен в сторону, противоположную показанной на рисунке.

Эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 3.29 д ... и. На нем  $M_b$  – изгибающие<sup>1</sup> моменты;  $M_t$  – крутящие<sup>2</sup> моменты.

Построение эпюр внутренних силовых факторов – средство анализа нагруженности конструкции. В подавляющем большинстве задач сопротивления материалов приходится строить эпюры. Поэтому очень важно освоить методы и развить устойчивые навыки решения подобных задач.

<sup>1</sup> Индекс от англ. *bend* – изгиб.

<sup>2</sup> Индекс от англ. *torsion* – кручение.

## 4. Плоское напряженное состояние

В предыдущем разделе введены понятия напряжений и напряженного состояния в точке. Отмечено также, что напряжения зависят от ориентации площадки, проведенной через точку. Исследуем эти зависимости.

### 4.1. Постановка задачи

Из стержня, находящегося в равновесии при действии внешней нагрузки, двумя поперечными плоскостями (рис. 4.1 а) вырежем элементарный диск (рис. 4.1 б). Он подвержен силам со стороны отброшенных частей стержня. Из этого диска двумя парами продольных плоскостей выделим элементарный параллелепипед (рис. 4.1 в) с гранями, перпендикулярными осям главной координатной системы. Действие отброшенных частей на него представим нормальными и касательными напряжениями (рис. 4.1 в). Будем считать, что напряжения по граням распределены равномерно.

Ограничимся частным случаем, когда на двух параллельных гранях напряжений нет (на рис. 4.1 в эти грани перпендикулярны оси  $x$ ).

Задачу сформулируем так. Пусть известны нормальные и касательные напряжения  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  и  $\tau_{zy}$ . Рассмотрим совокупность площадок, проходящих через рассматриваемую точку и параллельных оси  $x$ . В разных площадках напряжения будут разными. Установим

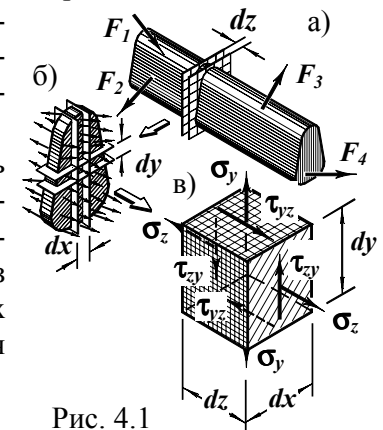


Рис. 4.1

1. Как зависят напряжения от ориентации площадки?
2. В какой площадке нормальное напряжение достигает наибольшего значения и каково это значение?
3. В какой площадке касательное напряжение достигает наибольшего значения? Какова величина максимального касательного напряжения?

Поскольку в процессе решения поставленной задачи придется пользоваться формальным математическим аппаратом, введем правило знаков для напряжений.

*Напряжение будем считать*

- положительным, если
  - в площадке с положительной внешней нормалью его направление совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси
  - или в площадке с отрицательной внешней нормалью его направление противоположно положительному направлению соответствующей координатной оси;
- отрицательным, если
  - в площадке с положительной внешней нормалью его направление противоположно положительному направлению соответствующей координатной оси;
  - или в площадке с отрицательной внешней нормалью его направление совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси.

При этом положительными направлениями координатных осей будем считать традиционные – вправо и вверх.

Например, касательное напряжение  $\tau_{zy}$  на правой площадке (рис. 4.2) положительно, так как

- действует в площадке с положительной внешней нормалью (*внешняя нормаль* направлена вправо),
- совпадает с положительным направлением координатной оси.

В соответствии с введенным правилом знаков направления всех напряжений, показанных на рис. 4.1 в и 4.2, положительны.

## 4.2. Теорема о парности касательных напряжений

Прежде чем переходить к решению поставленной выше задачи, докажем теорему.

Рассмотрим элементарный параллелепипед (рис. 4.1 в, 4.2). Он находится в равновесии. Приравняем нулю сумму моментов сил, приложенных к нему.

Поскольку напряжения по каждой грани распределены равномерно, равнодействующие нормальных напряжений проходят через центр элемента. Примем его в качестве моментной точки.

Правая грань:

- $\tau_{zy}$  – напряжение на ней;
- произведение  $dx dy$  – площадь грани;
- $\tau_{zy} dx dy$  – равнодействующая касательных напряжений;
- плечо ее относительно центра элемента равно  $dz/2$ ;
- момент – это произведение  $\tau_{zy} dx dy dz/2$ .

Равенство нулю суммы моментов:

$$\tau_{zy} dx dy dz/2 - \tau_{yz} dz dx dy/2 + \tau_{zy} dx dy dz/2 - \tau_{yz} dz dx dy/2 = 0.$$

Отсюда после сокращения на  $dx dy dz$  вытекает важное свойство –

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (4.1)$$

*Касательные напряжения, возникающие во взаимно перпендикулярных площадках, равны.*

Из условия равновесия ясно, что моменты напряжений  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$  должны быть направлены в разные стороны. Отсюда следует: *касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках направлены либо к линии пересечения граней, либо от нее.*

Формула (4.1) и есть математическое выражение теоремы о парности касательных напряжений.

## 4.3. Напряжения в наклонных площадках

Перейдем к решению поставленной выше задачи. Для ответа на первый вопрос вырежем из параллелепипеда (рис. 4.1 в, рис. 4.2) трехгранную призму (рис. 4.3) плоскостью, параллельной оси  $x$  и наклоненной к вертикальной грани под углом  $\alpha$ . Внешние силы, действующие на нее, представлены шестью напряжениями в соответствующих площадках.

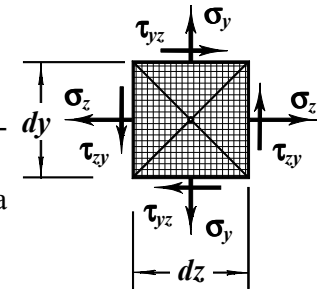


Рис. 4.2

Обозначим площадь вертикальной грани  $dxdy = dA$ . Тогда площади горизонтальной площадки  $dAtg\alpha$ , наклонной  $dA/cos\alpha$ .

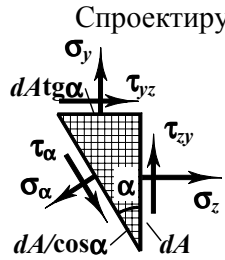


Рис. 4.3

Спроектируем приложенные к призме силы на направление  $\sigma_\alpha$ .

Проекция горизонтальной силы, действующей на вертикальную грань:

– она представлена напряжением  $\sigma_z$ , поэтому равнодействующая равна  $\sigma_z dA$ ;

– сила горизонтальна, угол между нею и направлением  $\sigma_\alpha$  равен  $\alpha$ ; проекция силы – это произведение  $\sigma_z dA \cos\alpha$ .

Рассуждая аналогично и учитывая направления сил и их проекций, получаем уравнение

$$\sigma_z dA \cos\alpha + \tau_{zy} dA \sin\alpha + \tau_{yz} dA \cos\alpha + \sigma_y dA \sin\alpha - \sigma_\alpha dA / \cos\alpha = 0.$$

Отсюда после несложных преобразований и использования свойства (4.1) приходим к зависимости

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha. \quad (4.2)$$

Спроектировав силы на направление  $\tau_\alpha$  и выполнив необходимые преобразования, получаем вторую формулу –

$$\tau_\alpha = ((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha) / 2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) показывают, как изменяются напряжения в зависимости от ориентации площадки.

Обобщая выполненный анализ, отметим, что при плоском напряженном состоянии шесть напряжений, действующих на гранях элементарной призмы, связаны тремя условиями равновесия. Следовательно, плоское напряженное состояние определяется тремя напряжениями. При этом положения исходных площадок, в которых действуют три заданных напряжения, могут быть любыми.

#### 4.4. Нормальные напряжения,

##### действующие во взаимно перпендикулярных площадках

Запишем выражение для нормальных напряжений, возникающих в площадке, наклоненной к вертикальной грани под углом  $(\alpha+90^\circ)$ , (рис. 4.4). Согласно формуле (4.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+90} &= \sigma_z \cos^2(\alpha+90) + \sigma_y \sin^2(\alpha+90) + \tau_{zy} \sin 2(\alpha+90) = \\ &= \sigma_z \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Суммируя  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_{\alpha+90}$ , получаем

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_z + \sigma_y. \quad (4.4)$$

Сумма нормальных напряжений, возникающих во взаимно перпендикулярных площадках, есть величина постоянная для данной точки тела.

Равенство (4.4) обнаруживает интересное и важное свойство нормальных напряжений в точке. Если рассмотреть всю совокупность взаимно перпендикулярных площадок в точке стержня (как бы поворачивать площадки, оставляя их перпендикулярными), нормальное напряжение в каждой из них с поворотом будет изменяться. Однако, если одно из них возрастет, другое на столько же уменьшится. А отсюда следует, что при достижении одним напряжением максимума, другое становится минимальным.

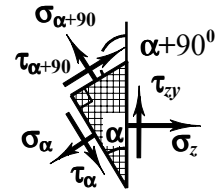


Рис. 4.4

#### 4.5. Главные площадки и главные напряжения

Обратимся ко второму вопросу задачи. Для отыскания площадок с наибольшими нормальными напряжениями продифференцируем  $\sigma_\alpha$  по  $\alpha$ . Согласно выражению (4.2)

$$\begin{aligned} d\sigma_\alpha/d\alpha &= -2\sigma_z \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha + 2\tau_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= 2((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha) / 2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha = 2\tau_\alpha. \end{aligned}$$

Производная нормального напряжения пропорциональна касательному напряжению. Отсюда вывод: нормальное напряжение достигает экстремума в той площадке, где касательное напряжение отсутствует.

Площадки, свободные от касательных напряжений, называются **главными площадками**.

Нормальные напряжения, действующие в главных площадках, носят название **главных напряжений**.

Пусть главные площадки наклонены к исходной вертикальной грани под углом  $\alpha_0$ . Тогда из условия отсутствия касательного напряжения (см. формулу (4.3))  $((\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha_0) / 2 + \tau_{zy} \cos 2\alpha_0 = 0$ .

$$\text{Отсюда} \quad \text{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy} / (\sigma_z - \sigma_y). \quad (4.5)$$

Равенству (4.5) удовлетворяют два угла  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ . Таким образом, полученная формула определяет положение двух взаимно перпендикулярных главных площадок (рис. 4.5).

Принимая во внимание

- наличие двух главных площадок,
- их перпендикулярность,
- экстремальность главных напряжений,
- постоянство суммы нормальных напряжений в перпендикулярных площадках при повороте параллелепипеда,

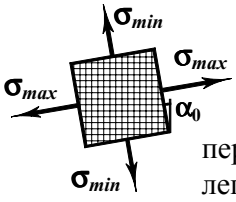


Рис. 4.5 приходим к выводу, что одно главное напряжение является максимальным, другое минимальным по сравнению с нормальными напряжениями, действующими во всевозможных площадках, проведенных через данную точку.

Величины главных напряжений можно найти по формуле (4.2), подставив в нее углы  $\alpha_0$ , найденные из равенства (4.5). Однако компактной равенства

$$\sigma_{max/min} = (\sigma_y + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2})/2, \quad (4.6)$$

получаемые из выражений (4.2), (4.4) и (4.5) подобно тому, как были выведены формулы (2.29).

Формулы (4.5), (4.2) или (4.6) позволяют найти положения главных площадок и величины главных напряжений, т.е. дают ответ на второй вопрос поставленной задачи.

**Пример 4.1.** В некоторой точке стержня определены напряжения, величины и направления которых показаны на рис. 4.6. Найдем положения главных площадок и величины главных напряжений.

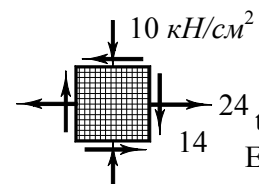


Рис. 4.6

Принимаем:  
 $\sigma_y = -10 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_z = 24 \text{ кН/см}^2$ ,  $\tau_{zy} = -14 \text{ кН/см}^2$ .  
 По формуле (4.5) находим:  
 $\text{tg}2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/(\sigma_z - \sigma_y) = 2(-14)/(24 - (-10)) = -0,824$ .  
 Ему отвечают  $\alpha_{01} = -19,7^\circ$  и  $\alpha_{02} = 70,3^\circ$  (рис. 4.7).

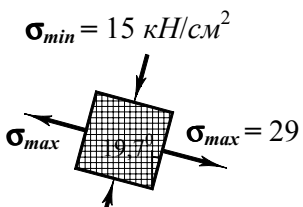


Рис. 4.7

По формуле (4.2):  
 $\sigma_{\alpha_{01}} = \sigma_z \cos^2 \alpha_{01} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{01} + \tau_{zy} \sin 2\alpha_{01}$   
 $= 24 \cos^2(-19,7^\circ) + (-10) \sin^2(-19,7^\circ) + (-14) \sin 2(-19,7^\circ) = 29 \text{ кН/см}^2$ .  
 $\sigma_{\alpha_{02}} = \sigma_z \cos^2 \alpha_{02} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{02} + \tau_{zy} \sin 2\alpha_{02}$   
 $= 24 \cos^2(70,3^\circ) + (-10) \sin^2(70,3^\circ) + (-14) \sin 2(70,3^\circ) = -15 \text{ кН/см}^2$ .  
 Итак,  $\sigma_{max} = 29 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{min} = -15 \text{ кН/см}^2$ .

## 4.6. Наибольшее касательное напряжение

В плане, аналогичном предыдущему, исследуем касательные напряжения – ответим на третий вопрос.

Найти положения площадок, в которых касательные напряжения принимают наибольшие значения, можно так же, как в разделе 4.5 – исследовать функцию (4.3) на экстремум. Однако для упрощения выкладок запишем выражение касательного напряжения в произвольной площадке, приняв в качестве исходных главные площадки и главные напряжения (рис. 4.8). Согласно формуле (4.3)

$$\tau_\beta = ((\sigma_{min} - \sigma_{max}) \sin 2\beta) / 2.$$

Отсюда видно, что *наибольшими касательными напряжениями становятся в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом  $\beta = \pm 45^\circ$ .*

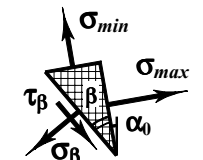


Рис. 4.8

Экстремальные значения касательного напряжения  $\tau_{max/min} = \pm(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ . Численно  $\tau_{max}$  и  $\tau_{min}$  равны, знаки разные. Первое понятно, ибо они действуют во взаимно перпендикулярных площадках и связаны свойством парности. Различие знаков создает видимость противоречия условию (4.1). Однако это противоречие кажущееся. Более строгие формулы требуют иной системы отсчета угловых координат, отражающей знак внешней нормали наклонной площадке. Не желая усложнять материал, здесь применен упрощенный вариант.

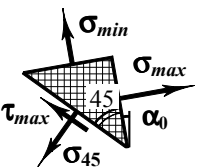


Рис. 4.9

Знак несет информацию о направлении напряжения. Установить его не составляет труда. Поскольку  $\sigma_{max} \geq \sigma_{min}$ , по закону равновесия напряжение  $\tau_{max}$  направлено в сторону, противоположную максимальному нормальному напряжению (рис. 4.9). Поэтому формулу максимального касательного напряжения запишем в виде

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2, \quad (4.7)$$

а направление будем определять по условию равновесия.

Формула (4.7) завершает анализ плоского напряженного состояния в рамках поставленных выше вопросов. Теперь, определив напряжения в каких-либо двух площадках, можно найти положение главных площадок и величины  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  и то же самое  $\tau_{max}$ . Эти сведения необходимы для оценки прочности материала.

## 4.7. Виды напряженного состояния

В теории напряжений доказано, что в любой точке твердого тела всегда можно найти три взаимно перпендикулярных главных площадки и, следовательно, три главных напряжения. Их, как правило, обозначают  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Номера присваивают так, чтобы в алгебраическом толковании выполнялось соотношение  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

В зависимости от числа ненулевых главных напряжений напряженные состояния подразделяют на три вида.

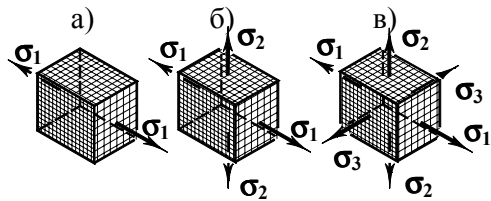


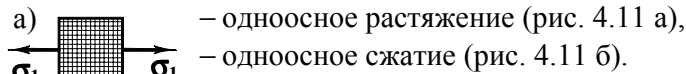
Рис. 4.10

**Линейное** (его еще называют **одноосным**), когда лишь одно главное напряжение отлично от нуля (рис. 4.10 а).

**Плоское (двухосное)** – два главных напряжения не равны нулю (рис. 4.10 б).

**Объемное (трехосное)** – все главные напряжения ненулевые (рис. 4.10 в).

Разновидности линейного напряженного состояния:



В плоском напряженном состоянии различают

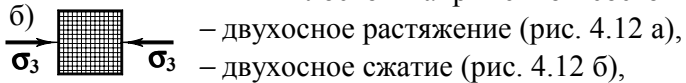


Рис. 4.11 – смешанное напряженное состояние (рис. 4.12 в).

Число сочетаний знаков главных напряжений при объемном напряженном состоянии значительно больше чем при линейном и плоском. Вероятно, поэтому все возможные разновидности не получили индивидуальных названий.

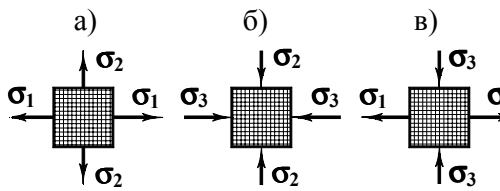


Рис. 4.12

Выше изложены основы теории сравнительно простого – плоского напряженного состояния, достаточного для оценки прочности материалов стержневых элементов конструкций.

## 5. Растяжение и сжатие

Простейшими видами нагружения стержня являются его осевое растяжение или сжатие. Это происходит, если линии действия сил совпадают с осью стержня (рис. 3.10). Познакомимся с

- результатами эксперимента,
- методами теоретического прогнозирования и
- практическими расчетами стержневых элементов конструкций на прочность и жесткость при растяжении или сжатии.

### 5.1. Испытания материалов на растяжение.

#### Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Испытания на растяжение являются одними из наиболее простых и распространенных. С помощью лабораторных исследований удастся изучить поведение материалов и получить их механические характеристики, необходимые для расчетов конструкций.

Испытания проводят в соответствии с ГОСТами, регламентирующими формы и размеры образцов, режимы нагружения, перечень определяемых характеристик и т.п.

При испытаниях на растяжение применяют специальные образцы (рис. 5.1). Размеры образцов зависят от возможности их изготовления, а также от мощности и конструкции испытательной машины. На концах образцов имеются головки для крепления в захватах машины. Средняя часть, как правило, круглого или прямоугольного сечения. Диаметр образцов с круглым сечением (рис. 5.1 а) обычно принимают 5 ... 10 мм. Посередине образца выделяют рабочую

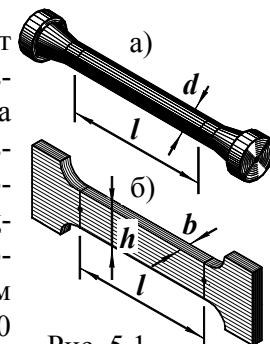


Рис. 5.1

часть длиной  $l = 10d$  (так называемые десятикратные образцы) или  $l = 5d$  (пятикратные). У образцов прямоугольного сечения (рис. 5.1 б) длина рабочей части принимается  $l = 11,3\sqrt{bh}$  у десятикратных образцов и  $l = 5,65\sqrt{bh}$  у пятикратных.

Испытания на растяжение производят на специальных машинах. По мере роста растягивающей силы длина образца увеличивается, поперечные размеры уменьшаются. Испытательные машины обычно снабжены прибором для автоматической записи зависимости удлинения  $\Delta l$  от усилия  $F$ . Познакомимся с диаграммами растяжения некоторых материалов.

Наиболее характерной и удобной для первого знакомства является диаграмма, получаемая при испытании малоуглеродистой стали (рис. 5.2). На изображенной кривой условно можно выделить четыре участка.

Участок  $Oa$  практически прямой. Удлинение образца растет пропорционально силе.

Второй участок ( $bc$ ) свидетельствует о том, что образец удлиняется без заметного изменения силы. Горизонтальный отрезок диаграммы называется *площадкой текучести*.

За площадкой текучести следует *участок упрочнения* ( $cd$ ). Удлинение образца вновь сопровождается ростом нагрузки, но более медленным, чем в начале нагружения.

В стадии упрочнения постепенно намечается место разрыва – образуется местное сужение, называемое *шейкой* (рис. 5.3). По мере образования шейки рост силы замедляется, а затем удлинение образца происходит при уменьшении силы (участок  $de$  на рис. 5.2).

Диаграмма растяжения, построенная в координатах  $F-\Delta l$ , зависит от размеров образца. Чтобы получить характеристики *материала*, а не образца, диаграмму перестраивают в осях  $\sigma-\epsilon$ , где  $\sigma$  – напряжения в поперечном сечении;  $\epsilon$  – *относительное удлинение* (рис. 5.4). При этом предполагают, что напряжения по сечению распределены равномерно, т.е.  $\sigma = F/A$  ( $A$  – первоначальная площадь поперечного сечения); относительное

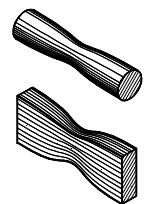


Рис. 5.3

удлинение также равномерно по длине рабочей части:  $\epsilon = \Delta l/l$ . Построенная в координатах  $\sigma-\epsilon$  диаграмма носит название *диаграммы условных напряжений при растяжении*.

Условность напряжений объясняется тем, что силу делят на *первоначальную* площадь. Если силу делить на *действительную* площадь, то отношение даст *истинные напряжения*.

Диаграммы условных и истинных напряжений на участке  $Oabcd$  практически совпадают. Отличие становится существенным в процессе формирования шейки. Истинные напряжения быстро растут (кривая  $d-e_1$  на рис. 5.4).

При испытании на растяжение определяют три группы механических характеристик материала.

Первая группа. Ординаты точек  $a$ ,  $b$  и  $d$  на диаграмме условных напряжений отражают способность материала сопротивляться нагрузке и поэтому называются *характеристиками прочности*. Их определения:

$\sigma_{pr}$  – *предел пропорциональности*; до него напряжения и деформации пропорциональны<sup>1</sup>;

$\sigma_{yl}$  – *предел текучести* – напряжение, при котором деформации растут без изменения нагрузки<sup>2</sup>;

$\sigma_u$  – *предел прочности* – условное напряжение, соответствующее *наибольшей растягивающей силе*<sup>3</sup>.

Вторая группа механических характеристик – *характеристики пластичности*<sup>4</sup>. В нее входят

$$\delta_r = ((l_t - l)/l)100\% \quad (5.1)$$

– *относительное остаточное удлинение при разрыве*,

$$\psi_r = ((A - A_t)/A)100\% \quad (5.2)$$

– *относительное остаточное сужение при разрыве*. Здесь

<sup>1</sup> Индекс от англ. *proportional* – пропорциональный.

<sup>2</sup> Индекс от англ. *yeld* – текучесть.

<sup>3</sup> Индекс от англ. *ultimate* – предельный.

<sup>4</sup> **Пластичность** – способность деформироваться в процессе нагружения.

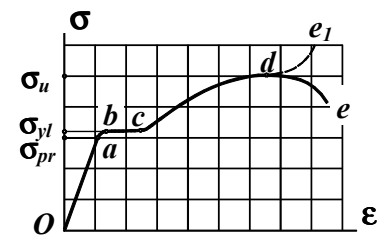


Рис. 5.4

$l$  – начальная длина рабочей части образца;  
 $A$  – начальная площадь поперечного сечения;  
 $l_r$  – длина рабочей части после разрыва;  
 $A_r$  – площадь шейки.

Чем больше  $\delta_r$  и  $\psi_r$ , тем пластичней материал. При малых значениях  $\delta_r$  и  $\psi_r$  материал считают *хрупким*<sup>1</sup>.

Площадь диаграммы условных напряжений характеризует способность материала сопротивляться ударным нагрузкам. Количественной мерой этой способности является *удельная работа, затраченная на разрушение*, измеряемая в Дж/м<sup>3</sup>:

$$w = W/V = \Omega mn. \quad (5.3)$$

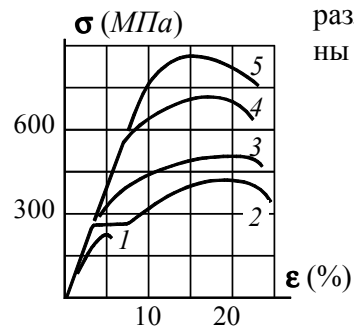
В формуле (5.3)

$W$  – работа, затраченная на разрушение образца;  
 $V$  – объем рабочей части;  
 $\Omega$  – площадь диаграммы;  
 $m$  и  $n$  – масштабы по осям абсцисс и ординат.

Эти *энергетические характеристики* составляет третью группу.

## 5.2. Сравнение диаграмм растяжения различных материалов

Диаграммы растяжения различных материалов, естественно, различны. На рис. 5.5. для сравнения показаны диаграммы растяжения



различны. На рис. 5.5. для сравнения показаны диаграммы растяжения

- 1 – серого чугуна;
- 2 – малоуглеродистой стали;
- 3 – алюминиевого сплава;
- 4 – легированной стали;
- 5 – титанового сплава.

Диаграммы растяжения отличаются

- размерами по вертикали;
- протяженностью по горизонтали;

Рис. 5.5

– наличием (отсутствием) площадки текучести.

Чем выше диаграмма, тем прочней материал – выше способность сопротивляться нагрузкам. Характеристики прочности зависят не только от материала или его марки, но и от технологии приготовления, скорости нагружения, температуры и других условий.

Протяженность по горизонтали характеризует пластические свойства материала. По этому показателю материалы делят на *пластичные* (некоторые стали, медь, алюминий, титановые сплавы и др.) и *хрупкие* (чугун, бетон, кирпич, естественные камни и т.п.). Заметим, что деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, поскольку способность деформироваться, так же как и прочность, зависит от технологии приготовления, температуры, скорости нагружения, а также от вида напряженного состояния. Материалы, пластичные в одних условиях, в других могут вести себя как хрупкие, и наоборот. Поэтому правильнее говорить не о пластичных и хрупких *материалах*, а о пластичном или хрупком *состоянии* материала.

У одних материалов на диаграмме имеется площадка текучести (малоуглеродистые стали, некоторые латуни, отожженные марганцовистые и алюминиевые бронзы). Для них термин "предел текучести" является вполне определенным. У других же (а таких большинство) площадки текучести нет. Понятия текучести и предела текучести для них условны.

Если на диаграмме растяжения пластичного материала нет площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести* – напряжения, при котором пластическая деформация достигает 0,2 % (иногда 0,5 %). Его обозначают  $\sigma_{0.2}$  (или  $\sigma_{0.5}$ ) в зависимости от величины допуска (термин "пластическая деформация" пояснен в разд. 5.5).

## 5.3. Испытания на сжатие

Этот вид испытаний также относится к простейшим и поэтому к наиболее распространенным. При испытании на сжатие используются короткие образцы в форме цилиндров (рис. 5.6 а – в основном для металлов) или кубиков (рис. 5.6 б, для бетона, древесины и т.п.), иногда параллелепипедов. При большой высоте образца его сжатие обычно сопровождается искривлением, что искажает результаты испытаний.

<sup>1</sup> **Хрупкость** – противоположность пластичности – разрыв при малом удлинении.



Испытания производят на специальных прессах. По мере роста сжимающей силы продольный размер образца уменьшается, поперечные – увеличиваются. Поведение и свойства материала характеризуются диаграммой сжатия (рис. 5.7).

Пластичные и хрупкие материалы при сжатии ведут себя по-разному.

Диаграмма сжатия малоуглеродистой стали показана на рис. 5.7а. На ней, как и при растяжении, обнаруживается прямолинейный начальный участок, площадка текучести и участок упрочнения. Довести образец до разрушения и, следовательно, найти предел прочности при сжатии не удастся из-за роста поперечных размеров образца. Цилиндр сминается в диск. Вследствие трения между плитами пресса и образцом, он принимает бочкообразную форму.

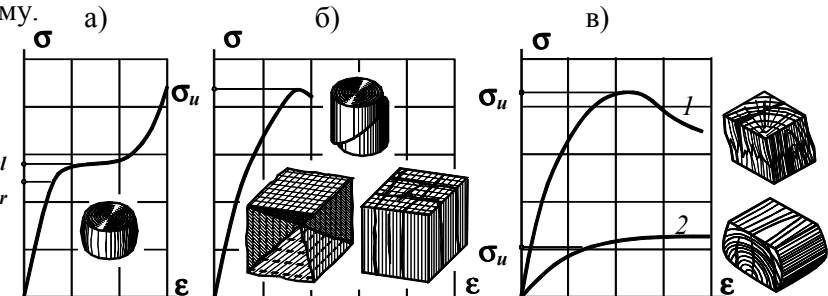


Рис. 5.7

Пределы пропорциональности и пределы текучести при растяжении и сжатии близки. Близки и очертания диаграмм, включая значительную часть участков упрочнения. Обычно считают, что малоуглеродистая сталь одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

Иначе ведут себя образцы из хрупких материалов (рис. 5.7 б). Диаграммы сжатия их имеют качественно такой же вид, как и при растяжении. Но предел прочности при сжатии значительно выше нежели при растяжении. Больше и деформации в момент разрушения.

Причины и вид разрушения образцов зависят от материала и условий испытания. Так, чугунный образец скалывается по плоскости, наклоненной к оси под углом, близким к 45°. Это дает основание считать, что причина разрушения – касательные напряжения.

Из-за трения на торцах разрушение бетонного кубика обычно сопровождается выкалыванием пирамидовидных частей. Но, если трение устранить (например, смазать торцы парафином), при разрушении образуются продольные трещины.

Представителем анизотропного материала является древесина. При некотором качественном сходстве диаграмм сжатия вдоль волокон (линия 1 на рис. 5.7 в) и поперек (линия 2) пределы прочности разнятся в 10–20 раз.

Испытания на растяжение и сжатие позволяют, с одной стороны, сформировать качественное представление о реакции материала на нагрузку и, с другой, получить количественные механические характеристики, необходимые для оценки степени опасности напряженных состояний элементов конструкций.

Характеристики прочности и пластичности некоторых материалов, применяемых в строительстве, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

**Механические характеристики некоторых строительных материалов**

Материал	Предел прочности МПа		Предел текуч. $\sigma_{yl}$ ( $\sigma_{02}$ ), МПа	Отн. ост. удл. $\delta_r$ %	Отн. поп. суж. $\psi_r$ %
	при растяж. $\sigma_{ut}$	при сжатии $\sigma_{uc}$			
Сталь:					
малоуглеродистая	345...390	–	215...255	23...27	60...70
низколегированная	430...520	–	265...370	21	–
Чугун серый СЧ	120...380	50...140	–	1...1,4	–
Алюминиевые сплавы	130...465	–	60...350	8...18	11...65
Бетон	0,14...2,5	0,95...43	–	–	–
Кирпич	0,7...3	7,5...100	–	–	–
Древесина сосны и ели вдоль волокон	25...34	20...33	–	–	–
Стекло	30...90	500...2000	–	–	–
СВАМ:					
1:1	480	420	–	1,4...2	–
10:1	900	–	–	–	–

Таблица иллюстрирует, с одной стороны, насколько разнятся они у разных материалов, и с другой, довольно большой разброс даже у одних и тех же материалов, но имеющих разные марки. На прочность и пластичность материала влияют многие факторы:

- химический состав;
- технология приготовления;
- возраст, влажность (бетон, древесина)

и ряд других. Некоторые из обстоятельств будут обсуждены ниже.

#### 5.4. Закон Гука при одноосном напряженном состоянии

Характерной особенностью диаграмм растяжения и сжатия является то, что исходящие из начала координат участки близки к прямым. На основании этого английский ученый Р.Гук<sup>1</sup> сформулировал закон, согласно которому

$$\epsilon = \sigma/E \tag{5.4}$$

– *относительное удлинение пропорционально нормальному напряжению.*

Фигурирующий в равенстве (5.4)  $E$  называется *модулем упругости* (его еще называют *модулем продольной упругости, модулем упругости 1-го рода, модулем Юнга*<sup>2</sup>). Размерность модуля упругости  $H/m^2$  (и подобные ему). Из равенства (5.4.) следует, что численное значение модуля упругости равно тангенсу угла наклона начального участка диаграммы условных напряжений к оси абсцисс.

Замеры и сопоставления поперечных и продольных деформаций при испытаниях на растяжение и сжатие показали, что *их отношение остается постоянным:*

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z \tag{5.5}$$

<sup>1</sup> Роберт Гук (1635–1703) – английский естествоиспытатель, инженер. В 1676 году сформулировал закон “Ut tensio, sic vis” – “Каково удлинение, такова сила”, чем установил два новых свойства тел: пропорциональность между нагрузкой и деформацией и упругость. Почти одновременно с Гуком закон пропорциональности обнаружил французский физик Мариотт (1680 г.), по-видимому, не знавший о работах Р.Гука.

<sup>2</sup> Томас Юнг (1773–1829) английский ученый. В 1800 г. ввел в механику понятие модуля упругости.

Множитель  $\nu$  в этой формуле называется *коэффициентом Пуассона*<sup>1</sup>. Коэффициент  $\nu$  положителен, размерности не имеет. Отрицательный знак в правой части согласовывает направления деформаций: при положительной продольной деформации  $\epsilon_z$  (удлинение) поперечные –  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$ , отрицательны (сужение), и наоборот.

Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  являются физико-механическими константами материала. Их величины приводятся в справочной и нормативной литературе (см. также табл. 5.2).

Константы  $E$  и  $\nu$  также как и характеристики прочности и пластичности зависят от химического состава, технологии изготовления, условий, в которых находится материал. И все-таки они более стабильны.

Из приведенных выше диаграмм ясно, что *закон Гука* (5.4) справедлив при *напряжениях, не превышающих предел пропорциональности* (на прямолинейном начальном участке). Этим же пределом ограничивается справедливость равенств (5.5).

Для некоторых хрупких материалов (например, для чугуна) из-за малости деформаций соотношения (5.4) и (5.5) считают применимыми до предела прочности.

Таблица 5.2.

**Модули упругости  $E$  и коэффициенты Пуассона  $\nu$  некоторых строительных материалов**

Материал	$E, ГПа$	$\nu$
Сталь углеродистая	200...210	0,25...0,33
Чугун серый СЧ	120...160	0,23...0,27
Алюминиевые сплавы	70...75	0,25...0,35
Бетон	5...40	0,15...0,20
Кирпичная кладка	0,1...8	0,2...0,3
Древесина сосны и ели		
вдоль волокон	8...12	0,4...0,5
поперек волокон	0,3...0,5	0,01...0,03
Резина	0,007...0,008	0,4...0,5
Пробка	–	0
Стекло	50...60	0,24...0,27
СВАМ:		
1:1	35	0,13
10:1	60	–

<sup>1</sup> Симеон Дени Пуассон (1781–1840) – французский ученый, впервые обративший внимание на постоянство отношения поперечных и продольных деформаций.

## 5.5. Испытания на растяжение и сжатие при сложных программах нагружения

В описанных выше испытаниях нагружение образца производилось монотонно до разрушения. Естественно, подобные испытания не могли обнаружить свойства материалов при немонотонных программах нагружения. Учитывая, что нагрузки на строительные конструкции могут возрастать и уменьшаться, действовать неоднократно и изменяться во времени самым произвольным образом, нужно изучить закономерности поведения материалов в подобных условиях.

Познакомимся с результатами простейших испытаний при немонотонных нагрузках.

5.5.1. Если образец из малоуглеродистой стали нагрузить, не

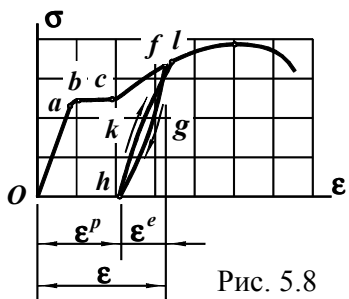


Рис. 5.8

доводя до разрушения (точка  $f$  на рис. 5.8), и затем снять нагрузку, то зависимость между напряжением и удлинением отобразится линией  $fgh$ . После снятия напряжений образец останется удлиненным. В соответствии с этим полное удлинение можно представить в виде двух слагаемых:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (5.6)$$

где  $\epsilon^e$  – упругая<sup>1</sup> деформация;  $\epsilon^p$  – пластическая<sup>2</sup> (ее еще называют остаточной) деформация.

Вторичное нагружение из состояния, характеризуемого точкой

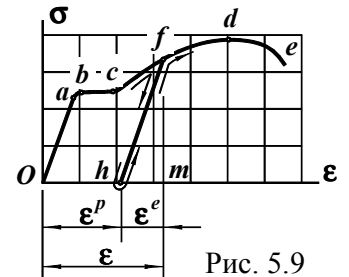


Рис. 5.9

$h$ , сопровождается ростом деформации, отражаемым линией  $hkl$ . Линии  $fgh$  и  $hkl$  образуют петлю гистерезиса, которая свидетельствует о необратимых затратах энергии при разгрузке и последующем нагружении. Ширина петли обычно невелика, и в расчетах ею часто пренебрегают – считают, что ветви  $fgh$  и  $hkl$  совпадают.

При таком упрощении линия разгрузки и вторичного нагружения

оказывается единой. У сталеи эта линия близка к прямой, наклон ее практически такой же как у первоначального участка диаграммы  $Oa$  (рис. 5.9).

Если в процессе начального нагружения напряжение не превысило предел пропорциональности, после разгрузки деформации исчезнут. Поэтому участок  $Oa$  называют участком упругих деформаций. Часть  $abcde$  называют участком упругопластических деформаций.

В соответствии с наличием обратимой и необратимой частей деформации работа, затраченная на деформирование, также состоит из двух частей:

$$w = w^p + u, \quad (5.7)$$

где  $w^p$  – необратимая часть удельной работы (диссипация энергии; ее геометрическим образом является площадь фигуры  $OabcfhO$ );  $u$  – удельная потенциальная энергия деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации  $u$  есть площадь треугольника  $hfm$ . Так как тангенс угла наклона линии  $hf$  равен  $E$ ,

$$u = \sigma \epsilon^e / 2 = \sigma^2 / 2E. \quad (5.8)$$

Подчеркнем, что равенство (5.8) справедливо независимо от того, в какой стадии напряжения находится материал, – в упругой или упругопластической.

5.5.2. Если в процессе вторичного нагружения ( $hf$ ), достигнув напряжений, соответствующих точке  $f$ , увеличивать их далее, диаграмма растяжения будет иметь вид  $fde$ . Процесс разгрузки  $fh$  и вторичного нагружения  $hf$  не отразился на очертании кривой  $fde$ . Образец, претерпевший предварительное нагружение  $Oabcf$  до упругопластического состояния, изменил свои свойства. Его диаграмма приняла вид  $hfde$ :

- предел пропорциональности стал выше (точка  $f$ );
- исчезла площадка текучести;
- удлинение при разрыве уменьшилось.

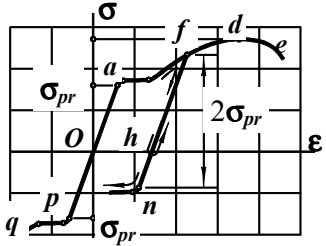
Такое изменение свойств материала носит название *наклепа*.

5.5.3. На рис. 5.10 кривая  $Oafde$  – диаграмма однократного растяжения,  $Opq$  – однократного сжатия. Если осуществить начальное нагружение до точки  $f$ , разгрузить до  $h$  и продолжить нагру-

<sup>1</sup> Индекс от англ. *elastic* – упругий;

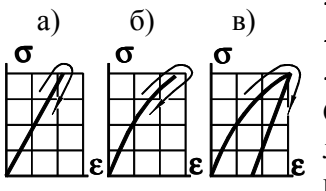
<sup>2</sup> Индекс от англ. *plastic* – пластический.

жение в сторону сжатия, изменение свойств обнаружится и здесь.



Пластические деформации сжатия возникнут при напряжениях, соответствующих точке *n*. Предел пропорциональности на сжатие станет меньше (ср. положения точек *p* и *n*). При этом общая длина участка упругих деформаций практически не изменилась ( $ap \approx fn$ ). Эта особенность поведения материала, связанная со знакопеременным нагружением, носит название *эффекта Баушингера*<sup>1</sup>.

Особенности, обнаруженные при испытаниях малоуглеродистой стали, в той или иной мере свойственны и другим материалам. В зависимости от степени проявления свойств их либо игнорируют, либо идеализируют и учитывают в расчетах. Так, по очертанию диаграммы и ориентации идеализированной линии разгрузки материалы подразделяют на



- *линейно упругие* (рис. 5.11 а);
  - *нелинейно упругие* (рис. 5.11 б);
  - *упругопластические* (рис. 5.11 в).
- Среди последних выделяют такие материалы, у которых линия разгрузки параллельна начальному участку. В таких случаях говорят о *законе линейной разгрузки*.

Рис. 5.11

### 5.6. Понятие о нормативном и расчетном сопротивлении материала.

#### Условия прочности

5.6.1. Чтобы назначить границу безопасного нагружения, необходимо ввести понятие *предельного состояния*. Для пластичных материалов за предельное состояние принимают начало текучести, для хрупких – начало разрушения. В соответствии с этим предельными напряжениями считают предел текучести  $\sigma_{yt}$ , если материал пластичный, или предел прочности  $\sigma_u$ , если хрупкий.

<sup>1</sup> Иоганн Баушингер (1833–1893) – профессор механики Мюнхенского политехнического института, основатель передовой по меркам того времени испытательной лаборатории.

Серийные испытания образцов обнаруживают большой разброс предельных напряжений. На рис. 5.12 изображена кривая распределения предела текучести малоуглеродистой стали. Она показывает, что 16 % образцов имеют предел текучести около 300 МПа, у 10 % он лежит в пределах  $270 \leq \sigma_{yt} \leq 330$  МПа. Предел текучести  $\sigma_{yt} = 240$  МПа имеет лишь 1 % испытанных образцов. Аналогична кривая распределения предела прочности.

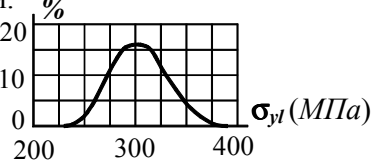


Рис. 5.12

Учитывая разброс механических характеристик и стремясь к гарантии прочности, ГОСТом или техническим условием на приемку материала предусмотрено минимальное (браковочное) значение предельного напряжения, называемое *нормативным сопротивлением*.

Обычно нормативное сопротивление обозначают  $R_n$ ; для сталей  $R_{yt}$ , если оно назначено по текучести, или  $R_u$ , если по пределу прочности.

Поскольку контрольные испытания являются выборочными и не исключают возможности отклонения предельного напряжения от нормативного значения в неблагоприятную сторону, вводят *расчетное сопротивление материала*. Его обозначают буквой *R*. Расчетное сопротивление всегда меньше нормативного.

У многих пластичных материалов расчетные сопротивления на растяжение и сжатие принимают одинаковыми. У материалов, имеющих заметно различающиеся характеристики прочности при растяжении и сжатии, устанавливают *расчетное сопротивление на растяжение  $R_t$  и расчетное сопротивление на сжатие*<sup>1</sup>  $R_c$ .

Числовые значения расчетных сопротивлений *R* или  $R_t$  и  $R_c$  приведены в нормативной и справочной литературе. Ими руководствуются при оценке прочности или степени опасности напряженного состояния материала.

5.6.2. Чтобы в материале не возникло предельное состояние, должны выполняться условия

$$\sigma \leq R_t \text{ и } \sigma \leq R_c. \tag{5.9}$$

Эти ограничения называются *условиями прочности материала*.

<sup>1</sup> Индексы от англ. *tension* – растяжение, *compression* – сжатие.

Для хрупких материалов условия прочности действительно являются таковыми, ибо достижение напряжением величины  $R_t$  или  $R_c$  (предела прочности) сопряжено с разрушением – появлением и, как правило, мгновенным распространением трещины. У пластичных же материалов, где в качестве расчетного сопротивления фигурирует предел текучести, нарушение условий (5.9) чревато возникновением остаточных деформаций. Поэтому для них используемая терминология является несколько условной.

Определенный запас прочности (в статистическом смысле) закладывается и самой процедурой назначения расчетного сопротивления. Это также свидетельствует об относительности смысла терминологии.

### 5.7. Влияние температуры и длительности действия нагрузки на механические характеристики и свойства материалов

Описанные выше испытания материалов проводятся при комнатной температуре; нагружение образцов осуществляется плавно и в сравнительно непродолжительное время. Условия, в которых работают строительные конструкции, отличаются от лабораторных. Достаточно широк диапазон температур. Некоторые конструкции воспринимают ударные нагрузки в течение долей секунд. Возможно и противоположное – действие сил на протяжении столетий.

Механические характеристики, полученные при лабораторных испытаниях, нельзя считать неизменными. Они соответствуют тем условиям, в которых получены. Для выявления свойств материалов в отмеченных выше особых условиях необходимы отдельные испытания, воспроизводящие специфику воздействия.

5.7.1. Испытания при различных температурах показывают, что у большинства материалов с повышением температуры характеристики прочности уменьшаются, а с понижением – растут. Характеристики же пластичности, наоборот, с повышением температуры увеличиваются, с понижением – уменьшаются. С ростом температуры уменьшается модуль упругости, и увеличивается коэффициент Пуассона.

Нагрев конструкций из алюминиевых сплавов до температуры  $T = 100^{\circ}C$  можно считать безопасным. Предел текучести при таких температурах почти не изменяется, предел прочности понижается незначительно. При более высоких температурах прочность резко падает. Влияние температуры на характеристики прочности алюминиевого сплава проиллюстрировано рис. 5.13.

Прочность бетона при повышении температуры понижается, что заметно уже в интервале  $200...300^{\circ}C$ . Нагрев до  $400^{\circ}C$  снижает прочность почти вдвое, до  $500^{\circ}C$  – втрое. При  $550^{\circ}C$  модуль упругости меньше обычного почти в 17 раз.

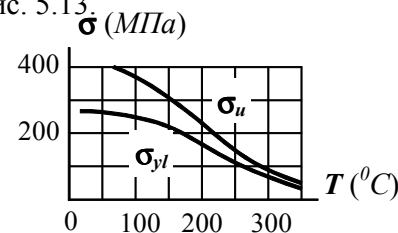


Рис. 5.13

Нагрев пластмасс приводит к быстрому падению предела прочности. При охлаждении они становятся очень хрупкими.

Некоторые материалы являются исключением из этих правил.

Так, у углеродистой стали (рис. 5.14) при повышении температуры предел прочности вначале несколько повышается, а затем резко падает. В интервале  $200...400^{\circ}C$  предел прочности  $\sigma_u$  имеет наибольшее значение, в то же время остаточное удлинение при разрыве  $\delta_r$  – наименьшее. Сталь становится хрупкой с дальнейшим повышением температуры эта аномалия исчезает и растет пластичность, снижается прочность.

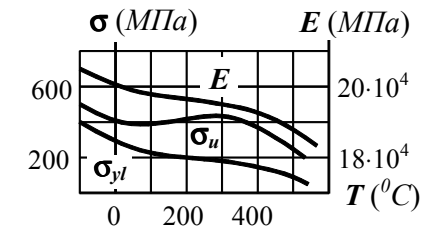


Рис. 5.14

При отрицательных температурах характеристики прочности несколько превышают обычные, пластичность снижается.

При отрицательных температурах характеристики прочности несколько превышают обычные, пластичность снижается.

5.7.2. Влияние скорости нагружения.

На рис. 5.15 показаны две диаграммы растяжения малоуглеродистой стали: при медленном (1) и ударном (2) нагружении. Из диаграмм видно, что с повышением скорости нагружения прочностные характеристики возрастают, характеристики пластичности снижаются – материал становится более хрупким. Подобная тенденция проявляется у большинства материалов.

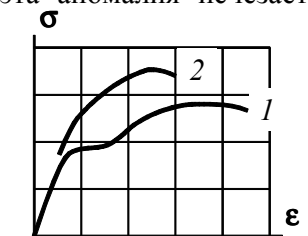


Рис. 5.15

5.7.3. Весьма своеобразно поведение некоторых материалов при длительном действии нагрузки.

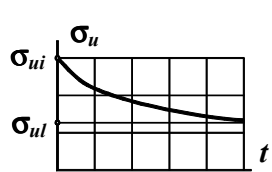


Рис. 5.16

5.7.3.1. У пластмасс в таких условиях предел прочности значительно уменьшается. На рис. 5.16 показана зависимость предела прочности  $\sigma_u$  от  $t$  – продолжительности действия нагрузки. На нем  $\sigma_{ui}$  – **предел сопротивления кратковременным деформациям**;  $\sigma_{ul}$

– **предел длительного сопротивления**. При напряжении  $\sigma_{ui} > \sigma > \sigma_{ul}$  разрушение произойдет не сразу, а по истечении некоторого времени.

5.7.3.2. Если образец оставить под нагрузкой в течение длительного времени, то деформации его будут возрастать. *Процесс нарастания деформаций при постоянной нагрузке носит название ползучести материала*.

График зависимости деформации  $\epsilon$  от времени  $t$  называется *кривой ползучести* (рис. 5.17). Участок *Oa* соответствует нагружению образца.

После этого при постоянной нагрузке деформирование продолжается. В начале выдержки под нагрузкой скорость роста деформаций падает (участок *ab*) – происходит так называемая *неустановившаяся ползучесть*. Затем скорость стабилизируется и становится минимальной (прямая *bc*). Этот участок описывает *установившуюся ползучесть*.

При определенных условиях возможна активизация процесса ползучести – с некоторого момента времени (точка *c*) скорость роста деформаций вновь возрастает, и в итоге образец разрушается.

Вид кривой ползучести зависит от материала, температуры и уровня напряжений.

Для каждого материала существует определенная температура, после которой проявление ползучести становится настолько существенным, что игнорировать ее нельзя. Для углеродистых сталей эта температура равна  $300...350^{\circ}C$ , для легированных  $350\pm 400^{\circ}C$ , для легких сплавов  $50...150^{\circ}C$ . У некоторых материалов, таких, как пластмассы, древесина, цемент, бетон ползучесть возможна при обычной температуре.

На рис. 5.18 а показаны кривые ползучести при одинаковых напряжениях, но разных температурах. Рис. 5.18 б иллюстрирует зависимость характера ползучести от величины напряжения при постоянной температуре.

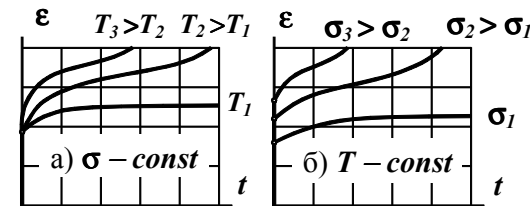


Рис. 5.18

Графики показывают, что в зависимости от условий деформации могут стабилизироваться на некотором уровне, но может произойти и разрушение.

5.7.3.3. Изменение деформаций со временем происходит не только под нагрузкой, но и после ее снятия (рис. 5.19).

Если образец нагрузить (участок *Oa*) и выдержать под нагрузкой длительное время, деформации возрастут (*ab*). Если после этого нагрузку снять, деформации уменьшатся. Вначале ”мгновенно” (*bc*), а затем они будут уменьшаться уже в разгруженном образце (*cd*). Это явление носит название **обратной ползучести**. Оно в большей степени проявляется у пластмасс.

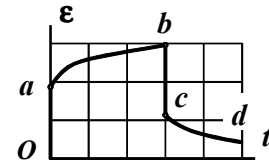


Рис. 5.19

5.7.3.4. Заслуживает внимания явление, происходящее в напряженном материале при фиксированной деформации. В этом случае происходит падение напряжений. *Уменьшение напряжений при постоянной деформации называется релаксацией*. Начальный отрезок на рис. 5.20 соответствует нагружению образца, до напряжения  $\sigma_0$ . Затем оно падает до некоторого  $\sigma_f$ .

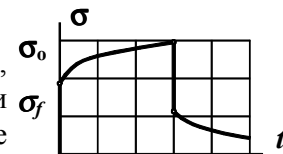


Рис. 5.20

Ползучесть и релаксация имеют одну физическую природу. Температура и напряжения, при которых проявляются релаксация и ползучесть, близки.

Выше дано лишь качественное описание некоторых явлений, происходящих в материалах при условиях, отличающихся от лабораторных. Более детально свойства материалов изучают в специальных курсах. В них даны рекомендации по учету тех или иных особенностей поведения материалов при расчете и проектировании строительных конструкций.

## 5.8. План решения основной задачи сопротивления материалов

Основная задача сопротивления материалов формулируется так. Известны форма и размеры стержня и внешние силы, приложенные к нему. При действии указанных сил стержень находится в равновесии. Выбрано некоторое поперечное сечение. Нужно установить

- какие напряжения возникают в поперечном сечении: нормальные, касательные или и те, и другие;
- как напряжения распределены по сечению;
- как зависят напряжения от формы и размеров сечения, а также от нагрузки на стержень.

Метод сечений позволяет выразить внутренние силовые факторы через внешнюю нагрузку. Поэтому будем считать их известными.

Решение сформулированной задачи производится в два этапа.

Первый этап – формирование системы уравнений, позволяющих ответить на поставленные вопросы. Этот этап наиболее важный, так как по существу определяет содержание технической теории.

Система уравнений состоит из трех групп.

Поскольку разрешить уравнения (3.1) относительно искомых напряжений нельзя (распределение напряжений по сечению неизвестно), рассматривается геометрическая сторона задачи. Цель – установить закономерности изменения деформаций по сечению.

В сопротивлении материалов распределение деформаций по сечению устанавливается с помощью эксперимента. А так как произвести замеры во внутренних точках стержня технически невозможно, изучают деформации на его поверхности. Это позволяет предположительно судить о том, какие геометрические изменения происходят внутри стержня. Для математического описания зависимости деформаций от положения точки обычно используют **гипотезу плоских сечений** (гипотезу Бернулли<sup>1</sup>) – предполагают, что **поперечные сечения в процессе деформации стержня остаются плоскими**. Эти зависимости являются **геометрическими уравнениями** и составляют одну из трех групп.

<sup>1</sup> Бернулли Яков старший (1654–1705) – представитель династии великих математиков. В 1695 г. использовал эту гипотезу в задаче об изгибе балки.

Другая группа – *физические уравнения*, связывающие деформации с напряжениями.

Третья<sup>1</sup> группу составляют условия статической эквивалентности (3.1) – *статические уравнения*.

Этим завершается первый этап.

Второй этап – формальный математический. Систему уравнений преобразуют так, чтобы выразить искомые напряжения через внутренние силовые факторы, геометрические характеристики сечения и координаты точки. Здесь используют соответствующий математический аппарат в зависимости от вида решаемых уравнений.

Сформулированным выше условием не исчерпываются задачи, решаемые в сопротивлении материалов. Особое внимание уделено ей потому, что выводы подобного рода обычно трудны. Кроме того, аналогичные задачи приходится решать в курсах строительной механики, теории упругости и т.п.<sup>2</sup> Поэтому описание общего подхода к решению таких задач представляется целесообразным. Знание общего плана действий облегчит понимание выводов, поможет сохранить ориентир в процессе порой громоздких математических выкладок и преобразований.

Решение основной задачи сопротивления материалов предполагает выразить напряжения в любой точке стержня через его геометрические размеры и внешнюю нагрузку. Но так как решение производят в общем виде и фиксируют в виде формул, можно решать задачи в других постановках. Можно, например, определить требуемые размеры стержня, зная внешнюю нагрузку и допустимые напряжения; можно по заданным напряжениям и размерам найти внешнюю нагрузку, т.е. решать различные задачи проекторочного типа.

<sup>1</sup> Последовательность формирования отдельных групп уравнений может быть произвольной. Важно, чтобы все они были в составе системы.

<sup>2</sup> Принципиальную схему решения статически неопределимых задач о напряженно-деформированном состоянии твердого тела разработал французский инженер и ученый Луи Навье (1785–1836).

## 5.9. Напряжения в поперечном сечении стержня при растяжении и сжатии.

### Теоретическое решение задачи

Решим задачу о напряжениях, возникающих в поперечном сечении стержня, подверженного растягивающим или сжимающим силам. Задача ставится, как описано выше. Установим:

- какие напряжения возникают в поперечном сечении;
- как они распределены по сечению;
- как зависят напряжения от продольной силы и геометрических размеров стержня.

### Геометрическая сторона задачи

При лабораторных испытаниях стержня с нанесенной сеткой из продольных и поперечных линий (рис. 5.21) установлено:

- поперечные линии, плоские и параллельные до деформации, после деформации остались плоскими и параллельными;
- продольные линии остались прямыми и параллельными;
- углы между указанными семействами линий не изменились.

На основании этих фактов будем считать, что *поперечные сечения, плоские и параллельные до деформации, остались плоскими и параллельными после деформации*. От-

Рис. 5.21

сюда следует, что все продольные волокна удлиняются одинаково, т.е.

$$\epsilon_z = \epsilon_z(x, y) = const. \quad (a)$$

Равенство (a) является геометрическим условием задачи.

Кроме того, учитывая

- отсутствие касательных сил на боковой поверхности стержня и свойство их парности;
- малость поперечного размера стержня – пространства возможного развития касательных напряжений;
- отсутствие поперечных сил и крутящего момента;

*примем – касательных напряжений в поперечном сечении нет.*

### Физическая сторона задачи

Напряжения и деформации связаны между собой. В упругой стадии эта связь фигурирует в форме закона Гука (5.4). За пределом упругости она более сложная. Но как бы то ни было, из постоянства деформаций (a) вытекает постоянство напряжений:

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y) = const. \quad (б)$$

### Статическая сторона задачи

Продольная сила (3.1)

$$N = \int_A \sigma_z dA. \quad (в)$$

Первый этап завершен, система разрешающих равенств сформирована. Теперь для ответов на все поставленные вопросы требуются простые преобразования.

Учитывая постоянство напряжений (б), последовательно записываем равенство (в):  $N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z A$ , откуда

$$\sigma_z = N/A. \quad (5.10)$$

Итак, получены ответы на все поставленные вопросы.

- 1) При растяжении и сжатии в поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения.
- 2) Напряжения по сечению распределены равномерно.
- 3) Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

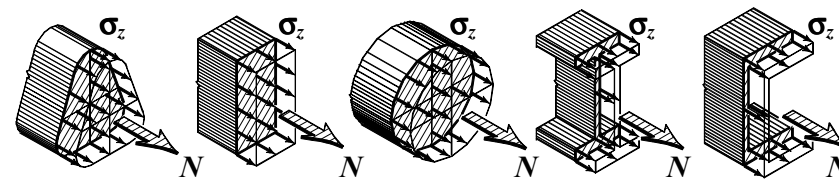


Рис. 5.22

Как следует из полученного решения, напряжения в поперечном сечении не зависят от его формы. На рис. 5.22 показаны эпюры напряжений в сечениях различных форм.



## 5.10. Критический анализ формулы нормальных напряжений.

### Принцип Сен-Венана.

#### Понятие о концентрации напряжений

5.10.1. Из формулы (5.10) следует, что в растянутом или сжатом стержне напряжения в сечении не зависят от

- вида внешней нагрузки (разные нагрузки, приводящиеся к одинаковым силам  $N$ , вызывают одинаковые напряжения);
- длины стержня;
- формы поперечного сечения;
- материала стержня.

Такой итог – следствие приближенного решения задачи, не учитывающего возможные особенности конкретных схем. Строго говоря, решение (5.10) справедливо, если

- растягивающие или сжимающие силы представляют равномерно распределенные по торцам нормальные напряжения;
- стержень имеет постоянное сечение;
- материал стержня однородный и изотропный.

Если нагрузка реализована в виде сосредоточенных сил (рис. 5.23), гипотеза плоских сечений нарушается. Распределение напряжений в сечениях, близких к точкам приложения сил, будет неравномерным. По мере удаления от торцов искривления поперечных линий будут уменьшаться, напряжения будут приближаться к значениям, предсказываемым формулой (5.10).

Гипотезу плоских сечений и полученную на ее основе формулу (5.10) можно считать справедливой лишь для сечений, достаточно удаленных от точек приложения внешних сил. Может оказаться, что для коротких стержней обсуждаемая формула будет неприемлемой.

Неравномерно распределение напряжений в поперечном сечении стержня из неоднородного материала. Это можно объяснить тем, что при одинаковых деформациях, но разных модулях упругости напряжения будут разными.

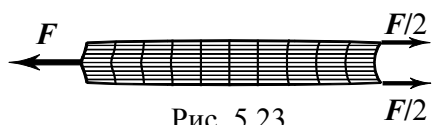


Рис. 5.23

5.10.2. В сопротивлении материалов обычно рассматривают равнодействующие внешних нагрузок и не учитывают конкретный вид их распределения. В связи с этим возникает вопрос, как это сказывается на напряженно-деформированном состоянии стержня? Ответ на этот вопрос дает **принцип Сен-Венана**<sup>1</sup>. Сформулировать принцип можно так: *в местах, удаленных от точек действия сил, статически эквивалентные нагрузки вызывают одинаковые напряжения и деформации*

Принцип Сен-Венана освобождает от необходимости рассмотрения бесчисленного множества возможных вариантов статически эквивалентных нагрузок. В то же время вопрос о напряжениях и деформациях вблизи точек нагружения остается открытым. Задачи подобного рода рассматриваются в специальных дисциплинах.

5.10.3. Равномерность распределения напряжений нарушается у отверстий, в местах изменения формы или размеров сечения (рис. 5.24). Вблизи таких мест наблюдается **концентрация напряжений**.

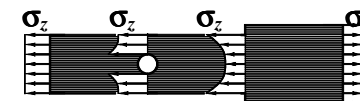


Рис. 5.24

В итоге следует констатировать, что *решение сопротивления материалов вскрывает общую картину напряженного состояния, не отражая местных возмущений, связанных с видом нагрузки и геометрическими особенностями элемента конструкции.*

## 5.11. Напряженное состояние стержня.

### Расчет на прочность при растяжении и сжатии

- 5.11.1. Анализ напряженного состояния включает
- установление закономерностей изменения напряжений в зависимости от угла наклона площадки к поперечному сечению;
  - определение положения главных площадок и величин главных напряжений  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ ;
  - определение положения площадок с максимальными касательными напряжениями и величин  $\tau_{max}$ .

<sup>1</sup> Барре де Сен-Венан (1797–1886) – французский ученый. Сформулировал принцип в 1855 г. Доказательства принципа нет. Он подтверждается экспериментом и строгими аналитическими решениями частных задач. Принято считать, что влияние конкретного вида нагрузки распространяется на длину, соизмеримой с размерами поперечного сечения.

Исследование напряженного состояния проведем на стержне прямоугольного сечения (рис. 5.25 а). Олицетворением всевозможных площадок (перпендикулярных плоскости чертежа) может служить цилиндр бесконечно малого диаметра (заштрихован дважды на рис. 5.25 а). Напряжения в разных точках его боковой поверхности отражают напряженное состояние в рассматриваемом месте.

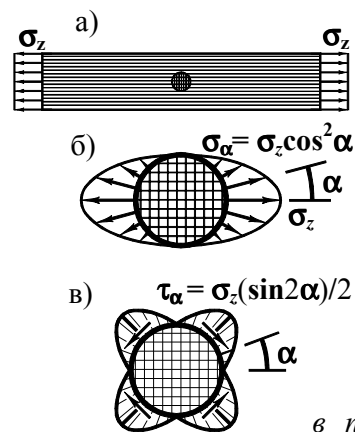


Рис. 5.25

Главные напряжения в них отсутствуют. Из выражения нормальных напряжений вытекает  $\sigma_{max} = \sigma_z$  и  $\sigma_{min} = 0$ .

В разделе 4 показано, что площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под  $45^\circ$ , а  $\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ . При растяжении  $\tau_{max} = \sigma_z/2$  – в два раза меньше максимального нормального напряжения.

Результаты анализа имеют достаточно большую общность. Они справедливы для всех

- точек стержня, так как напряженное состояние при растяжении однородное (напряжения во всех точках стержня одинаковы);
- площадок независимо от того, в какой продольной плоскости отсчитывается угол  $\alpha$ , поскольку напряженное состояние линейное;
- типов сечений, так как нормальное напряжение  $\sigma_z$  не зависит от них.

При сжатии главные напряжения  $\sigma_{max} = 0$ , а  $\sigma_{min} = \sigma_z$ . Максимальное касательное напряжение  $\tau_{max} = \sigma_z/2$ .

При растяжении стержень находится в линейном напряженном состоянии. Зависимости напряжений от наклона площадки получим по формулам (4.2) и (4.3), положив в них  $\tau_{zy} = \sigma_y = 0$ :

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha, \quad (5.11)$$

$$\tau_\alpha = -\sigma_z (\sin 2\alpha) / 2. \quad (5.12)$$

Соответствующие этим равенствам эпюры нормальных и касательных напряжений изображены на рис. 5.25 б, в.

Главными являются площадки, лежащие в поперечном сечении, и перпендикулярные ему продольные площадки, так как касательные напряжения в них отсутствуют.

5.11.2. Расчет на прочность при растяжении и сжатии ведется по наибольшим нормальным напряжениям.

Условие прочности (5.9) требует, чтобы нормальное напряжение ни в одной точке не превысило расчетного сопротивления материала. Поскольку наибольшее нормальное напряжение в точке растянутого или сжатого стержня – это  $\sigma_z$ , условию прочности можно придать вид

$$\sigma_z \leq R. \quad (5.13)$$

Так выглядит условие прочности материала при линейном напряженном состоянии.

При растяжении и сжатии напряжения определяются формулой (5.10). Условие прочности сечения выглядит так:

$$N/A \leq R. \quad (5.14)$$

Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, условие (5.14) записывают в виде

$$N/A \leq R_t, \quad N/A \leq R_c. \quad (5.15)$$

В левые части ограничений (5.13), (5.14) и (5.15) следует подставлять абсолютные значения напряжений и сил без учета их знака.

Для стержня или стержневой конструкции условие прочности соблюдается при

$$\max(N/A) \leq R_t, \quad \max(N/A) \leq R_c. \quad (5.16)$$

Условия прочности позволяют не только проверять конструкцию при заданной нагрузке. С их помощью можно решать и другие задачи:

- определять размеры поперечных сечений при известных материале и нагрузке,
- рассчитывать допустимый уровень воздействия при заданной конструкции и виде нагрузки,
- подбирать материал, если известны нагрузка и схема конструкции и т.п.

Рассмотрим пример решения одной из проектировочных задач.

## 5.12. Равнонапряженный сжатый стержень

Часто при расчете конструкций, относящихся к категории стержней, приходится учитывать их собственный вес (высокие колонны, дымовые трубы, радио- и телебашни и т.п.). В них продольная сила от веса материала переменна по длине. Естественно в подобных случаях назначить переменной по длине и площадь поперечного сечения. Оптимальным является такое изменение площади, при котором напряжения во всех сечениях одинаковы.

Рассмотрим эту задачу.

Вертикальный стержень (рис. 5.27 а) воспринимает силу  $F$ . Установим, как должна изменяться площадь поперечного сечения по высоте, чтобы напряжения  $\sigma_z$  с учетом собственного веса стержня всюду были бы равными расчетному сопротивлению материала  $R_c$ .

Площадь верхнего сечения по условию прочности  $\sigma_z = F/A_0 \leq R_c$ , примем  $A_0 = F/R_c$ .

Из условия равновесия элементарного отрезка стержня (рис. 5.27 б) следует

$$R_c A(z) + \rho g A(z) dz - R_c (A(z) + dA(z)) = 0$$

( $\rho$  – плотность материала,  $g$  – ускорение свободного падения). Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$dA(z)/A(z) = \rho g dz / R_c.$$

Общий интеграл этого уравнения:  $\ln A(z) + C = \rho g z / R_c$ .

Постоянную интегрирования найдем из условия  $A(z) = A_0$  при  $z = 0$ :  $C = -\ln A_0$ . После этого  $\ln(A(z)/A_0) = \rho g z / R_c$ , или

$$A(z) = A_0 e^{\rho g z / R_c}.$$

Криволинейные очертания, повторяющие эту зависимость, трудоемки в практическом исполнении, поэтому в подобных объектах принимают либо линейно переменные, либо ступенчато переменные очертания, близкие к полученным.

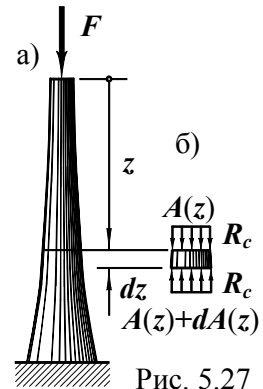


Рис. 5.27

**Пример 5.1.** Стержневая конструкция (рис. 5.26 а) при габаритных размерах  $l = 1,6$  м и  $h = 1,2$  м должна выдерживать вертикальную силу  $F = 12$  кН. Нужно запроектировать конструкцию (назначить размеры поперечных сечений): растянутый стержень сделать стальным с круглым сечением, сжатый – квадратного сечения из сосны. Расчетное сопротивление стали на растяжение  $R_t^{st} = 220$  МПа, сосны на сжатие  $R_c^w = 11$  МПа.

Подготовим для последующих вычислений  $\alpha = \arctg(h/l) = \arctg(1,2/1,6) = 36,9^\circ$ ;  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

Найдем усилия в стержнях.

Вырежем узел  $a$  (рис. 5.26 б), заменим действие отброшенной части на оставленную силами  $N_1$  и  $N_2$ , спроецируем силы сначала на вертикаль, затем на горизонталь:

$$N_1 \sin \alpha - F = 0, \Rightarrow N_1 = F / \sin \alpha, N_1 = 12 / 0,6 = 20 \text{ кН.}$$

Положительный результат говорит о том, что направление силы выбрано верно, наклонный стержень *растянут*.

Рис. 5.26

Проекция на горизонталь:

$$N_1 \cos \alpha + N_2 = 0, \Rightarrow N_2 = -N_1 \cos \alpha = -20 \cdot 0,8 = -16 \text{ кН.}$$

Сила  $N_2$  направлена в обратную сторону, горизонтальный стержень *сжат*.

Итак, наклонный стержень стальной, он должен воспринимать усилие 20 кН; горизонтальный – из сосны, способный держать 16 кН.

Условие прочности наклонного стержня:

$$N_1 / A_1 \leq R_t^{st}, \text{ откуда } A_1 \geq N_1 / R_t^{st} = 20 / 220 = 0,091 \text{ м}^2.$$

Обозначим диаметр сечения буквой  $d$ . Тогда  $A_1 = \pi d^2 / 4 \geq 0,091$  м<sup>2</sup>, откуда  $d \geq \sqrt{4 \cdot 0,091 / \pi} = 1,08$  см.

Для горизонтального стержня условие прочности аналогично:

$$N_2 / A_2 \leq R_c^w. \text{ Отсюда } A_2 \geq N_2 / R_c^w = 16 / 1,1 = 14,5 \text{ см}^2.$$

Если обозначить сторону квадрата буквой  $b$ , то  $A_2 = b^2 \geq 14,5$  см<sup>2</sup>, или  $b \geq \sqrt{14,5} = 3,8$  см.

Таким образом, из условий прочности необходимо принять диаметр сечения стального стержня не менее 1,08 см, а сторону квадратного сечения соснового бруса не менее 3,8 см.

### 5.13. Деформации при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии продольные и поперечные размеры стержня изменяются. В упругой стадии линейные деформации описываются законом Гука (5.4) и отношением Пуассона (5.5):

$$\epsilon_z = \sigma_z / E, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \sigma_z / E.$$

Обозначим длину и ширину стержня до деформации соответственно  $l$  и  $b$  (рис. 5.28), после деформации –  $l_1$  и  $b_1$ . Тогда

$$l_1 - l = \Delta l, \quad b_1 - b = \Delta b. \quad (5.17)$$

$\Delta l$  – абсолютное удлинение стержня;  $\Delta b$  – абсолютное поперечное расширение<sup>1</sup>.

В однородном стержне постоянного сечения деформации равномерны по длине, поэтому отношения

$$\Delta l / l = \epsilon_z, \quad \Delta b / b = \epsilon_x = \epsilon_y, \quad (5.18)$$

называются *относительными деформациями*:  $\epsilon_z$  – продольная деформация,  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  – поперечные деформации. Относительные деформации – безразмерные величины.

Из равенства (5.18) абсолютное удлинение стержня  $\Delta l = \epsilon_z l$ . Но по закону Гука (5.4)  $\epsilon_z = \sigma_z / E$ , следовательно  $\Delta l = \sigma_z l / E$ . Подставляя сюда напряжения (5.10), получаем формулу абсолютного удлинения

$$\Delta l = Nl / (EA). \quad (5.19)$$

Равенство (5.19) носит название *закона Гука для растянутого (сжатого) стержня*.

Произведение  $EA$  в знаменателе является жесткостной характеристикой при растяжении и сжатии (чем больше это произведение, тем меньше удлинение). Ее иногда называют *жесткостью при растяжении (сжатии)*. Жесткость всего стержня характеризуется отношением  $EA/l$ .

<sup>1</sup> При растяжении согласно формуле (5.17) “расширение” отрицательно, что свидетельствует об уменьшении поперечных размеров, при сжатии  $\Delta b$  положительно.

Поперечное расширение  $\Delta b = \epsilon_y b = -\nu \epsilon_z b$ . Ширина стержня после деформации  $b_1 = b + \Delta b = b - \nu \epsilon_z b = b(1 - \nu \epsilon_z)$ .

С изменением поперечных размеров изменяется и площадь сечения. Оценим это изменение. Площадь пропорциональна второй степени поперечного размера<sup>1</sup>.

Площади представим так:

– до деформации  $A = kb^2$ ;

– после деформации  $A_1 = k(b_1)^2 = kb^2(1 - \nu \epsilon_z)^2$ .

Абсолютное изменение площади

$$\Delta A = A_1 - A = kb^2(1 - \nu \epsilon_z)^2 - kb^2 = kb^2((1 - \nu \epsilon_z)^2 - 1),$$

а относительное  $\epsilon_A = \Delta A / A = (1 - \nu \epsilon_z)^2 - 1 = -2\nu \epsilon_z + \nu^2 \epsilon_z^2$ . Второе слагаемое в полученном выражении мало по сравнению с первым. Отбросим его. Относительное изменение площади поперечного сечения  $\epsilon_A = -2\nu \epsilon_z$ .

Относительное изменение объема  $\epsilon_V = \Delta V / V = (V_1 - V) / V$ .

– объем до деформации  $V = Al$ ;

– после деформации  $V_1 = A_1 l_1$ .

Но  $A_1 = A + \Delta A = A(1 + \Delta A / A) = A(1 + \epsilon_A) = A(1 - 2\nu \epsilon_z)$ ;

длина  $l_1 = l + \Delta l = l(1 + \Delta l / l) = l(1 + \epsilon_z)$ .

Таким образом, объем после деформации

$$V_1 = A_1 l_1 = A(1 - 2\nu \epsilon_z)l(1 + \epsilon_z) = V(1 - 2\nu \epsilon_z)(1 + \epsilon_z).$$

Используя эти выражения, получаем

$$\epsilon_V = (1 - 2\nu \epsilon_z)(1 + \epsilon_z) - 1 = -2\nu \epsilon_z + \epsilon_z - 2\nu \epsilon_z^2.$$

Отбросив  $2\nu \epsilon_z^2$  из-за малости, приходим к равенству

$$\epsilon_V = (1 - 2\nu)\epsilon_z. \quad (5.20)$$

У материалов, применяемых в строительстве,  $0 < \nu < 0,5$ . Поэтому при растяжении происходит увеличение их объема, при сжатии – уменьшение. Если  $\nu = 0,5$ , объем не изменяется (таким свойством обладает, например, каучук); при  $\nu = 0$  (коэффициент Пуассона близок к нулю у пробки) продольные деформации не влияют на поперечные.

Для количественной оценки деформаций рассмотрим пример.

<sup>1</sup> Площадь квадрата  $A = b^2$  ( $b$  – сторона квадрата); у круга  $A = \pi b^2 / 4$  ( $b$  – диаметр круга); аналогичные выражения можно записать и для сечений других форм.

**Пример 5.2.** Вычислить деформации стержня

- длиной 1 м;
- с квадратным сечением  $1 \cdot 1 \text{ см}^2$ ;
- материал стержня – сталь с  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  и  $\nu = 0,25$ ;
- подверженного растягивающей силе  $F = 20 \text{ кН}$ .

Абсолютное удлинение

$$\Delta l = Nl/(EA) = 20 \cdot 100 / (2 \cdot 10^4 \cdot 1) = 0,1 \text{ см.}$$

Относительное удлинение  $\epsilon_z = \Delta l/l = 0,1/100 = 0,001$ .

Относительное изменение площади

$$\epsilon_A = -2\nu\epsilon_z = -2 \cdot 0,25 \cdot 0,001 = 0,0005.$$

Относительная объемная деформация

$$\epsilon_V = (1-2\nu)\epsilon_z = (1-2 \cdot 0,25) \cdot 0,001 = 0,0005.$$

Полученные результаты показывают, что *геометрические изменения, происходящие в стержне, малы по сравнению с первоначальными размерами*. Это позволяет упростить многие задачи. Так, в большинстве из них можно считать, что геометрическая схема конструкции под нагрузкой имеет то же очертание, что и в ненагруженном состоянии (длины стержней, углы между стержнями и линии действия сил не изменились).

При вычислении напряжений можно пренебречь изменением площадей сечений и в формулу (5.10) подставлять их первоначальные значения.

Однако такие упрощения возможны не всегда. В некоторых случаях они могут привести не только к существенным количественным погрешностям, но и дать качественно неверное представление о работе стержня.

Деление эффектов деформирования стержня на значимые и второстепенные – непростая процедура, требующая опыта, знаний, а порой и интуиции. Некоторые задачи подобного рода и методы оценки возможностей игнорирования влияния деформаций на результаты расчетов будут рассмотрены в дальнейшем.

## 5.14. Перемещения при растяжении и сжатии. Расчет на жесткость

5.14.1. В результате деформирования стержня его точки и сечения перемещаются в новые положения. Перемещения точек конструкции характеризуют ее жесткость. Поэтому определение перемещений необходимо для оценки пригодности конструкции.

Перемещение точки конструкции есть сумма деформаций. Однако слово “сумма” фигурирует здесь в очень широком смысле. Определение перемещения точки требует анализа геометрических изменений в конструкции. А этот процесс всегда индивидуален и зависит от особенностей схемы и воздействия. Для пояснения сказанного и знакомства с методами определения перемещений рассмотрим конкретные примеры.

**Пример 5.3.** Построим эпюру продольных перемещений поперечных сечений стержня, воспринимающего растягивающую силу  $F$  (рис. 5.29 а). Длина, площадь сечения и материал стержня известны.

Перемещение сечения, отстоящего от закрепленного конца на расстоянии  $z$ , равно удлинению левой части стержня. По формуле (5.19)  $w(z) = Fz/(EA)$ . Смещение  $w$  пропорционально расстоянию  $z$ . Левый конец закреплен, перемещение его равно нулю. На правом конце  $w(l) = Fl/(EA)$ .

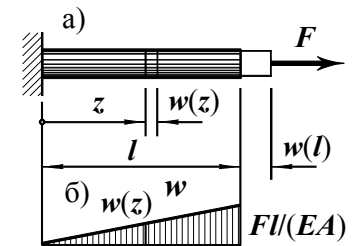


Рис. 5.29 а) Эпюра перемещений изображена на рис. 5.29 б).

**Пример 5.4.** Построим эпюру перемещений, вызванных собственным весом стержня (рис. 5.30 а). Известны площадь сечения  $A$ , длина стержня  $l$ , плотность  $\rho$  и модуль упругости материала  $E$ .

Воспользоваться непосредственно формулой (5.19) нельзя, так как она справедлива для стержня, нагруженного сосредоточенными силами на концах. Собственный же вес – нагрузка, распределенная по объему стержня.

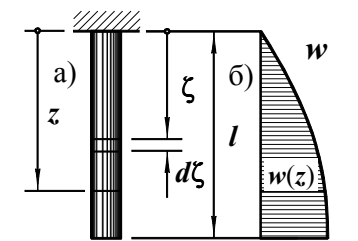


Рис. 5.30  $\rho g l^2 / (2E)$

Рассмотрим бесконечно короткий отрезок длиной  $d\zeta$ , отстоящий от верхнего конца на расстоянии  $\zeta$ . Сила, растягивающая его, равна весу нижней части стержня:  $N = \rho g A(l - \zeta)$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Пренебрегая весом самого отрезка, его удлинение можно найти по формуле (5.19):  $\Delta d\zeta = \rho g A(l - \zeta)d\zeta/(EA)$ .

Вертикальное перемещение  $w(z)$  сечения, отстоящего на расстоянии  $z$  от верха, равно удлинению верхней части – сумме удлинений элементарных отрезков, содержащихся в ней:

$$w(z) = \int_0^z \Delta d\zeta = \int_0^z (\rho g A(l - \zeta)d\zeta/(EA)) = \rho g(lz - z^2/2)/E.$$

Изменение продольных перемещений описывается квадратной параболой с  $w(0) = 0$ ,  $w(l) = \rho g l^2/(2E)$ .

Для определения направления выпуклости кривой продифференцируем  $w(z)$  по  $z$ :  $w'(z) = \rho g(l - z)/E$ . При  $z = l$  производная  $w'(l) = 0$ . Эпюра перемещений изображена на рис. 5.30 б.

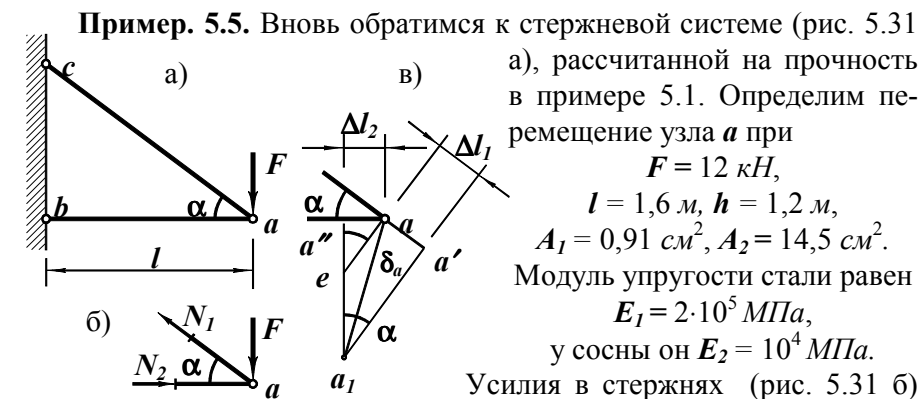


Рис. 5.31 Наклонный стержень (будем считать его первым) растянут, горизонтальный (второй) сжат.

По закону Гука (5.19) удлинение первого стержня

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / (E_1 A_1).$$

Учитывая, что  $l_1 = l / \cos \alpha = 1,6/0,8 = 2$  м, находим

$$\Delta l_1 = 20 \cdot 200 / (2 \cdot 10^4 \cdot 0,91) = 0,22 \text{ см.}$$

Укорочение горизонтального стержня

$$\Delta l_2 = N_2 l_2 / (E_2 A_2) = 16 \cdot 160 / (10^3 \cdot 14,5) = 0,18 \text{ см.}$$

Пример. 5.5. Вновь обратимся к стержневой системе (рис. 5.31 а), рассчитанной на прочность в примере 5.1. Определим перемещение узла  $a$  при

$$F = 12 \text{ кН,}$$

$$l = 1,6 \text{ м, } h = 1,2 \text{ м,}$$

$$A_1 = 0,91 \text{ см}^2, A_2 = 14,5 \text{ см}^2.$$

Модуль упругости стали равен

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа,}$$

у сосны он  $E_2 = 10^4 \text{ МПа.}$

Усилия в стержнях (рис. 5.31 б)

$$N_1 = 20 \text{ кН и } N_2 = 16 \text{ кН (см. пример}$$

Чтобы найти новое положение узла  $a$ , нужно из центра  $c$  провести дугу радиусом  $l_1 + \Delta l_1$  и из центра  $b$  радиусом  $l_2 - \Delta l_2$ . Точка пересечения дуг и есть новое положение узла.

Но, учитывая малость деформаций, можно упростить геометрическое построение – дуги заменить перпендикулярами:  $a'a_1$  к стержню 1 и  $a''a_1$  к стержню 2 (рис. 5.31 в). Определение перемещения узла  $a$  (отрезка  $aa_1 = \delta_a$ ) упростилось намного.

Горизонтальная часть перемещения  $u_a = \Delta l_2 = 0,18 \text{ см.}$  Для определения вертикальной составляющей проведем вспомогательную прямую  $ae$ . Тогда

$$v_a = a''e + ea_1 = \Delta l_2 / \tan \alpha + \Delta l_1 / \sin \alpha = 0,18/0,75 + 0,22/0,6 = 0,61 \text{ см.}$$

Полное перемещение  $\delta_a = \sqrt{u_a^2 + v_a^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,61^2} = 0,64 \text{ см.}$

Приведенные примеры проиллюстрировали индивидуальные приемы определения перемещений, вызванных продольными деформациями стержней. Используя примененные здесь методы, можно решать аналогичные задачи при других видах нагрузки и геометрических схемах конструкций.

5.14.2. Условие жесткости ограничивает деформации или перемещения. Его записывают в разных видах в зависимости от ограничиваемой характеристики деформированного состояния, например,

$$\delta \leq [\delta], \quad \epsilon \leq [\epsilon]. \quad (5.21)$$

Здесь  $\delta$  – перемещение какой-либо точки,  $\epsilon$  – деформация, вызванные внешней нагрузкой;  $[\delta]$  и  $[\epsilon]$  – допустимые значения перемещения или деформации.

## 5.15. Работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии

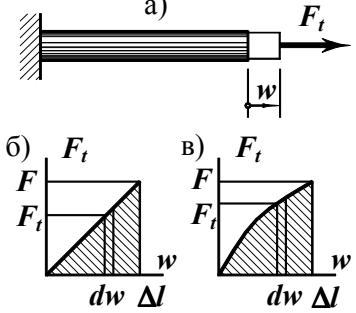
Так как с процессе деформирования стержня точки приложения сил перемещаются, *внешние силы совершают работу*. Работа силы  $F$ , приложенной к концу стержня (5.32 а),

$$W = \int_0^{\Delta l} F_l dw. \quad (5.22)$$

Геометрическими образами работы являются площади фигур, заштрихованных на рис. 5.32 б, в. Если перемещение пропорционально силе (рис. 5.32 б), то  $W = F\Delta l/2$ .

Работа силы, изменяющейся пропорционально перемещению точки ее приложения, равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение перемещения.

Если сила и перемещение точки ее приложения не пропорциональны друг другу, то работу следует определять из равенства (5.22).



В результате деформирования стержня изменяются внутренние усилия и межатомные расстояния – *внутренние силы также совершают работу*. Но так как внутренние силы – силы сопротивления, их работа отрицательна. При *статическом* нагружении (медленном, когда силы инерции пренебрежимы) внешние и внутренние силы совершают одинаковую работу (энергетическими затратами, связанными с термическими, электрическими, химическими и другими изменениями, можно также пренебречь).

Рис. 5.32

В результате работы внешних сил накапливается *потенциальная энергия деформации*. Доля потенциальной энергии деформации в работе внешних сил зависит от характера нагружения (статическое, динамическое) и степени напряженного состояния (упругая стадия деформирования или упругопластическая). При *статическом нагружении упругих конструкций потенциальная энергия деформации равна работе внешних сил*:  $U = W$ .

Потенциальную энергию деформации можно найти и так (см. формулу (5.8)):  $U = \int_V (\sigma_z^2/2E)dV = (\int_l (\int_A \sigma_z^2 dA) dz)/(2E)$ . Учитывая равенство (5.10), получаем  $U = \int_l N^2 (\int_A dA) dz / (2EA^2)$ . Но  $\int_A dA = A$ . Отсюда потенциальная энергия деформации стержня

$$U = N^2 l / (2EA). \quad (5.24)$$

Для стержневой конструкции, состоящей из  $n$  стержней, формула потенциальной энергии деформации принимает вид

$$U = \sum_{i=1}^n N_i^2 l_i / (2E_i A_i) \quad (5.25)$$

Формулу (5.25) можно применять, если  $N_i$ ,  $l_i$ ,  $E_i$  и  $A_i$  в пределах  $i$ -го стержня постоянны.

## 5.16. Понятие о коэффициенте запаса

*Коэффициент запаса* является одним из количественных показателей надежности конструкции. В нормах расчета и проектирования строительных конструкций это понятие дифференцировано и отдельно отражает

- изменчивость механических свойств материала;
- возможность отклонения нагрузки от предполагаемой;
- условия работы конструкции;
- достоверность теоретических методов прогнозирования возможных состояний конструкции и т.п.

Не обладая необходимыми сведениями, будем толковать этот термин упрощенно. Под *коэффициентом запаса* будем понимать число, показывающее, во сколько раз можно увеличить нагрузку до достижения предельного состояния.

Из приведенной формулировки следует, что коэффициент запаса связан с видом предельного состояния. Можно говорить о коэффициенте запаса *прочности*, коэффициенте запаса *жесткости*. В дальнейшем будут введены новые понятия предельных состояний и вместе с ними новые понятия коэффициентов запаса.

Согласно данному определению коэффициент запаса

$$n = F_u / F, \quad (5.26)$$

$F_u$  – предельный (по оговоренному критерию) параметр нагрузки;  $F$  – параметр действующей нагрузки.

В тех случаях, когда критерий предельного состояния изменяется пропорционально нагрузке, отношение сил можно заменить отношением критериев. Например, *коэффициент запаса прочности*  $n = \sigma_u / \sigma_{max}$ . Приняв в качестве предельного напряжения нормативное сопротивление материала, приходим к выражению

$$n = R_n / \sigma_{max}. \quad (5.27)$$

Здесь  $\sigma_{max}$  – максимальное напряжение в конструкции от действующей нагрузки.

Если нормативные сопротивления на растяжение и сжатие у материала разные, отдельно определяют запас прочности по растяжению  $n_t = R_{nt} / \max \sigma_t$  и по сжатию  $n_c = R_{nc} / \max \sigma_c$ . Действительный – меньший из них, он определяет запас прочности конструкции.

Осевое растяжение и сжатие являются простейшими видами нагружения. По этой причине они достаточно хорошо изучены экспериментально. Лабораторные исследования показали, что при нагружении стержня

- изменяются внутренние силы;
- изменяются размеры стержня;
- накапливается потенциальная энергия деформации;
- скорость нарастания деформаций зависит от величины напряжений и условий, в которых стержень воспринимает нагрузку.

Использование

- гипотезы плоских сечений,
- зависимости напряжений от деформаций,
- законов статики

позволило получить важные приближенные решения задач о напряженном и деформированном состоянии стержня – аппарат теоретического прогнозирования поведения элементов стержневых строительных конструкций.

## 6. Кручение

Кручение – это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают крутящие моменты, а следовательно, и касательные напряжения. Как и в предыдущем разделе

– познакомимся с результатами испытаний материалов на сдвиг;

– решим простейшие задачи о кручении стержней с сечением круглой или кольцевой формы;

– используем математическую аналогию задач изгиба мембран и кручения стержней для получения представлений о распределении напряжений в различных типах некруглых сечений;

– приведем основные положения и формулы расчетов стержневых элементов строительных конструкций на кручение.

### 6.1. Испытания на сдвиг.

#### Расчетное сопротивление материала на срез.

#### Условие прочности

6.1.1. Для испытаний материалов на сдвиг используют тонкостенные трубчатые образцы и нагружают их крутящими моментами (рис. 6.1 а).

В поперечных сечениях таких образцов возникают касательные напряжения  $\tau_{zs}$  (рис. 6.1 б). Из-за малой толщины стенки и кольцевой формы сечения напряженное состояние трубок однородное.

Касательные напряжения по свойству парности возникают и в радиальных

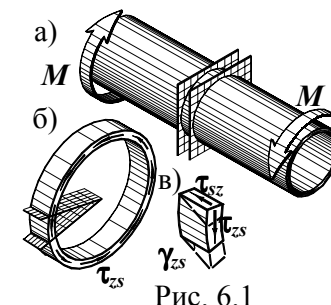


Рис. 6.1





- поперечные линии, плоские до деформации, остались плоскими и после деформации;
- расстояния между поперечными линиями не изменились;
- прямоугольники, образованные продольными и поперечными линиями, приняли форму параллелограммов.

Наблюдения и замеры поверхностных деформаций позволили обосновать и принять предпосылки о геометрических изменениях внутри стержня. Теория кручения стержней с сечением круглой и кольцевой формы опирается на предположение о том, что **поперечные сечения поворачиваются вокруг продольной оси, как жесткие диски**, т.е.

- в процессе деформирования стержня они остаются плоскими;
- расстояния между любыми двумя точками одного сечения не изменяются.

С точностью введенной предпосылки можно утверждать, что линейные деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях, соответствующих цилиндрической координатной системе  $z, r, s$ , отсутствуют:  $\epsilon_z = \epsilon_r = \epsilon_s = 0$ . (а)

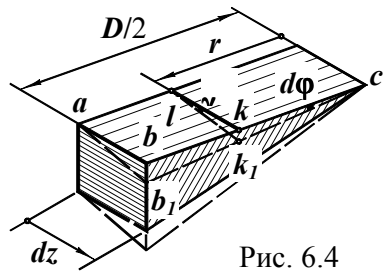


Рис. 6.4

Для описания сдвиговой деформации вырежем из стержня элемент – двумя бесконечно близкими поперечными плоскостями – и двумя радиальными плоскостями (рис. 6.4).

Сравним вид элемента до деформации (сплошные линии) и после

нее (штриховые линии), совместив невидимые на рисунке треугольные грани:

- радиус  $cb$  повернулся на угол  $d\phi$ ;
- точка  $k$  сместилась перпендикулярно радиусу в положение  $k_1$ ;
- угол между волокном  $lk$  и поперечным сечением (до деформации прямой) изменился на  $\gamma_{zs}$ .

Из треугольников  $klk_1$  и  $kck_1$  получаем:  $kk_1 = \gamma_{zs}dz$ ,  $kk_1 = rd\phi$ , или  $\gamma_{zs}dz = rd\phi$ , откуда  $\gamma_{zs} = rd\phi/dz$ . (б)

Здесь  $\gamma_{zs}$  – относительный сдвиг в плоскости, перпендикулярной радиусу;  $d\phi/dz$  – относительный угол закручивания.

- Равенства (а) и (б) описывают деформации в сечении стержня:
- удлинения в продольном, радиальном и окружном направлениях отсутствуют;
- в плоскостях, перпендикулярных радиусам, происходят сдвиги;
- величины сдвиговых деформаций растут пропорционально удаленности точки от центра сечения.

### Физическая сторона задачи

Отсутствие линейных деформаций свидетельствует об отсутствии нормальных напряжений (в указанных направлениях):

$$\sigma_z = \sigma_r = \sigma_s = 0.$$

Касательное напряжение связано с относительным сдвигом законом Гука (6.1):  $\tau_{zs} = G\gamma_{zs}$ . (в)

Напряжение  $\tau_{zs}$  как и сдвиг  $\gamma_{zs}$  направлено перпендикулярно радиусу, проведенному в точку.

### Статическая сторона задачи

Запишем условие статической эквивалентности (см. равенства (3.1)) между касательными напряжениями и крутящим моментом (рис. 6.5).

$$M_z = \int_A \tau_{zs} r dA. \quad (г)$$

Уравнения (а) ... (г) позволяют решить поставленную задачу.

Подстановка выражения (б) в (в) показывает, что

$$\tau_{zs} = Grd\phi/dz. \quad (д)$$

Подставляя теперь равенство (д) в условие (г), находим

$$M_z = \int_A \tau_{zs} r dA = G(d\phi/dz) \int_A r^2 dA.$$

Но  $\int_A r^2 dA = J_p$  – полярный момент инерции сечения. Итак,

$$M_z = GJ_p d\phi/dz. \quad (6.4)$$

Поделив левые и правые части равенств (д) и (6.4), получаем окончательный результат

$$\tau_{zs} = M_z r / J_p. \quad (6.5)$$

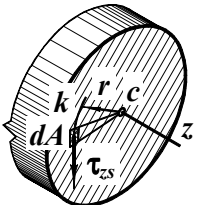


Рис. 6.5

В поперечном сечении круглой или кольцевой формы при кручении

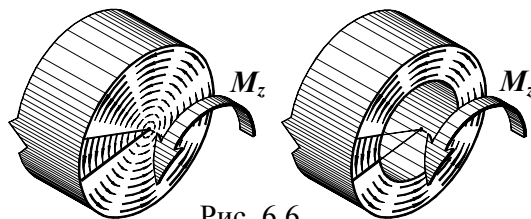


Рис. 6.6

– возникают только касательные напряжения;  
– линии их действия – концентрические окружности, центры которых совпадают с центром сечения;

– напряжения растут по мере удаления точки от центра;  
– величина напряжения прямо пропорциональна крутящему моменту, расстоянию от точки до центра и обратно пропорциональна полярному моменту инерции сечения.

Распределение напряжений в круглом и кольцевом сечениях проиллюстрировано рис. 6.6.

Формула (6.5) справедлива

– до тех пор, пока наибольшие касательные напряжения не превысят предел пропорциональности (при ее выводе использован закон Гука);

– независимо от материала стержня (правда, в процессе вывода формулы негласно использовано предположение об однородности и изотропии материала, следовательно это ограничение следует иметь в виду);

– в местах, удаленных от точек приложения внешних сил (см. принцип Сен-Венана).

При нарушении какого-либо из отмеченных ограничений распределение напряжений в сечении будет иным.

### 6.3. Напряженное состояние при кручении. Расчет на прочность

6.3.1. Напряженное состояние материала при кручении стержня в разных точках сечения однотипно – чистый сдвиг. Однако величины напряжений в равноудаленных от центра точках различны. Исследуем напряженное состояние в некоторой произвольной точке  $k$  (рис. 6.4, 6.5, 6.7 а). Выясним,

- как ориентированы в ней главные площадки;
- каковы главные напряжения;

– в каких площадках возникают наибольшие касательные напряжения;

– чему равны максимальные касательные напряжения.

Для рассматриваемого типа плоского напряженного состояния олицетворением всевозможных площадок, проходящих через точку  $k$ , служит боковая поверхность элементарного цилиндра (рис. 6.7 б, в). В соответствии с формулами



Рис. 6.7

– главные площадки наклонены к поперечному сечению под  $45^\circ$  (в плоскости, перпендикулярной радиусу);

– главные напряжения  $\sigma_{max} = \tau_{zs}$  (растягивающее),  $\sigma_{min} = -\tau_{zs}$  (такое же по величине, но сжимающее);

– наибольшие касательные напряжения возникают в площадках, лежащих в плоскости поперечного сечения, и перпендикулярных им радиальных площадках;

– наибольшие касательные напряжения  $\tau_{max} = \tau_{zs}$ .

6.3.2. Формула (6.5) и проведенный анализ напряженного состояния свидетельствует, что в круглом или кольцевом сечении

– опасными являются точки, наиболее удаленные от центра;

– максимальные касательные напряжения возникают в площадках, лежащих в поперечном сечении.

В соответствии с формулой (6.5)  $\tau_{max} = M_z r_{max} / J_p = M_z D / (2J_p)$ , где  $D$  – диаметр сечения (у кольца – наружный диаметр). Если объединить геометрические характеристики сечения и обозначить

$$2J_p / D = W_p, \quad (6.6)$$

<sup>1</sup> Знак “минус” введен потому, что направление касательного напряжения в рассматриваемом случае противоположно принятому положительным при выводе используемых формул.

то формула максимальных касательных напряжений при кручении примет вид

$$\tau_{max} = M_z / W_p. \quad (6.7)$$

Новая геометрическая характеристика  $W_p$  носит название **полярного момента сопротивления сечения**. У круга согласно формулам (6.6) и (2.17)

$$W_p = \pi D^3 / 16; \quad (6.8)$$

у кольца (2.19)

$$W_p = \pi D^3 (1 - \delta^4) / 16. \quad (6.9)$$

В соответствии с ограничением (6.3) и формулой (6.7) условие прочности материала при кручении стержня записывают так:

$$\tau_{max} = M_z / W_p \leq R_s. \quad (6.10)$$

Левая и средняя часть условия (6.10) – напряжения в опасных точках от внешней нагрузки. Таким образом, *максимальные касательные напряжения, вызванные внешней нагрузкой, не должны превышать расчетного сопротивления материала на срез.*

**Пример 6.1.** Подберем диаметр стержня (рис. 6.8), воспринимающего крутящий момент 220 Нм, если расчетное сопротивление материала на срез  $R_s = 150$  МПа.

Из условия прочности (6.10) требуемый момент сопротивления  $W_p \geq M_z / R_s = 220 / (150 \cdot 10^6) = 1,47 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ . У круга момент сопротивления (6.8)  $W_p = \pi D^3 / 16$ . Отсюда  $D \geq \sqrt[3]{16 W_p / \pi} = \sqrt[3]{16 \cdot 1,47 \cdot 10^{-6} / 3,14} = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Принимаем  $D = 2 \text{ см}$ .

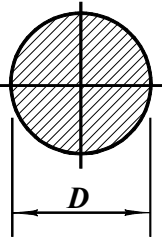


Рис. 6.8

## 6.4. Деформации и перемещения при кручении.

### Расчет на жесткость

6.4.1. При кручении (рис. 6.9)

– элементарные параллелепипеды с ребрами, параллельными цилиндрическим координатам  $z, r, s$ , претерпевают деформацию сдвига: поперечные грани перемещаются, оставаясь в плоскости сечения;

– стержень закручивается;

– поперечные сечения поворачиваются как жесткие диски вокруг оси стержня.

Количественной мерой сдвиговой деформации является относительный сдвиг, который по закону Гука (6.1) пропорционален касательному напряжению:  $\gamma_{zs} = \tau_{zs} / G$ .

Мерой интенсивности деформирования стержня является **относительный угол закручивания**  $\theta = d\varphi/dz$ . По равенству (6.4)

$$\theta = d\varphi/dz = M_z / (GJ_p). \quad (6.11)$$

Пропорциональность деформации ( $\theta$ ) усилию ( $M_z$ ) – утверждение Гука. Поэтому равенство (6.11) – представляет собой **закон Гука при кручении**.

Взаимный поворот крайних сечений участка – это **угол закручивания**. Из равенства (6.11)  $d\varphi = M_z dz / (GJ_p)$ , откуда  $\varphi(l) = \int_l M_z dz / (GJ_p)$ .

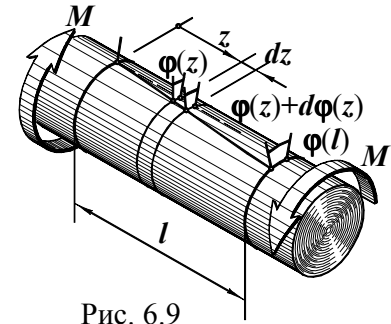


Рис. 6.9

В стержне постоянного сечения при неизменном крутящем моменте

$$\varphi(l) = M_z l / (GJ_p). \quad (6.12)$$

Формула (6.12) является еще одной разновидностью закона Гука при кручении.

Произведение  $GJ_p$ , стоящее в знаменателях равенств (6.11) и (6.12), носит название **жесткости при кручении**.

В результате закручивания стержня поперечные сечения поворачиваются вокруг продольной оси. Мерой смещения сечения является **угол поворота**. Угол поворота – сумма углов закручивания от закрепленного места до рассматриваемого.

6.4.2. Расчет на жесткость при кручении производят по условиям

$$\theta \leq [\theta] \quad \text{или} \quad \varphi \leq [\varphi] \quad (6.13)$$

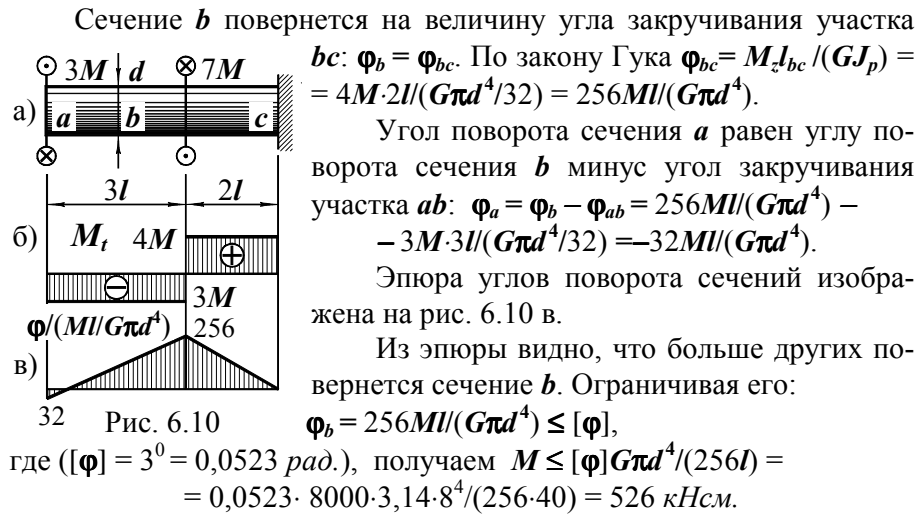
в зависимости от того, на какую характеристику деформации установлено ограничение. В условиях (6.13)  $\theta$  и  $\varphi$  – относительный и полный углы закручивания или угол поворота, вызванные внешней нагрузкой,  $[\theta]$  и  $[\varphi]$  – допускаемые их значения.

**Пример 6.2.** Определим нагрузку, при которой углы поворота стального стержня (рис. 6.10 а) с  $l = 40 \text{ см}$  и  $d = 8 \text{ см}$  не превысят  $3^\circ$ .

Первый этап решения – построение эпюры крутящего момента. Она изображена на рис. 6.10 б.

Второй этап – построение эпюры углов поворота сечений.

Правый конец стержня закреплен. Угол поворота сечения с  $\varphi_c = 0$ .



### 6.5. Потенциальная энергия деформации при кручении

Имея формулы касательных напряжений (6.5) и удельной потенциальной энергии при сдвиге (6.2), нетрудно определить потенциальную энергию деформации стержня при кручении. Действительно,

$$U = \int_V u dV = \int_V (\tau_{zs}^2 / 2G) dV = \int_l \left( \int_A (M_z r / (2GJ_p))^2 dA \right) dz = \int_l (M_z^2 / (2GJ_p)) \left( \int_A r^2 dA \right) dz. \text{ Но } \int_A r^2 dA = J_p. \text{ Отсюда}$$

$$U = M_z^2 l / (2GJ_p). \quad (6.14)$$

Для конструкции из  $n$  стержней, или стержня с  $n$  участками формула потенциальной энергии деформации принимает вид

$$U = \sum_{i=1}^n M_{zi}^2 l_i / (2GJ_{pi}) \quad (6.15)$$

Формулу (6.15) можно применять, если  $M_{zi}$ ,  $G_i$  и  $J_{pi}$  в пределах  $i$ -го стержня (участка) постоянны.

### 6.6. Кольцо – оптимальная форма сечения при кручении

Из-за неравномерного распределения напряжений при кручении прочностные свойства материала, расположенного вблизи центральной зоны сечения, используются не полностью. Поэтому целесообразно материал изъять из центра и добавить к периферийной части. В итоге при сохранении прочности уменьшается расход материала.

Согласно условию прочности (6.10) круглое и кольцевое сечения (рис. 6.11) способны воспринять одинаковые крутящие моменты, если полярные моменты сопротивления  $W_p$  у них равны:

$$\pi D_1^3 / 16 = \pi D_2^3 (1 - \delta^4) / 16.$$

Отсюда

$$D_2 / D_1 = (1 - \delta^4)^{-1/3}.$$

Верхняя кривая на рис. 6.12 показывает, во сколько раз внешний диаметр равнопрочного кольцевого сечения превышает диаметр круга при разных отношениях  $\delta = d / D_2$ . Так, если заменить круг кольцом, например, с  $\delta = 0,8$ , то его наружный диаметр следует принять  $D_2 = 1,2 D_1$ .

Расход материала пропорционален площади сечения. Поэтому экономии материала можно оценить отношением

$$A_2 / A_1 = D_2^2 (1 - \delta^2) / D_1^2.$$

Соответствующая этому равенству кривая также изображена на рис. 6.12. У заменяющего круга диаметр  $D_2 = 1,2 D_1$  – на 20% больше, площадь же  $A_2 = 0,512 A_1$  уменьшена почти вдвое. Если круг заменить кольцом с  $\delta = 0,95$ , то  $D_2 = 1,75 D_1$ , площадь  $A_2 = 0,3 A_1$ . Чем тоньше кольцо, тем больше экономия материала.

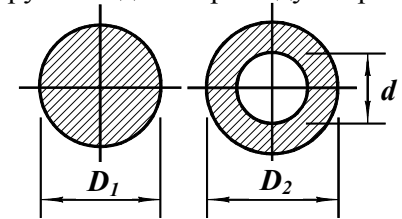


Рис. 6.11

Отметим, что отношение полярных моментов инерции равнопрочных кольца и круга  $J_{p2} / J_{p1} = D_2 / D_1$ . Восходящая кривая отношения диаметров говорит о том, что с заменой круга кольцом увеличивается и жесткость стержня.

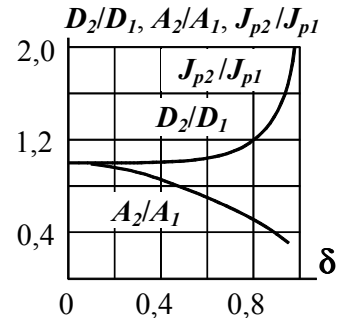


Рис. 6.12

Несмотря на то, что с ростом  $\delta$  растет экономия материала, нельзя беспрестанно приближаться к  $\delta = 1$ , так как кольцо станет чрезмерно тонкостенным. Возникнет опасность искривления сечения в процессе кручения. О качественном описании подобных процессов и количественной их оценке – в последующих разделах курса.

## 6.7. Понятие о свободном и стесненном кручении.

### Мембранная аналогия

6.7.1. В задаче о кручении стержня круглого или кольцевого поперечного сечения последние рассматривались, как жесткие диски. Основанием такой предпосылки служили лабораторные испытания.

Аналогичные наблюдения и замеры деформаций показывают,

что поперечные сечения некруглой формы в процессе закручивания стержня искривляются – **депланируют**. Оснований для введения гипотезы плоских сечений нет.

Депланация прямоугольного сечения показана на рис. 6.13 а. Поверхность, которую представляет собой депланированное сечение, состоит из восьми треугольных областей, разделенных осями симметрии прямоугольника и его диагоналями. Знаки депланаций в соседних областях различны: выпуклые области соседствуют с вогнутыми.

Депланацию сечений тонкостенных стержней закрытого профиля иллюстрирует рис. 6.13 б, открытого – рис. 6.13 в. Прямолинейные участки сечений остаются прямолинейными, но выходят из начальной плоскости. Знаки продольных смещений углов различны: один наружу, соседний внутрь.

Если продольные перемещения точек происходят беспрепятственно (свободная депланация), то нормальные напряжения в сечении не возникают. В таком случае *кручение называют свободным или чистым*. Если же депланация стеснена, то в поперечных сечениях наряду с касательными возникают и нормальные напряжения. *Кручение носит название стесненного*.

Решение задачи о кручении стержня с сечением некруглой формы основано на более общих геометрических предпосылках и сводится к сравнительно сложным уравнениям теории упругости.

6.7.2. В естествознании нередко встречаются совершенно различные по своей сущности явления, приводящиеся к одной и той же математической задаче. Уравнения, описывающие эти явления, одинаковы (сравни, например, формулы разделов 2 и 4). Наличие математической аналогии позволяет изучение одного процесса заменить изучением другого.

Задача о кручении стержня с математической точки зрения аналогична другой задаче – деформации гибкой упругой мембраны под равномерным давлением. Эта аналогия устанавливает, что, если

- в жесткой невесомой пластинке вырезать отверстие, повторяющее сечение стержня, подверженного кручению,
- затянуть это отверстие пленкой,
- нагрузить пленку давлением, то
- направление касательного напряжения в рассматриваемой точке сечения стержня совпадает с касательной к линии уровня (параллельной плоскости пластины) изогнутой поверхности пленки в соответствующей точке;

– величина касательного напряжения пропорциональна тангенсу угла между линией наибольшего ската (касательной к пленке и перпендикулярной линии уровня) и плоскостью отверстия.

Отмеченные положения мембранной аналогии позволяют

- установить направление потока касательных напряжений;
- представить картину распределения напряжений;
- выявить опасные точки.

Полученная таким образом информация предоставляет возможность в отдельных случаях ввести необходимые предпосылки и решить задачу. Часто пользуются готовыми решениями теории упругости. В итоге появляется возможность вычисления напряжений и деформаций, проверки прочности материала и жесткости стержня.

## 6.8. Свободное кручение стержней массивного сечения.

### Прямоугольное сечение

К массивным относят сечения с соизмеримыми высотой и шириной. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения.

Распределение касательных напряжений установим с помощью мембранной аналогии (рис. 6.14 а). Из нее следует:

– в точках, расположенных на контуре сечения, напряжения параллельны соответствующим сторонам (линии уровня, эллипсообразные вблизи вершины, по мере приближения к краю отверстия трансформируются в прямоугольник);

– напряжение в центре сечения равно нулю (все касательные линии к изогнутой поверхности пленки в ее вершине параллельны плоскости пластины);

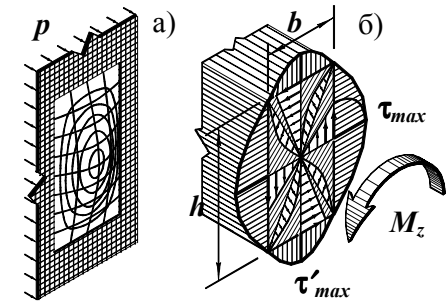


Рис. 6.14

– наибольшие касательные напряжения возникают в точках, лежащих посередине длинных сторон прямоугольника (здесь максимальные углы между линиями наибольшего ската и плоскостью пластины);

– в точках, расположенных посередине коротких сторон напряжения также достигают значительных величин;

– в угловых точках сечения напряжения равны нулю (что, впрочем, вытекает из свойства парности касательных напряжений).

Эпюры касательных напряжений в частных направлениях показаны на рис. 6.14 б.

Формулы для определения напряжений и деформаций:

Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.16)$$

Здесь  $W_t$  – геометрическая характеристика, называемая *моментом сопротивления при свободном кручении*,

$$W_t = \beta b^3, \quad (6.17)$$

$b$  – меньшая сторона прямоугольника.

Напряжения посередине коротких сторон  $\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}$ . (6.18)

Относительный угол закручивания

$$\theta = d\varphi/dz = M_z / GJ_t \quad (6.19)$$

В этой формуле  $J_t$  – *момент инерции при свободном кручении*,

$$J_t = \alpha b^4. \quad (6.20)$$

В формулах (6.17), (6.18) и (6.20)  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от отношения большей стороны прямоугольника к меньшей. Их значения приведены в табл. 6.1.

Напряжения и деформации в стержнях с сечениями иной формы также определяются по формулам (6.16) и (6.19). Но моменты инерции и моменты сопротивления у них иные. Формулы  $W_t$  и  $J_t$  наиболее распространенных типов сечений приведены в справочной литературе.

**Пример 6.3.** Определить допустимый крутящий момент  $[M_z]$ , если сечение стержня – прямоугольник  $6 \cdot 10 \text{ см}^2$ , материал – сталь 09Г2С ( $R_s = 195 \text{ МПа}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ); допустимый относительный угол закручивания  $[\theta] = 5^0/\text{м}$ .

Согласно условию прочности (6.10) запишем  $M_z \leq R_s \cdot W_t$ . По равенству (6.17)  $W_t = \beta b^3$ . Из таблицы 6.1  $\beta(h/b = 1,5) = 0,346$ ,  $\beta(h/b = 2) = 0,493$ ; по линейной интерполяции,  $\beta(h/b = 10/6 = 1,667) = 0,346 + (0,493 - 0,346) \cdot 0,167/0,5 = 0,394$ . Теперь

$$W_t = \beta b^3 = 0,394 \cdot 6^3 = 85,1 \text{ см}^3.$$

По условию прочности  $M_z \leq R_s \cdot W_t = 195 \cdot 10^3 \cdot 85,1 \cdot 10^{-6} = 16,6 \text{ кНм}$ .

Условие жесткости (6.13) при подстановке в него формулы (6.19) имеет вид  $\theta = M_z / (GJ_t) \leq [\theta]$ . В нем (см. формулу (6.20))  $J_t = \alpha b^4$ . По таблице 6.1, линейно интерполируя, находим  $\alpha = 0,348$ ;  $J_t = 0,348 \cdot 6^4 = 451 \text{ см}^4$ . По условию жесткости  $M_z \leq [\theta] GJ_t = 5 \cdot (\pi/180) \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 451 \cdot 10^{-8} = 31,4 \text{ кНм}$ .

Окончательно  $[M_z] = 16,6 \text{ кНм}$ .

## 6.9. Свободное кручение

### тонкостенных стержней открытого профиля

Тонкостенными считают сечения, у которых толщина стенки значительно меньше ширины и высоты.

На основе мембранной аналогии (рис. 6.15 а) можно принять следующее распределение касательных напряжений (рис. 6.15 б):

– напряжение в точке направлено параллельно средней линии того участка, которому принадлежит точка (линии уровня параллельны средним линиям практически всюду за исключением малых зон у концов участков);

– в точках средней линии напряжения равны нулю (плоскости, касательные к поверхности пленки, параллельны плите);

– по толщине участка напряжения изменяются линейно (это – предположение, не дающее большой погрешности из-за малой толщины стенки).

Напряжения в контурных точках  $i$ -го участка определяются по формуле

$$\max \tau_{zb}^i = M_z t_i / J_t. \quad (6.21)$$

В ней  $t_i$  – толщина  $i$ -го участка;  $J_t$  – момент инерции сечения при свободном кручении:

$$J_t = \sum_1^n b_i t_i^3 / 3. \quad (6.22)$$

Максимальные напряжения возникают в контурных точках участка с наибольшей толщиной:  $\tau_{max} = M_z t_{max} / J_t$ . Обозначив

$$J_t / t_{max} = W_t, \quad (6.23)$$

получаем

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.24)$$

$W_t$  – момент сопротивления сечения при свободном кручении.

Углы закручивания:

$$\theta = d\varphi/dz = M_z / (GJ_t), \quad \varphi(l) = M_z l / (GJ_t). \quad (6.25)$$

### 6.10. Напряжения в поперечном сечении тонкостенного стержня закрытого профиля при свободном кручении

Наблюдения за деформациями мембраны (рис. 6.16 а) позволяют принять следующее распределение касательных напряжений по сечению (рис. 6.16 б):

– напряжение параллельно средней линии стенки в месте расположения рассматриваемой точки (линии уровня практически параллельны средней линии);

– по толщине стенки напряжения не изменяются (линии наибольшего ската можно считать прямыми).

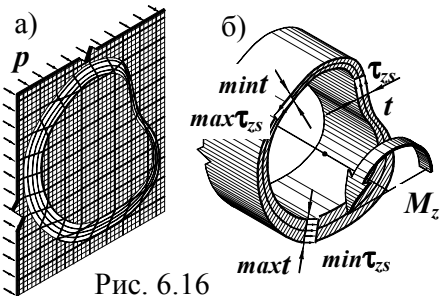


Рис. 6.16

Исходя из принятых предпосылок, выведем формулу касательных напряжений.

Условие статической эквивалентности имеет вид  $M_z = \int_s \tau_{zs} r dA$  (рис. 6.17 а). Но  $dA = t ds$ . Тогда  $M_z = \int_s \tau_{zs} r t ds$  (а)

Знак “s” под интегралом указывает, что интегрирование ведется по всей средней линии стенки (по замкнутому контуру).

Двумя перпендикулярными средней линии продольными плоскостями и двумя поперечными плоскостями вырежем элемент из стержня (рис. 6.17 б). В точке 1 обозначим толщину стенки  $t_1$ , напряжение  $\tau_{zs1}$ ; в точке 2 –  $t_2$  и  $\tau_{zs2}$ . На основании свойства парности касательных напряжений в продольных сечениях также возникают напряжения  $\tau_{sz1}$  и  $\tau_{sz2}$ .

Спроецируем силы, приложенные к рассматриваемому элементу, на ось z:

$$\tau_{sz1} t_1 dz - \tau_{sz2} t_2 dz = 0,$$

отсюда  $\tau_{sz1} t_1 = \tau_{sz2} t_2$ . Поскольку полученное равенство справедливо при любых положениях точек 1 и 2, то  $\tau_{sz} t = \text{const}$ . Произведение  $\tau_{sz} t$  по длине контура не изменяется. В том месте, где стенка тоньше, напряжение соответственно больше, и наоборот. Принимая во внимание парность касательных напряжений, вынесем в равенстве (а) произведение  $\tau_{zs} t$  за знак интеграла:

$$M_z = \tau_{zs} t \int_s r ds.$$

Произведение же  $r ds$  представляет собой удвоенную площадь треугольника  $abc$ , а интеграл по длине замкнутого контура – удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией стенки. Итак,  $M_z = \tau_{zs} t 2\Omega$ , т.е.  $\tau_{zs} = M_z / (2\Omega t)$ . (6.26)

Здесь  $\Omega$  – площадь фигуры, ограниченной средней линией стенки;  $t$  – толщина стенки в рассматриваемом месте.

Из формулы (6.26) видно, что наибольшие касательные напряжения возникают там, где стенка имеет меньшую толщину:  $\tau_{max} = M_z / (2\Omega t_{min})$ . Обозначив  $2\Omega t_{min} = W_t$ , (6.27)

приведем формулу к общепринятому виду:

$$\tau_{max} = M_z / W_t. \quad (6.28)$$

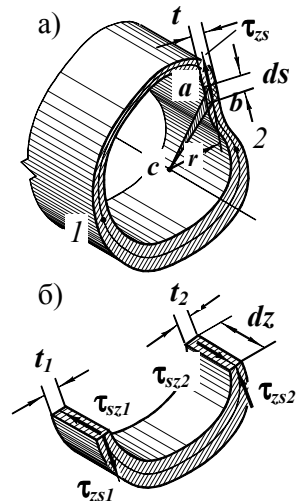


Рис. 6.17



## 6.11. Деформации тонкостенных стержней закрытого профиля при свободном кручении

Выведем формулу угла закручивания. Для этого приравняем работу внешнего момента и потенциальную энергию деформации. Работа, совершаемая внешним моментом  $M$ , возрастающим пропорционально углу поворота  $\varphi$  (рис. 6.18 а),

$$W_M = M\varphi/2. \quad (а)$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная в бесконечно малом элементе (рис. 6.18 б),  $dU = \tau_{zs} t ds \cdot \gamma_{zs} dz/2$ . Но по закону Гука (6.1)  $\gamma_{zs} = \tau_{zs}/G$ , следовательно,

$$dU = \tau_{zs}^2 \cdot t ds \cdot dz / (2G).$$

Чтобы получить потенциальную энергию, накопленную в стержне, проинтегрируем по замкнутому контуру и по длине:

$$U = \int_l \left( \int_s \tau_{zs}^2 t ds / (2G) \right) dz. \quad (б)$$

Подставим равенство (6.26) в выражение

$$(б): U = \int_l \left( \int_s M_z^2 t \cdot ds / (2G \cdot 4\Omega^2 t^2) \right) dz. \text{ Вынося за знак интеграла постоянные множители, имеем } U = M_z^2 \int_l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2) dz.$$

Интеграл по замкнутому контуру  $\int_s (ds/t)$  является геометрической характеристикой сечения. Если сечение постоянно, она не зависит от  $z$ . Тогда

$$U = M_z^2 l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2). \quad (в)$$

Приравняем теперь работу внешнего момента (а) потенциальной энергии деформации (в):  $M\varphi/2 = M_z^2 l \left( \int_s ds/t \right) / (8G\Omega^2)$ . А так как  $M_z = M$ , приходим к равенству  $\varphi = M_z l \left( \int_s ds/t \right) / (4G\Omega^2)$ . Если обозначить

$$4\Omega^2 / \left( \int_s ds/t \right) = J_t, \quad (6.29)$$

получим формулу угла закручивания в обычном виде:

$$\varphi = M_z l / (GJ_t). \quad (6.30)$$

$J_t$  – момент инерции тонкостенного замкнутого сечения при свободном кручении.

Для иллюстрации применения формул и сравнения прочностных и жесткостных характеристик прямоугольного и тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей приведем примеры.

**Пример 6.4.** Подберем коробчатое сечение (рис. 6.19), равнопрочное при кручении прямоугольнику  $6 \times 10$  см. Сравним расход материала и жесткости при кручении.

Два стержня при кручении равнопрочны, если имеют одинаковые моменты сопротивления  $W_t$ . В примере 6.3 у прямоугольного сечения  $W_t = 85,1$  см<sup>3</sup>.

У коробчатого сечения по формуле (6.27)  $W_t = 2\Omega \cdot t_{min} = 2 \cdot 9t \cdot 16t \cdot t = 85,1$  см<sup>3</sup>. Отсюда  $t = 0,67$  см.

Расход материала пропорционален площади сечения. У прямоугольника  $A = 6 \cdot 10 = 60$  см<sup>2</sup>. У коробчатого сечения  $A = 68t^2 = 30,1$  см<sup>2</sup>. Материала для него требуется меньше почти в два раза.

Жесткость при кручении пропорциональна моменту инерции  $J_t$ . По формуле (6.29)  $J_t = 4\Omega^2 / \left( \int_s ds/t \right) =$

$$= 4(9t \cdot 16t)^2 / (2(9t/2t) + 2(16t/t)) = 2023t^4 = 2023 \cdot 0,67^4 = 408$$
 см<sup>4</sup> на 10 % ниже чем у прямоугольника (451 см<sup>4</sup>).

**Пример 6.5.** Во сколько раз изменится допустимый крутящий момент, если коробчатое сечение, рассмотренное в примере 6.4 разомкнуть (рис. 6.20)? Как изменится жесткость?

Величина допустимого момента  $[M]$  пропорциональна моменту сопротивления сечения  $W_t$ .

У тонкостенного открытого профиля по формулам (6.22) и (6.23)  $W_t = \left( \sum_1^n b_i t_i^3 \right) / (3t_{max}) =$

$$= 9t(2t)^3 + 16t \cdot t^3 / (3 \cdot 2t) =$$

$$= 29,3t^3 = 29,3 \cdot 0,67^3 = 8,82$$
 см<sup>3</sup>.

У замкнутого сечения  $W_t = 85,1$  см<sup>3</sup>. Отношение  $85,1/8,82 = 9,65$  говорит о том, что у открытого профиля допускаемый момент почти на порядок ниже.

Момент инерции  $J_t = \left( \sum_1^n b_i t_i^3 \right) / 3 =$

$$= (9t(2t)^3 + 16t \cdot t^3) / 3 = 58,7t^4 = 58,7 \cdot 0,67^4 = 11,6$$
 см<sup>4</sup> в 35 раз меньше чем у замкнутого профиля.

Сопоставление показывает, что тонкостенные стержни открытого профиля обладают низкой прочностью и жесткостью при кручении.

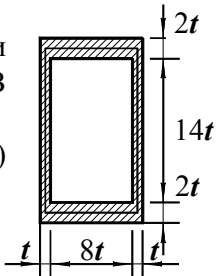


Рис. 6.19

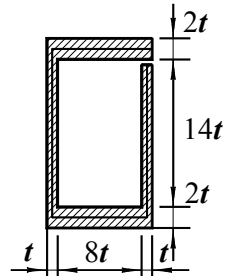


Рис. 6.20

Материал, приведенный в этом разделе, показывает, что

- распределение напряжений по сечению при кручении существенно неравномерно;
- в сечениях различных типов распределение напряжений качественно различно;
- все типы сечений следует делить на четыре группы:
  - круглые и кольцевые;
  - массивные сечения некруглой формы;
  - тонкостенные замкнутого профиля;
  - тонкостенные открытого профиля;
- для каждого типа сечения соответственно применимы разные формулы определения напряжений и деформаций;
- наиболее подходящей формой сечения является кольцо;
- наименее пригодны тонкостенные открытые профили.

## 7. Прямой изгиб

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении балки возникают изгибающие моменты.

В общем случае в поперечном сечении балки могут возникнуть два изгибающих момента –  $M_x$  и  $M_y$ . Их можно заменить одним суммарным, лежащим в плоскости, перпендикулярной сечению балки. В зависимости от положения этой плоскости по отношению к главным осям сечения изгиб подразделяют на два вида. Если плоскость действия изгибающего момента совпадает с какой-либо главной осью сечения, изгиб называют *прямым*. Если нет – *косым*.

В том случае, когда в сечении возникает только изгибающий момент, а поперечная сила отсутствует, изгиб называют *чистым*. При наличии поперечной силы изгиб носит название *поперечного*.

В этом разделе рассмотрим прямой изгиб (чистый и поперечный).

### 7.1. Напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе

Обратимся к основной задаче сопротивления материалов – задаче о напряжениях в поперечном сечении. Вначале рассмотрим простейший изгиб – чистый.

Задачу сформулируем так. Балка, все размеры которой известны, нагружена моментами в главной плоскости (рис. 7.1). Установим:

- какие напряжения возникают в поперечном сечении;
- как они распределены по сечению;

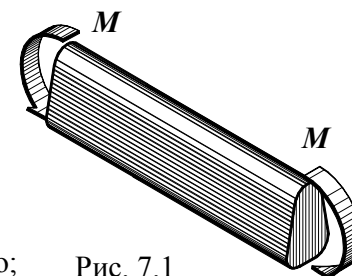


Рис. 7.1

– как напряжения зависят от изгибающего момента, формы и размеров сечения.

План решения подобных задач изложен в разд. 5.8. Следуем ему.

Для конкретности рассуждений будем считать, что балка нагружена моментами в главной плоскости  $zy$ .

### Геометрическая сторона задачи

Проследим за деформациями балки при прямом изгибе, нанеся на ее поверхность сетку из продольных и поперечных линий (рис. 7.2 а).

При экспериментальном исследовании деформирования балки установлено (рис. 7.2 б):

– расстояния между поперечными линиями в верхней части увеличились, в нижней уменьшились;

– прямоугольные контуры, образованные поперечными линиями, плоские до деформации, остались плоскими и после изгиба балки;

– прямые углы между продольными и поперечными линиями не изменились;

– ширина балки в верхней части уменьшилась, в нижней возросла.

Таким образом, продольные волокна в верхней части балки удлинились, в нижней укоротились. Поскольку по высоте балки деформации изменяются непрерывно, то существуют волокна, не изменившие своей длины. Такие волокна называют **нейтральными**. Они образуют **нейтральный слой**. Линию пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением называют **нейтральной линией**.

Наблюдения за деформациями, происходящими на поверхности балки, позволяют сформулировать исходные предпосылки решения задачи для балки с сечением любой формы:

– поскольку поперечные прямоугольные контуры остались плоскими, будем считать, что *плоскими остаются и поперечные сечения*;

– допустим также, что *прямые углы между поперечными сечениями и продольными волокнами не изменились* (деформаций сдвига  $\gamma_z$  нет).

– наконец, предположим, что продольные волокна балки работают, как отдельные стерженьки, друг на друга не действуют (в продольных сечениях нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  не возникают и, следовательно, материал балки испытывает линейное напряженное состояние).

Опишем количественно распределение деформаций по сечению. С этой целью сопоставим вид элементарного отрезка балки до и после деформации.

На рис. 7.3 сплошными линиями показан вид отрезка балки до деформации, пунктирными – после ее изгиба. Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим  $r$ , а расстояние от нейтрального слоя до произвольной точки  $k$  буквой  $\eta$ .

Из подобия треугольников  $ck_1k$  и  $Oce$  следует  $k_1k/ce = ck/Oe$ . Но  $k_1k = \Delta dz$ ,  $ce = dz$ ,  $ck = \eta$ ,  $Oe = r$ . Итак, приходим к соотношению  $\Delta dz/dz = \eta/r$ , откуда

$$\epsilon_z = \eta/r. \quad (a)$$

Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию от рассматриваемой точки до нейтрального слоя и обратно пропорционально радиусу его кривизны.

При неизменности прямого угла между продольными волокнами и поперечным сечением

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0. \quad (б)$$

Равенства (а) и (б) описывают распределение деформаций по сечению балки и являются геометрическими уравнениями задачи.

### Физическая сторона задачи

При линейном напряженном состоянии нормальные напряжения и удлинения связаны законом Гука (5.4):

$$\sigma_z = E\epsilon_z. \quad (в)$$

Касательные напряжения и относительный сдвиг также связаны законом Гука (6.1):  $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ ,  $\tau_{zy} = G\gamma_{zy}$ . (г)

Выражения закона Гука (в) и (г) образуют физические уравнения.

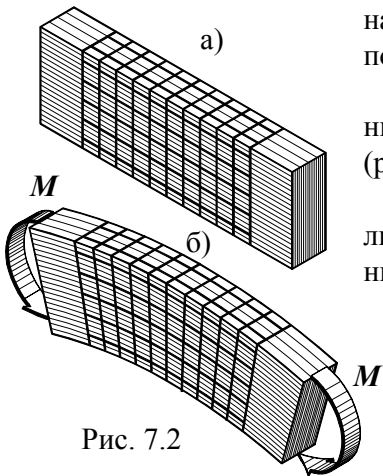


Рис. 7.2

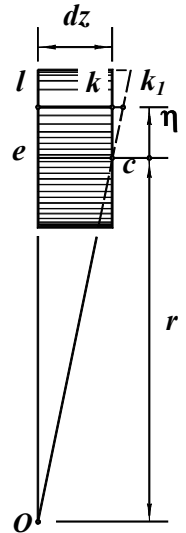


Рис. 7.3

### Статическая сторона задачи

Статические уравнения состоят из двух групп: условий статической эквивалентности (3.1) (рис. 7.4):

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad (е)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad (ж)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \quad (и)$$

и условий равновесия:

$$N = 0, \quad (к)$$

$$M_y = 0. \quad (л)$$

Система уравнений (а) ... (л) позволяет решить поставленную задачу.

Приступим к решению уравнений.

По равенствам (б) и (г) устанавливаем, что  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  – при чистом изгибе касательные напряжения в поперечном сечении балки не возникают.

Из выражений (а) и (в) следует:

$$\sigma_z = E\eta/r. \quad (м)$$

Подставим теперь выражение (м) в равенство (е):

$$N = \int_A \sigma_z dA = (E/r) \int_A \eta dA.$$

Принимая во внимание равенство (к), приходим к выводу, что  $(E/r) \int_A \eta dA = 0$ . Но так как  $E/r \neq 0$ , то  $\int_A \eta dA = 0$ . Левая часть полученного равенства является статическим моментом поперечного сечения относительно нейтральной линии. Равенство его нулю означает, что *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения*.

Пусть нейтральная линия наклонена к оси  $x$  под углом  $\alpha$  (рис. 7.5). Подставим выражение (м) в равенство (и):

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = (E/r) \int_A \eta x dA. \quad (н)$$

Следовательно,  $M_y = (E/r) \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA$ .

По равенству (л)  $M_y = 0$ , значит

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = 0.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = \int_A (xy \cos \alpha - x^2 \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos \alpha \int_A xy dA - \sin \alpha \int_A x^2 dA = J_{xy} \cos \alpha - J_y \sin \alpha. \quad \text{Так как оси } x \text{ и } y$$

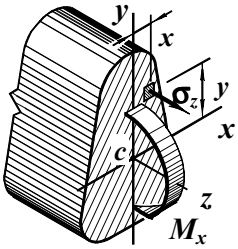


Рис. 7.4

Система уравнений (а) ... (л) позволяет решить поставленную задачу.

поставленную задачу.

Приступим к решению уравнений.

По равенствам (б) и (г) устанавливаем, что  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  – при чистом изгибе касательные напряжения в поперечном сечении балки не возникают.

Из выражений (а) и (в) следует:

$$\sigma_z = E\eta/r. \quad (м)$$

Подставим теперь выражение (м) в равенство (е):

$$N = \int_A \sigma_z dA = (E/r) \int_A \eta dA.$$

Принимая во внимание равенство (к), приходим к выводу, что  $(E/r) \int_A \eta dA = 0$ . Но так как  $E/r \neq 0$ , то  $\int_A \eta dA = 0$ . Левая часть полученного равенства является статическим моментом поперечного сечения относительно нейтральной линии. Равенство его нулю означает, что *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения*.

Пусть нейтральная линия наклонена к оси  $x$  под углом  $\alpha$  (рис. 7.5). Подставим выражение (м) в равенство (и):

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = (E/r) \int_A \eta x dA. \quad (н)$$

Следовательно,  $M_y = (E/r) \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA$ .

По равенству (л)  $M_y = 0$ , значит

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = 0.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = \int_A (xy \cos \alpha - x^2 \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos \alpha \int_A xy dA - \sin \alpha \int_A x^2 dA = J_{xy} \cos \alpha - J_y \sin \alpha. \quad \text{Так как оси } x \text{ и } y$$

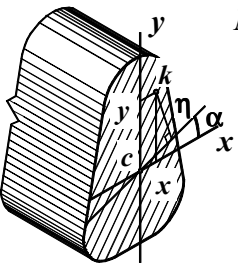


Рис. 7.5

Преобразуем полученное равенство:

$$\int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha) x dA = \int_A (xy \cos \alpha - x^2 \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos \alpha \int_A xy dA - \sin \alpha \int_A x^2 dA = J_{xy} \cos \alpha - J_y \sin \alpha. \quad \text{Так как оси } x \text{ и } y$$

главные, центробежный момент инерции  $J_{xy} = 0$ . Осевой же момент инерции сечения  $J_y > 0$ . Отсюда следует, что  $\sin \alpha = 0$ ,

$$\alpha = 0: \quad (п)$$

при прямом изгибе нейтральная линия совпадает с главной центральной осью, перпендикулярной плоскости изгиба.

По равенствам (н) и (п)  $\eta = y$ . Формулы (а) и (м) примут вид

$$\epsilon_z = y/r. \quad (7.1)$$

$$\sigma_z = Ey/r. \quad (р)$$

Подставим равенство (р) в выражение (ж):

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = (E/r) \int_A y^2 dA = EJ_x/r, \quad \text{откуда}$$

$$1/r = M_x/EJ_x. \quad (7.2)$$

Равенство (7.2) является законом Гука при изгибе. Оно показывает, что *кривизна оси балки пропорциональна изгибающему моменту*.

Из равенств (р) и (7.2) следует конечный результат:

$$\sigma_z = M_x y/J_x. \quad (7.3)$$

В формуле (7.3):

$\sigma_z$  – нормальное напряжение в рассматриваемой точке;  
 $M_x$  – изгибающий момент, действующий в сечении балки;  
 $y$  – расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной линии (главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба);  
 $J_x$  – осевой момент инерции сечения балки относительно нейтральной линии.

Итак, получены ответы на все поставленные вопросы<sup>1</sup>:

– при чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения;

– величина напряжений растет по мере удаления точки от нейтральной линии;

– напряжение в точке прямо пропорционально изгибающему моменту, расстоянию от рассматриваемой точки до нейтральной линии и обратно пропорционально осевому моменту инерции сечения относительно нейтральной линии.

<sup>1</sup> К задаче о нормальных напряжениях в поперечном сечении балки обращались Галилей, Мариотт, Лейбниц, Вариньон, Яков Бернулли, Паран, Бильфингер, Навье и др. История вывода формулы (7.3) изобилует чередованием передовых идей, странных заблуждений и даже арифметических ошибок. Для решения задачи потребовалось почти два столетия – 188 лет.

Эпюры нормальных напряжений в балках с некоторыми типами сечений показаны на рис. 7.6.

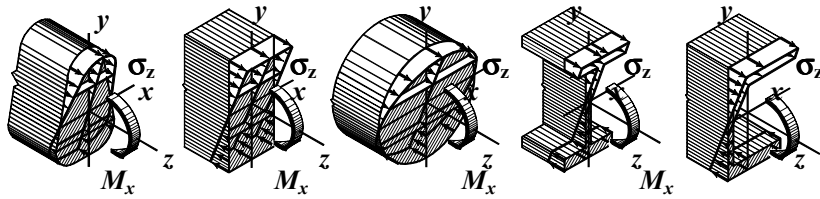


Рис. 7.6

Вывод формулы нормальных напряжений при изгибе опирается на приведенные выше приближенные предпосылки. Поэтому точность решения, полученного на ее основе, зависит от того, в какой степени эти предпосылки соответствуют действительности. Экспериментальные исследования и строгие теоретические решения обнаруживают условия, в которых формула (7.3) дает значительную погрешность.

Гипотеза плоских сечений подтверждается экспериментом для сравнительно невысоких балок ( $l/h \geq 10$ ). Расчет высоких балок по обсуждаемой формуле может дать лишь качественное представление о напряжениях в сечении, исказив их величину. Распределение напряжений в сечениях тонкостенных балок, несимметричных относительно плоскости изгиба, во многих случаях существенно отличается от прогнозируемого формулой (7.3).

При выводе формулы (7.3) применен закон Гука. Это значит, что она справедлива, если во всех точках сечения  $\sigma_z \leq \sigma_{pr}$ .

В использованном законе Гука модуль упругости  $E$  был принят одинаковым для растянутой и сжатой частей сечения. Следовательно, для материалов с разными модулями упругости при растяжении и сжатии полученная формула не применима.

Следует также отметить, что в балках резко переменного сечения и в криволинейных балках с сильно искривленной осью распределение нормальных напряжений по сечению нелинейно и не соответствует полученной формуле.

Ниже будут проведены некоторые дополнительные исследования, расширяющие представление о возможностях формулы (7.3) и области ее применимости.

**Пример 7.1.** Балка прямоугольного сечения (рис. 7.7) с  $b = 20$  см и  $h = 30$  см нагружена двумя силами  $F = 10$  кН. В балке выбрано сечение  $I$ , в нем точка  $d$ . Найдём нормальное напряжение  $\sigma_z^d$  в этой точке, если  $l = 1,2$  м.

Реакции опор  $Y_a = Y_b = F = 10$  кН.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении  $M_{Ix} = F \cdot l - F \cdot l = Fl = 10 \cdot 120 = 1200$  кНсм.

Растянута верхняя половина сечения. Нейтральная линия – ось  $x$ .

Осевой момент инерции сечения (2.11):

$$J_x = bh^3/12 = 20 \cdot 30^3/12 = 45000 \text{ см}^4.$$

Расстояние от нейтральной линии до точки  $d$

$$y_d = h/2 - h/6 = h/3 = 30/3 = 10 \text{ см}.$$

По формуле (7.3) в точке  $d$  напряжение

$$\sigma_z^d = M_{Ix} y_d / J_x = 1200 \cdot 10 / 45000 = 0,267 \text{ кН/см}^2.$$

Так как у балки растянуты верхние волокна, а точка лежит в нижней половине сечения, напряжение в ней сжимающее.

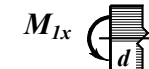
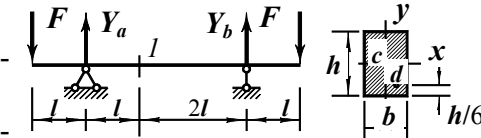


Рис. 7.7

## 7.2. Нормальные напряжения в сечении балки при поперечном изгибе

При поперечном изгибе в сечении балки возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Наличие поперечной силы свидетельствует о том, что в сечении возникают касательные напряжения.

Касательные напряжения вызывают деформации сдвига. Если распределение касательных напряжений по сечению неравномерно (именно в таком предположении следует вести качественный анализ), неравномерны и сдвиги. Поперечные сечения балки искривляются и не остаются плоскими. Оценим с качественных позиций влияние деформаций сдвига на нормальные напряжения в сечении балки.

На рис. 7.8 а изображена консольная балка, нагруженная силой  $F$  на свободном конце. В ее сечениях возникают поперечные силы и изгибающие моменты. Поперечные силы во всех сечениях одинаковы, моменты разные.

Рассмотрим деформацию отрезка балки (рис. 7.8 б).

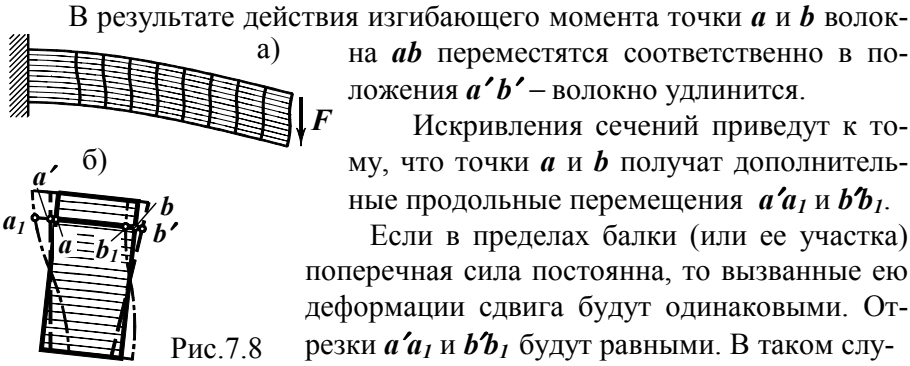


Рис. 7.8

В результате действия изгибающего момента точки  $a$  и  $b$  волока на  $ab$  переместятся соответственно в положения  $a'b'$  – волокно удлинится. Искривления сечений приведут к тому, что точки  $a$  и  $b$  получат дополнительные продольные перемещения  $a'a_1$  и  $b'b_1$ .

Если в пределах балки (или ее участка) поперечная сила постоянна, то вызванные ею деформации сдвига будут одинаковыми. Отрезки  $a'a_1$  и  $b'b_1$  будут равными. В таком случае дополнительные перемещения точек  $a$  и  $b$ , вызванные деформациями сдвига, не приведут к дополнительному удлинению продольного волокна. Распределение продольных деформаций по сечению будет таким же, как и при чистом изгибе. Не изменится и распределение нормальных напряжений.

При переменной поперечной силе подобное утверждать нельзя. Нормальные напряжения в сечении балки будут отличаться от предсказания (7.3). Количественное отличие будет зависеть от величины касательных напряжений и вызванных ими сдвигов. Ниже это влияние будет оценено.

Другой особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений  $\sigma_x$  в горизонтальных продольных сечениях балки. Эти напряжения возникают оттого, что на балку действуют поперечные внешние силы. Величины напряжений  $\sigma_x$  и их значимость также будут обсуждены ниже.

Не имея пока достаточных оснований и отложив на будущее анализ истоков высказанных сомнений, будем считать, что формула (7.3) справедлива и для поперечного изгиба.

### 7.3. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения (вывод формулы Журавского)

Строго говоря, задача о напряжениях при поперечном изгибе может быть решена методами теории упругости. В сопротивлении материалов для определения касательных напряжений используют приближенный метод, предложенный Д.И. Журавским<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> См. сноску на след. стр.

Ознакомимся с методом и его результатом на примере балки прямоугольного сечения.

- Решение задачи опирается на следующие предпосылки:
- касательные напряжения в прямоугольном сечении параллельны поперечной силе  $Q_y$ ;
  - по ширине сечения касательные напряжения постоянны;
  - распределение нормальных напряжений по сечению описывается формулой (7.3).

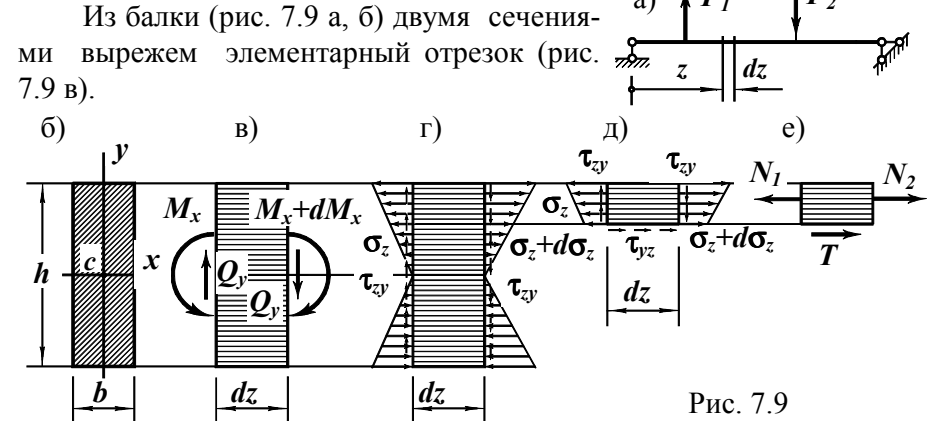


Рис. 7.9

Он находится в равновесии при действии на него со стороны отброшенных частей поперечных сил и изгибающих моментов. На рис. 7.9 г то же действие представлено нормальными и касательными напряжениями.

Продольной плоскостью, параллельной оси  $x$ , рассечем отрезок балки на две части. Рассмотрим равновесие одной из них, например верхней (рис. 7.9 д, е). На нее действуют горизонтальные силы:

$N_1$  и  $N_2$  – равнодействующие нормальных напряжений в отсеченных частях поперечных сечений;

$T$  – касательная сила со стороны нижней отброшенной части элементарного отрезка балки.

<sup>1</sup> Дмитрий Иванович Журавский (1821–1891) – инженер, выпускник Петербургского института путей сообщений. Не будучи профессионалом-ученым, он свои замечательные научные работы выполнял, когда чувствовал в этом практическую потребность. За научные открытия в теории мостов премирован Академией наук России.

Силы уравновешены, поэтому

$$T = N_1 - N_2. \quad (a)$$

Равнодействующая  $N_1 = \int_{A_{ct}} \sigma_z dA$ , ( $A_{ct}$  – площадь отсеченной части

поперечного сечения). Применяя формулу (7.3), имеем

$$N_1 = \int_{A_{ct}} (M_x y / J_x) dA = (M_x / J_x) \int_{A_{ct}} y dA.$$

Интеграл в полученном выражении является статическим моментом отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной

линии  $x$ . Итак,  $N_1 = M_x S_x^{ct} / J_x$ . (б)

Аналогично,  $N_2 = (M_x + dM_x) S_x^{ct} / J_x$ . (в)

Подстановка выражений (б) и (в) в условие (а) дает

$$T = -dM_x S_x^{ct} / J_x. \quad (г)$$

Сила  $T$  является равнодействующей касательных напряжений, возникающих в горизонтальном сечении отрезка балки. Учитывая малость отрезка  $dz$ , можно считать, что напряжения  $\tau_{yz}$  распределены равномерно по продольному сечению. В таком случае  $T = \tau_{yz} b dz$ .

Подставив полученное выражение в равенство (г), получаем  $\tau_{yz} b dz = -dM_x S_x^{ct} / J_x$ , или  $\tau_{yz} = (-dM_x / dz) S_x^{ct} / (J_x b)$ . А так как  $dM_x / dz = -Q_y$ , то  $\tau_{yz} = Q_y S_x^{ct} / (J_x b)$ . Но  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Теперь окончательно

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = Q_y S_x^{ct} / (J_x b). \quad (7.4)$$

Это и есть формула Журавского.

В формуле (7.4):

$Q_y$  – поперечная сила в сечении балки;

$S_x^{ct}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной линии;

$J_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной линии;

$b$  – ширина сечения.

Распределение касательных напряжений по сечению балки определяется характером изменения  $S_x^{ct}$ , так как остальные величины, входящие в формулу (7.4), для конкретного сечения постоянны. Статический момент отсеченной части играет роль своеобразной координаты, определяющей изменение касательных напряжений по высоте сечения. Выразим его через ординату точки и размеры сечения.

Статический момент отсеченной части  $S_x^{ct} = A_{ct} y^{ct}$ . Из рис. 7.10 следует, что площадь отсеченной части  $A_{ct} = b(h/2 - y)$ , расстояние от ее центра тяжести до нейтральной линии (оси  $x$ )  $y^{ct} = (h/2 + y)/2$ . После этого статический момент  $S_x^{ct} = b(h^2/4 - y^2)/2$ . Момент инерции сечения  $J_x = bh^3/12$ . Подставив полученные равенства в формулу (7.4), получаем

$$\tau_{zy} = 6Q_y (h^2/4 - y^2) / (bh^3). \quad (7.5)$$

Полученное выражение показывает, что изменение касательных напряжений по высоте сечения описывается квадратной параболой. При  $y = h/2$  напряжения  $\tau_{zy} = 0$ . Чем ближе точка к оси  $x$ , тем больше напряжение в ней. В точках нейтральной линии, когда  $y = 0$ ,  $\max \tau_{zy} = 3Q_y / (2bh)$ .

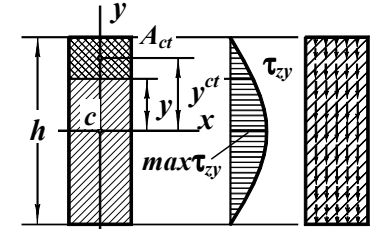


Рис. 7.10

#### 7.4. Касательные напряжения в сечении двутавровой балки. Обобщение формулы Журавского на другие типы сечений

7.4.1. Рассмотрим двутавровое сечение (рис. 7.11). Если к нему применить формулу (7.4), получим эпюру  $\tau_{zy}$ , изображенную справа. Скачок в месте перехода от полки к стенке объясняется изменением ширины сечения. Следует, однако, отметить, что использование формулы (7.4) для определения напряжений  $\tau_{zy}$  в полках далеко не бесспорно. Во-первых, нет оснований полагать, что напряжения равномерно распределены по ширине полки  $b$ . Во-вторых, наличие напряжений  $\tau_{zy}$  в точках, расположенных на границе полки (например, в точке  $a$ ), противоречит закону парности касательных напряжений. В-третьих, они малы по сравнению с напряжениями в стенке. Поэтому будем считать, что в двутавровой балке касательные напряжения  $\tau_{zy}$  возникают лишь в стенке. Формула (7.4) для них примет вид

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = Q_y S_x^{ct} / (J_x d).$$

T-образная отсеченная часть, статический момент которой фигурирует в формуле, выделена наверху двутавра двойной штриховкой.

7.4.2. Нет оснований отрицать возможность появления в полках касательных напряжений  $\tau_{zx}$ . Из-за малости толщины полок можно принять распределение напряжений  $\tau_{zx}$  вдоль размера  $t$  равномерным. Повторение вывода формулы (7.4) для напряжений  $\tau_{zx}$  приводит к результату

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = Q_y S_x^{ct} / (J_x t).$$

Отсеченная часть полки на рис. 7.11 также выделена двойной штриховкой внизу

Рис. 7.11

выделена двойной штриховкой внизу сечения. Эпюра  $\tau_{zx}$  показана в верхней части рисунка.

7.4.3. Два типа сечения, рассмотренные выше, показывают, что формулы касательных напряжений в прямоугольном сечении и в двутавре имеют по существу один и тот же вид. Это свидетельствует о возможности использования метода и формулы Журавского для определения касательных напряжений и в других типах сечений.

Обобщая формулу (7.4), следует иметь в виду, что во всех вариантах ее вывода заложены два предположения:

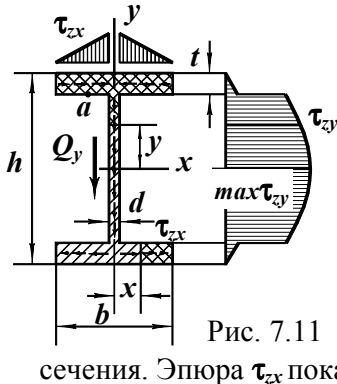
- первое – равномерность распределения касательных напряжений по какому-либо направлению в сечении;
- второе – справедливость формулы (7.3) для нормальных напряжений.

По этим причинам формулу (7.4) можно применять тогда, когда обоснованы названные предпосылки.

При определении касательного напряжения  $\tau_z$  в какой-либо точке

- отсеченную часть поперечного сечения следует выделять линией, перпендикулярной искомым касательным напряжениям;
- под размером  $b$ , стоящим в знаменателе, нужно понимать длину условно нарушенного контакта между двумя частями сечения.

В качестве иллюстрации применения метода Журавского приведем пример.



7.4.2. Нет оснований отрицать возможность появления в полках касательных напряжений  $\tau_{zx}$ . Из-за малости толщины полок можно принять распределение напряжений  $\tau_{zx}$  вдоль размера  $t$  равномерным. Повторение вывода формулы (7.4) для напряжений  $\tau_{zx}$  приводит к результату

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = Q_y S_x^{ct} / (J_x t).$$

Отсеченная часть полки на рис. 7.11 также выделена двойной штриховкой внизу

Рис. 7.11

выделена двойной штриховкой внизу сечения. Эпюра  $\tau_{zx}$  показана в верхней части рисунка.

7.4.3. Два типа сечения, рассмотренные выше, показывают, что формулы касательных напряжений в прямоугольном сечении и в двутавре имеют по существу один и тот же вид. Это свидетельствует о возможности использования метода и формулы Журавского для определения касательных напряжений и в других типах сечений.

Обобщая формулу (7.4), следует иметь в виду, что во всех вариантах ее вывода заложены два предположения:

- первое – равномерность распределения касательных напряжений по какому-либо направлению в сечении;
- второе – справедливость формулы (7.3) для нормальных напряжений.

По этим причинам формулу (7.4) можно применять тогда, когда обоснованы названные предпосылки.

При определении касательного напряжения  $\tau_z$  в какой-либо точке

- отсеченную часть поперечного сечения следует выделять линией, перпендикулярной искомым касательным напряжениям;
- под размером  $b$ , стоящим в знаменателе, нужно понимать длину условно нарушенного контакта между двумя частями сечения.

В качестве иллюстрации применения метода Журавского приведем пример.

**Пример. 7.2.** Консольная балка длиной  $3l = 4,5$  м нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 20$  кН/м (рис. 7.12 а). Сечение балки – швеллер с размерами  $b = 10$  см,  $h = 18$  см,  $d = 10$  мм,  $t = 15$  мм (рис. 7.12 в). В балке выбрано сечение 1, в нем точка  $a$ . Найдем величину и направление касательного напряжения в точке  $a$ .

Из свойства парности касательных напряжений следует  $\tau_{zy} = 0$  в точках  $a_1$  и  $a_2$ . Так как размер  $t$  мал, будем считать, что напряжения  $\tau_{zy}$  равны нулю во всех точках отрезка  $a_1 a_2$ . По той же причине предположим, что напряжения  $\tau_{zx}$  по толщине полки распределены равномерно.

Так как искомые касательные напряжения горизонтальны, проводим вертикальную секущую и отделяем часть сечения (на рис. 7.12 в она заштрихована дважды). Формула напряжения в точке  $a$  имеет вид

$$\tau_{zx} = Q_y S_x^{ct} / (J_x t).$$

Находим:  $Q_y = 2ql = 2 \cdot 20 \cdot 1,5 = 60$  кН;

$$S_x^{ct} = (b/2) t (h/2) = (10/2) 1,5 (18/2) = 67,5 \text{ см}^3;$$

$$J_x = ((b+d/2)(h+t)^3 - (b-d/2)(h-t)^3) / 12 =$$

$$= ((10+1/2)(18+1,5)^3 - (10-1/2)(18-1,5)^3) / 12 = 2932 \text{ см}^4.$$

Касательное напряжение в точке  $a$  –

$$\tau_{zx} = 60 \cdot 67,5 / (2932 \cdot 1,5) = 0,92 \text{ кН/см}^2.$$

Для определения направления напряжения сечениями 1 и 2 вырежем отрезок балки. Из него вертикальной продольной плоскостью, проведенной через точку  $a$ , отделим часть полки (рис. 7.12 г).

У балки растянуты верхние волокна (рис. 7.12 б), силы  $N_1$  и  $N_2$  растягивающие.  $M_1 < M_2$ , отсюда  $N_1 < N_2$ . По условию равновесия сила  $T$  направлена влево. Влево направлены и напряжения  $\tau_{xz}$  в продольном сечении. По свойству парности заключаем, что в точке  $a$  касательное напряжение  $\tau_{zx}$  направлено вправо. Описанный прием определения величин и направлений касательных напряжений может быть применен практически к любым типам сечений.

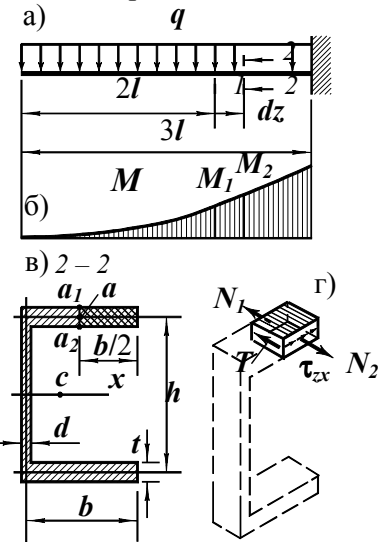


Рис. 7.12



## 7.5. Оценка нормальных напряжений в горизонтальных сечениях балок

Формула нормальных напряжений (7.3) и полученная с ее использованием (7.4) основаны на предположении отсутствия в балке напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Но при действии поперечных сил очевидно, что  $\sigma_y \neq 0$ . Оценим влияние поперечной нагрузки на давления волокон балки.

Проведем это на примере свободно опертой балки прямоугольного сечения при равномерной поперечной нагрузке (рис. 7.13 а). В сечениях балки возникают переменные по длине поперечные силы (рис. 7.13 б) и изгибающие моменты (рис. 7.13 в).

Двумя поперечными сечениями вырежем элементарный отрезок балки (рис. 7.13 а). Вертикальные внешние силы, действующие на него, изображены на рис. 7.14 а.

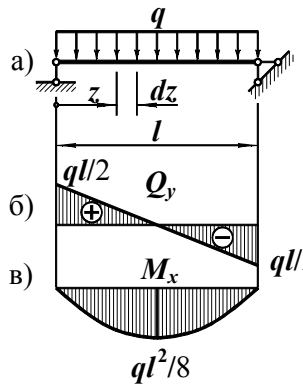


Рис. 7.13

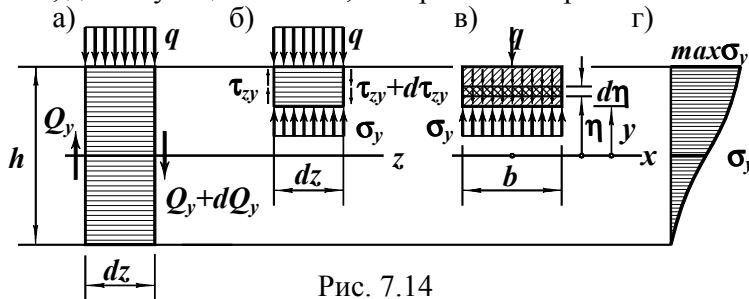


Рис. 7.14

Рассечем отрезок балки горизонтальной плоскостью и отбросим нижнюю часть (рис. 7.14 б, в). Из равновесия верхней части следует:

$$qdz - \int_y^{h/2} \tau_{zy} b d\eta - \sigma_y b dz + \int_y^{h/2} (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) b d\eta = 0, \text{ откуда} \quad (a)$$

$$\sigma_y = q/b + \int_y^{h/2} (d\tau_{zy}/dz) d\eta. \quad (a)$$

По формуле (7.5)  $\tau_{zy} = 6Q_y(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3)$ ,  $\Rightarrow d\tau_{zy}/dz = 6(dQ_y/dz)(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3)$ . Но  $dQ_y/dz = -q$ , т.е.

$$d\tau_{zy}/dz = -6q(h^2/4 - \eta^2)/(bh^3). \quad (б)$$

После подстановки равенства (б) в (а) и интегрирования получаем

$$\sigma_y = q(1 + 3y/h - 4(y/h)^3)/(2b). \quad (в)$$

Эпюра  $\sigma_y$  изображена на рис. 7.14 г;  $\max \sigma_y = q/b$ .

Сравним найденные напряжения с  $\max \sigma_z$ . Согласно формуле (7.3)  $\max \sigma_z = \max M_x y_{\max} / J_x = (ql^2/8)(h/2)/(bh^3/12) = 0,75ql^2/(bh^2)$ . Отношение  $\max \sigma_y / \max \sigma_z = 1,33(h/l)^2$ . При  $h/l < 0,1$   $\max \sigma_y / \max \sigma_z < 0,013$ . Таким образом,  $\sigma_y \ll \sigma_z$ . Это подтверждает обоснованность предпосылки об отсутствии напряжений  $\sigma_y$ .

Строго говоря, полученный результат ограничен рассмотренной расчетной схемой и типом сечения. Аналогичные исследования для других видов нагрузок и форм сечений показывают, что

– при распределенных нагрузках напряжениями  $\sigma_y$  можно пренебречь;

– в случаях действия сосредоточенных сил

– в балках с массивными сечениями их также можно игнорировать,

– в тонкостенных же балках напряжения  $\sigma_y$  следует учитывать в местах приложения усилий.

Распределение напряжений в тонкостенных балках вблизи “сосредоточенных” сил устанавливается специальными методами.

На основании проведенного анализа напряжения в поперечных сечениях балок будем определять по формулам (7.3) и (7.4).

## 7.6. Напряженное состояние балок при поперечном изгибе

Выше установлено, что в балке обычно возникают как нормальные  $\sigma_z$ , так и касательные  $\tau_{zy}$  напряжения. Поэтому площадки, лежащие в поперечном сечении, в общем случае не являются главными, а следовательно, в любой точке  $\sigma_{\min} \leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}$ ,  $\tau_{zy} \leq \tau_{\max}$ .

При отсутствии нормального напряжения  $\sigma_y$ , формула (4.5), определяющая положения главных площадок, принимает вид

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy}/\sigma_z. \quad (7.6)$$

Главные напряжения (4.6) при поперечном изгибе

$$\sigma_{\max/\min} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2})/2, \quad (7.7)$$

Поскольку  $\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \geq \sigma_z$ , то  $\sigma_{\max} \geq 0$ , а  $\sigma_{\min} \leq 0$ . По правилам нумерации главных напряжений с учетом того, что  $\sigma_x = 0$ , следует принимать  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ .

Согласно равенствам (7.7) наибольшее касательное напряжение (4.7) в точке балки

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}/2. \quad (7.8)$$

Распределение напряжений по сечению балки при поперечном изгибе характерно тем, что

- и нормальные  $\sigma_z$ , и касательные напряжения  $\tau_{zy}$  изменяются по высоте сечения;

- отношение  $\tau_{zy}/\sigma_z$  переменено по высоте.

В этом случае из формул (7.6) ... (7.8) следует, что в точках, занимающих разные положения по высоте сечения, будут соответственно разными

- максимальные нормальные напряжения;
- минимальные нормальные напряжения;
- наибольшие касательные напряжения;
- углы наклона главных площадок к поперечному сечению (и площадок наибольшего сдвига, равнонаклоненных к главным).

Для иллюстрации отмеченного, а также техники анализа напряженного состояния рассмотрим пример.

**Пример 7.3.** В прямоугольном сечении балки (рис. 7.15 а) с  $b = 12 \text{ см}$ ,  $h = 36 \text{ см}$  возникли поперечная сила  $Q_y = 1,1 \text{ МН}$  и изгибающий момент  $M_x = 0,25 \text{ МНм}$  (рис. 7.15 б). Исследуем напряженное состояние материала балки в этом сечении:

- найдем положения главных площадок;
- определим величины главных напряжений;
- установим положения площадок с наибольшими касательными напряжениями;
- вычислим значения наибольших касательных напряжений.

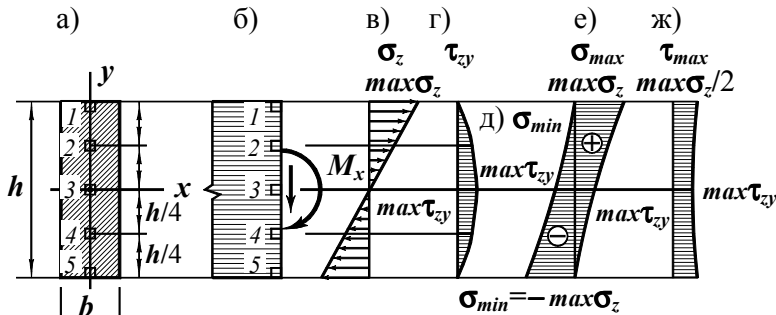


Рис. 7.15

Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_z$  и касательных  $\tau_{zy}$  изображены на рис. 7.15 в, г.

Поскольку напряженное состояние при изгибе качественно и количественно неоднородно, выберем в сечении пять наиболее характерных представительных точек (рис. 7.15 а, б):

- две наиболее удаленные от нейтральной линии – 1 и 5;
- одну на нейтральной линии – 3;
- две точки общего положения – 2 и 4.

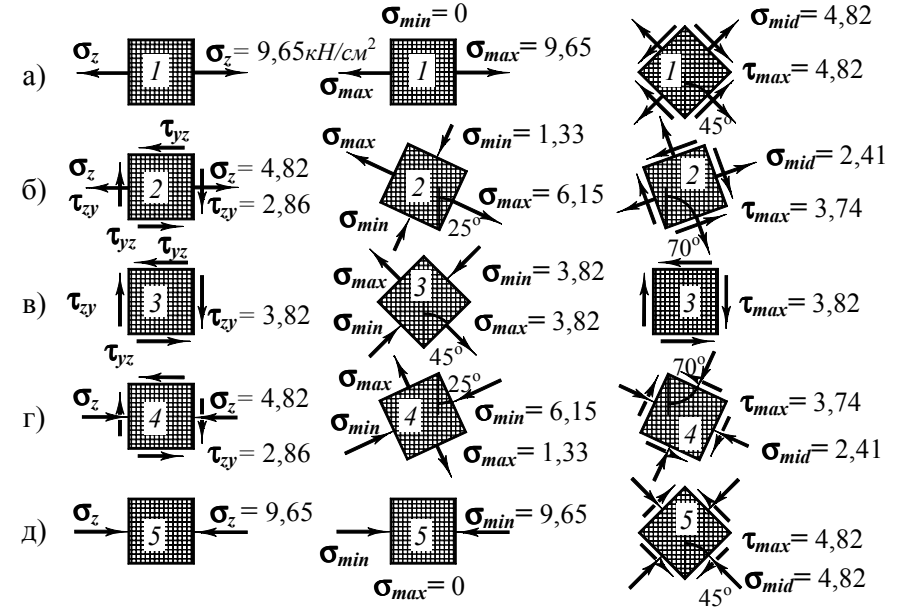


Рис. 7.16

Положения главных площадок и величины главных напряжений устанавливаются по формулам (7.6) и (7.7) после определения напряжений в поперечных площадках. Итак:

Точка 1 (рис. 7.16 а).

Нормальное напряжение в точке (7.3)

$$\sigma_z = M_x y / J_x = 0,25 \cdot 10^5 \cdot 18 / (12 \cdot 36^3 / 12) = 9,65 \text{ кН/см}^2;$$

Касательное напряжение (7.5)  $\tau_{zy} = 0$ .

Материал испытывает одноосное растяжение.

Отсутствие касательного напряжения  $\tau_{zy}$  свидетельствует о том, что исходные площадки являются главными.

Главные напряжения  $\sigma_{max} = \sigma_z = 9,65 \text{ кН/см}^2$ ,  $\sigma_{min} = 0$ .

Место действия наибольших касательных напряжений – площадки, наклоненные к поперечному сечению под  $45^\circ$ ;  $\tau_{max} = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ . Направление  $\tau_{max}$  определяется двумя признаками:

- свойством парности,
- растяжением материала в горизонтальном направлении.

В площадках с максимальными касательными напряжениями действуют средние нормальные напряжения  $\sigma_{mid} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 2 (рис. 7.16 б).

$$\sigma_z = M_x y_2 / J_x = 0,25 \cdot 10^5 \cdot 9 / (12 \cdot 36^3 / 12) = 4,82 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{zy} = 6 Q_y (h^2/4 - y_2^2) / (b h^3) = 6 \cdot 1100 (36^2/4 - 9^2) / (12 \cdot 36^3) = 2,86 \text{ кН/см}^2.$$

Материал находится в плоском напряженном состоянии.

Положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{yz} / \sigma_z = 2 \cdot 2,86 / 4,82 = 1,19; \alpha_0 = 25^\circ.$$

Повернуть исходный параллелепипед на указанный угол следует по часовой стрелке, ибо внутри этого 45-градусного сектора накладываются растягивающие действия  $\sigma_z$  и  $\tau_{zy}$  и возникает наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{max}^1$ .

$$\begin{aligned} \text{Главные напряжения (7.7)} \quad \sigma_{max(min)} &= (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}) / 2 = \\ &= (4,82 \pm \sqrt{4,82^2 + 4 \cdot 2,86^2}) / 2 = 6,15(-1,33) \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под углом  $45^\circ$  (одна из них к вертикали наклонена под  $25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$ ); Напряжение

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2 = (6,15 - (-1,33)) / 2 = 3,74 \text{ кН/см}^2.$$

Направление  $\tau_{max}$  согласуется с направлениями  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ .

Средние нормальные напряжения, действующие в площадках с максимальными касательными напряжениями,

$$\sigma_{mid} = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2 = \sigma_z / 2 = 2,41 \text{ кН/см}^2.$$

<sup>1</sup> Направление поворота можно определить по знаку угла  $\alpha_0$ . Для этого необходимо в формулу (7.6) подставить напряжения со знаками, соответствующими установленным правилам. Однако такой путь представляется менее предпочтительным, поскольку использованный здесь вариант способствует формированию инженерных навыков анализа.

Точка 3 (рис. 7.16 в).

Нормальное напряжение  $\sigma_z = 0$ .

Касательное –  $\tau_{zy} = 3 Q_y / (2bh) = 3 \cdot 1100 / (2 \cdot 12 \cdot 36) = 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Вид напряженного состояния – чистый сдвиг (см. раздел 6).

Главные площадки наклонены к исходным под  $45^\circ$ .

Главные напряжения  $\sigma_{max(min)} = \pm \tau_{zy} = \pm 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Площадки с наибольшими касательными напряжениями – исходные площадки;  $\tau_{max} = \tau_{zy} = 3,82 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 4 (рис. 7.16 г).

Напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{zy}$  в точке 4 такие же как в точке 2:  $\sigma_z = 4,82 \text{ кН/см}^2$ ;  $\tau_{zy} = 2,86 \text{ кН/см}^2$ . Различие в том, что нормальные напряжения – сжимающие.

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0 = 25^\circ$ . Но в этой точке повернуть исходный параллелепипед на указанный угол следует против хода часовой стрелки, ибо внутри этого 45-градусного сектора накладываются сжимающие действия  $\sigma_z$  и  $\tau_{zy}$  и возникает наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{min}$ .

Главные напряжения  $\sigma_{max(min)} = 1,33(-6,15) \text{ кН/см}^2$ .

Площадки с наибольшими касательными напряжениями наклонены к главным площадкам под углом  $45^\circ$ . Наибольшее касательное напряжение  $\tau_{max} = 3,74 \text{ кН/см}^2$ . Направление  $\tau_{max}$  согласуется с направлениями главных напряжений.

Средние нормальные напряжения, действующие в площадках с максимальными касательными напряжениями, сжимающие, равные  $2,41 \text{ кН/см}^2$ .

Точка 5 (рис. 7.16 д).

Нормальное напряжение в точке 5 такое же как в точке 1, но сжимающее;  $\sigma_z = 9,65 \text{ кН/см}^2$ ; касательное напряжение  $\tau_{zy} = 0$ .

Материал испытывает одноосное сжатие.

Исходные площадки являются главными.

Главные напряжения  $\sigma_{max} = 0$ ,  $\sigma_{min} = -9,65 \text{ кН/см}^2$ .

Наибольшие касательные напряжения действуют в площадках, наклоненных к поперечному сечению под  $45^\circ$ ;  $\tau_{max} = \sigma_z/2 = 4,82 \text{ кН/см}^2$ .

На рис. 7.15 д–ж по выполненным расчетам построены эпюры главных и наибольших касательных напряжений в сечении.

Приведенный пример показывает, что при поперечном изгибе материал находится в условиях смешанного плоского напряженного состояния: в одном главном направлении растянут, в другом сжат. В крайних точках (1 и 5) плоское напряженное состояние вырождается в линейное; в точках нейтральной линии – в чистый сдвиг.

Величины главных и наибольших касательных напряжений, ориентация главных площадок зависят не только от внутренних силовых факторов и положения точки в сечении, но и от типа сечения. Поэтому рассмотренный пример прямоугольного сечения иллюстрирует лишь методику анализа напряженного состояния в балке. В других случаях подобное исследование должно проводиться аналогично, но с учетом конкретного распределения напряжений.

### 7.7. Понятие о траекториях главных напряжений

Траектория главного напряжения – это линия, касательная к которой совпадает с направлением одного из главных напряжений в данной точке. В каждой точке балки существует два взаимно перпендикулярных направления главных напряжений. Поэтому можно построить два семейства соответствующих им линий.

Проиллюстрируем технику построения траекторий на балке прямоугольного сечения, изображенной на рис. 7.17.

В сечении балки, отстоящем на расстоянии  $z$  от левой опоры, действуют поперечная сила  $Q_y = ql/2 - qz$  и изгибающий момент  $M_x = qz^2/2 - qlz/2$  (опорные реакции на рисунке не показаны).

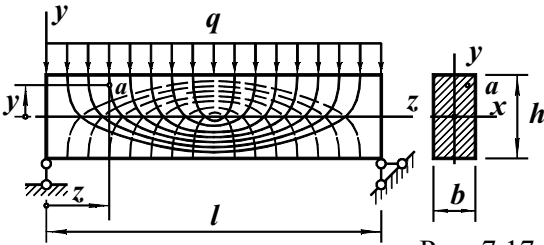


Рис. 7.17

Напряжения в произвольной точке  $a$ :

$$\sigma_z = M_x y / J_x = 6q(z^2 - lz)y / (bh^3);$$

$$\tau_{zy} = 6Q_y(h^2/4 - y^2) / (bh^3) = 6q(l/2 - z)(h^2/4 - y^2) / (bh^3).$$

Подставляя выражения напряжений в формулу (7.6) с учетом знака касательного напряжения (оно отрицательно), получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{zy} / \sigma_z = (l - 2z)(h^2/4 - y^2) / (z(l - z)y).$$

Возможны дальнейшие преобразования полученного выражения в направлении формирования дифференциального уравнения траекторий главных напряжений. Однако решение такого уравнения чрезмерно трудоемко. Поэтому остановимся на этом равенстве.

Если на боковую поверхность балки нанести множество точек, в каждой из них найти главные направления и изобразить их взаимно перпендикулярными отрезками, сформируются два семейства линий. Они и будут изображать потоки главных напряжений. Характерными для траекторий являются следующие особенности:

- при  $y = \pm h/2$  угол  $\alpha_0 = 0$  – одно главное напряжение горизонтально, другое вертикально;
- угол  $\alpha_0 = 0$  и при  $z = l/2$ , в этом сечении поперечная сила равна нулю, касательных напряжений нет;
- если  $y = 0$ , угол  $\alpha_0 = 45^\circ$  – в точках нейтрального слоя главные напряжения наклонены к горизонтали под этим углом;
- под углом  $\alpha_0 = 45^\circ$  наклонены главные напряжения и в крайних сечениях балки:  $z = 0$  и  $z = l$ , где изгибающие моменты равны нулю.

На рис. 7.17 сплошными линиями показаны траектории главных растягивающих напряжений, штриховыми – главных сжимающих.

Очертания траекторий главных напряжений зависят от

- вида нагрузки на балку;
- условий ее закрепления;
- формы и размеров поперечного сечения балки.

Поэтому приведенный пример следует рассматривать как иллюстрацию методики построения траекторий.

На практике траектории главных напряжений используются в конструкциях из комбинированных материалов. В железобетоне стальные стержни располагают вдоль траекторий растягивающих напряжений, освобождая бетон от работы на растяжение. В конструкциях из пластмасс армирующие нити также располагают по направлению растягивающих напряжений, где они наиболее эффективны.

## 7.8. Расчет на прочность при поперечном изгибе

Выбор критерия, по которому следует оценивать прочность балки при поперечном изгибе, не столь очевиден как при растяжении (сжатии) и кручении. В сечении балки возникают и нормальные, и касательные напряжения. Правда, как правило, нормальные напряжения максимальны там, где нет касательных напряжений (в точках, максимально удаленных от нейтральной линии), касательные же напряжения наибольшие в точках нейтральной линии, где отсутствуют нормальные напряжения. Эти обстоятельства облегчают назначение критериев прочности.

7.8.1. Для обоснования условий прочности балки сопоставим максимальные нормальные  $\max\sigma_z$  и максимальные касательные  $\max\tau_{xy}$  напряжения, возникающие в поперечных сечениях консольной балки прямоугольного сечения (рис. 7.18):

$$\max\sigma_z = \max M_x y_{\max} / J_x = Fl(h/2) / (bh^3/12) = 6Fl / (bh^2);$$

$$\max\tau_{xy} = 3Q_y / (2bh) = 3F / (2bh).$$

Отношение напряжений

$$\max\tau_{xy} / \max\sigma_z = (6Fl / (bh^2)) / (3F / (2bh)) = h / (4l).$$

Если  $h/l \leq 0,1$ , соотношение  $\max\tau_{xy} / \max\sigma_z \leq 0,025$ . Аналогичные сопоставления для других типов сечений свидетельствуют о том, что в массивных сечениях  $\max\tau_{xy} \ll \max\sigma_z$ . Поэтому в балках массивных сечений можно игнорировать касательные напряжения и расчет на прочность вести по максимальным нормальным напряжениям  $\sigma_z$ .

Максимальное нормальное напряжение в сечении балки  $\max\sigma_z = M_x y_{\max} / J_x$ . Это выражение целесообразно преобразовать, объединив в одну две геометрические величины –  $J_x$  и  $y_{\max}$ . Обозначим

$$J_x / y_{\max} = W_x \quad (7.9)$$

Вновь введенная геометрическая характеристика сечения  $W_x$  называется **осевым моментом сопротивления сечения балки**. Размерность осевого момента сопротивления  $см^3, м^3$  и т.п. С учетом введенного понятия

$$\max\sigma_z = M_x / W_x \quad (7.10)$$

Условие прочности по нормальным напряжениям (5.9) при изгибе принимает вид

$$M_x / W_x \leq R, \quad (7.11)$$

где  $R$  – расчетное сопротивление материала балки при одноосном растяжении (сжатии).

7.8.2. В балках с тонкостенными сечениями касательные напряжения  $\tau_{xy}$  нередко соизмеримы с нормальными. Поэтому в тонкостенных балках наряду с проверкой (7.11) вводится условие прочности по касательным напряжениям (6.3):

$$\max\tau_{xy} \leq R_s, \quad (7.12)$$

в котором  $R_s$  – расчетное сопротивление материала на срез;  $\max\tau_{xy}$  определяется по формуле Журавского (7.4).

7.8.3. Остановимся на новом геометрическом понятии – осевом моменте сопротивления сечения балки (7.9). Найдем его для некоторых типов сечений.

Прямоугольник:  $J_x = bh^3/12, y_{\max} = h/2;$   
 $W_x = bh^2/6. \quad (7.13)$

Круг:  $J_x = \pi D^4/64 \quad (2.16), y_{\max} = D/2;$   
 $W_x = \pi D^3/32. \quad (7.14)$

Кольцо:  $J_x = \pi D^4(1-\delta^4)/64 \quad (2.18), y_{\max} = D/2;$   
 $W_x = \pi D^3(1-\delta^4)/32. \quad (7.15)$

У сечений, несимметричных относительно нейтральной линии, расстояния до наиболее удаленных от нее точек в растянутой и сжатой частях сечения неодинаковы. В таких случаях вводят два осевых момента сопротивления. Например, у равнобедренного треугольника (рис. 7.19) момент инерции  $J_x = bh^3/36 \quad (2.13)$ . Расстояния от оси  $x$  до наиболее удаленных точек  $y^1_{\max} = 2h/3$  и  $y^2_{\max} = h/3$ . По формуле (7.9)

$$W_x^1 = bh^2/24, W_x^2 = bh^2/12. \quad (7.16)$$

Применяя условие (7.11) к подобного рода сечениям, следует иметь это в виду.

Осевые моменты сопротивления прокатных двутавров и швеллеров приведены в таблицах сортамента.

С целью детального знакомства с поиском опасных точек в балках, выбором критериев прочности и расчетом на прочность рассмотрим несколько примеров.

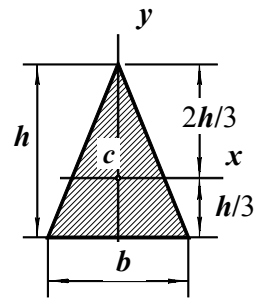
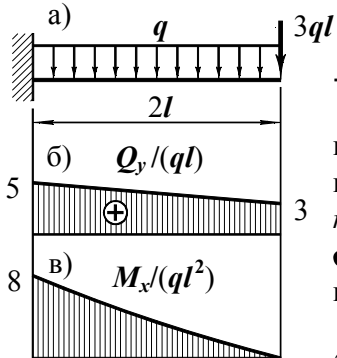


Рис. 7.19

**Пример 7.4.** Проверим прочность балки, изображенной на рис. 7.20 а. Числовые значения исходных данных:  $l = 1,2 \text{ м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ , балка составлена из швеллеров № 30, материал балки – сталь 09Г2С ( $R = 335 \text{ МПа}$ ;  $R_s = 195 \text{ МПа}$ ).

Балка тонкостенная. Поэтому необходима проверка обоих условий прочности – (7.11) и (7.12).



Проверка условия (7.11). Из формулы (7.10) ясно, что  $\max \sigma_z = \max M_x / W_x$ . Эпюры внутренних силовых факторов в балке изображены на рис. 7 б, в.  $\max M_x = 8ql^2 = 8 \cdot 20 \cdot 1,2^2 = 230 \text{ кНм}$ . Наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_z$  возникают в точках верхнего и нижнего краев левого сечения балки.

Осевой момент сопротивления сечения балки равен сумме моментов сопротивления швеллеров. По таблице сортамента находим  $W_x = 2 \cdot 387 = 774 \text{ см}^3$ . Теперь  $\max \sigma_z = \max M_x / W_x = 23000 / 774 = 29,7 \text{ кН/см}^2$ . Сравнивая полученное значение нормального напряжения с расчетным сопротивлением на растяжение и сжатие, заключаем, что условие прочности (7.11) выполняется.

Проверка условия (7.12). Поперечная сила наибольшая в левом сечении балки. В точках нейтральной линии этого сечения возникают  $\max \tau_{xy}$ .

По формуле Журавского  $\max \tau_{xy} = \max Q_y S_x^{ct} / (J_x b)$ . В ней:  
 – поперечная сила  $\max Q_y = 5ql = 5 \cdot 20 \cdot 1,2 = 120 \text{ кН}$ ;  
 – статический момент полусечения – сумма статических моментов полушвеллеров:  $S_x^{ct} = 2 \cdot 224 = 448 \text{ см}^3$ ;  
 – момент инерции сечения относительно нейтральной линии  $J_x = 2 \cdot 5810 = 11620 \text{ см}^4$ ;

– ширина контакта между двумя условно разделяемыми частями сечения – сумма толщин стенок швеллеров:  $b = 2 \cdot 0,65 = 1,3 \text{ см}$ .  
 Итак,  $\max \tau_{xy} = \max Q_y S_x^{ct} / J_x b = 120 \cdot 448 / (11620 \cdot 1,3) = 3,56 \text{ кН/см}^2$ . Напряжение значительно меньше расчетного сопротивления материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям (7.12) выполняется.

**Пример 7.5.** Шарнирно-консольная балка подвержена равномерно распределенной нагрузке  $q = 24 \text{ кН/м}$  (рис. 7.21 а). Длина участка балки  $l = 1,6 \text{ м}$ . Материал балки – чугун СЧ 15 ( $R_t = 55 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 160 \text{ МПа}$ ). Сечение балки – тавр (рис. 7.21 б). Назначим размеры сечения по условиям прочности материала балки.

Сечение балки массивно, использование условия прочности по касательным напряжениям (7.12) не требуется.

Особенность рассматриваемого случая состоит в том, что  
 – сечение несимметрично относительно нейтральной линии;  
 – расчетные сопротивления растяжению и сжатию разные;  
 – в левой части балки растянуты нижние волокна, на правой верхние.

По отмеченному будем:  
 – искать точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями,  
 – сопоставляя напряжения с расчетными сопротивлениями, устанавливать, какая из них является опасной.

Центр тяжести сечения балки отстоит от нижнего края на  $1,36b$ , момент инерции относительно нейтральной линии  $J_x = 9,44b^4$  (рис. 7.21 б); определение положения нейтральной линии (главной центральной оси  $x$ ) и величины главного момента инерции  $J_x$  опущено; последовательность этих подготовительных расчетов описана в разд. 2).

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента изображены на рис. 7.21 в, г. По эпюре момента заключаем, что опасную точку следует искать в сечениях 1 и 2.

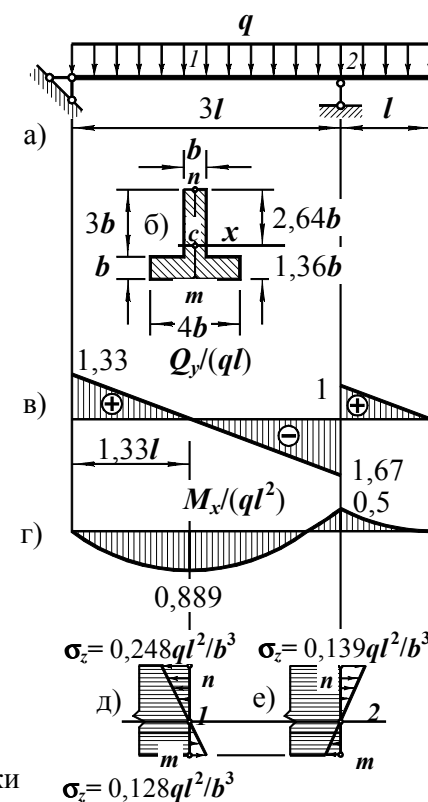


Рис. 7.21

Сечение 1 (рис. 7.21 д).

Изгибающий момент в сечении  $M_{x1} = 0,889ql^2$ ; растянуты нижние волокна.

Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точках нижнего края сечения, в частности, точке  $m$ :

$$\max\sigma_{zt} = M_{x1}y_m/J_x = 0,889ql^2 \cdot 1,36b/(9,44b^4) = 0,128ql^2/b^3.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в точках верхнего края, где выбрана точка  $n$ :

$$\max\sigma_{zc} = M_{x1}y_n/J_x = 0,889ql^2 \cdot 2,64b/(9,44b^4) = 0,248ql^2/b^3.$$

Сечение 2 (рис. 7.21 е).

Изгибающий момент  $M_{x2} = 0,5ql^2$ ; растянуты верхние волокна.

Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точках верхнего края, среди которых точка  $n$ :

$$\max\sigma_{zt} = M_{x2}y_n/J_x = 0,5ql^2 \cdot 2,64b/(9,44b^4) = 0,139ql^2/b^3.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в сечении 2 считать не нужно, так как  $M_{x1} > M_{x2}$  и  $y_n > y_m$ .

Выполненные расчеты показали, что наибольшие растягивающие напряжения  $\max\sigma_{zt} = 0,139ql^2/b^3$  возникают в верхних точках сечения 2;  $\max\sigma_{zc} = 0,248ql^2/b^3$  – в верхних точках первого сечения.

Выясним, какие из них опаснее. В наиболее сжатых точках отношение  $R_c/\max\sigma_{zc} = 160/(0,248ql^2/b^3) = 645b^3/(ql^2)$ , в растянутых же точках  $R_t/\max\sigma_{zt} = 55/(0,139ql^2/b^3) = 396b^3/(ql^2)$  – резерв прочности при сжатии больше, опасны верхние точки сечения 2.

Выяснив положение опасных точек, завершаем решение задачи. Из условия прочности при растяжении (5.9)  $\max\sigma_{zt} \leq R_t$  следует  $0,139ql^2/b^3 \leq R_t$ , откуда  $b^3 \geq 0,139ql^2/R_t = 0,139 \cdot 0,24 \cdot 160^2 / 5,5 = 155 \text{ см}^3$ , или  $b \geq 5,4 \text{ см}$ .

**Пример 7.6.** Рассмотрим теперь двутавровую балку из профиля № 24. Материал балки сталь 14Г2 с  $R = 320 \text{ МПа}$  и  $R_s = 185 \text{ МПа}$ . Длина участка  $l = 0,8 \text{ м}$ . Балка подвержена нагрузке, изображенной на рис. 7.22 а. Определим нагрузку (параметр  $q$ ), которую можно прикладывать к балке, не нарушая условий прочности.

Балка тонкостенная, с резким изменением ширины сечения в области больших нормальных напряжений. Поэтому ее следует проверить по

- нормальным напряжениям  $\sigma_z$ ;
- касательным  $\tau_{zy}$ ;
- главным напряжениям  $\sigma_{\max/\min}$ .

Эпюры внутренних силовых факторов при указанной нагрузке, приведены на рис. 7.22 б, в. Опасное сечение над правой опорой.

Расчет по нормальным напряжениям.

По формуле (7.10) и эпюре  $M_x$   $\max\sigma_z = \max M_x / W_x = 4ql^2 / W_x$ .

По таблицам сортамента находим  $W_x = 289 \text{ см}^3$ . Таким образом,  $\max\sigma_z = 4q \cdot 80^2 / 289 = 88,6q / \text{см}$ . Условие прочности (5.9):  $\max\sigma_z \leq R$ :  $88,6q \leq 32$ ;  $q \leq 32 / 88,6 = 0,361 \text{ кН/см}$ .

Расчет по касательным напряжениям.

По формуле Журавского (7.4)

$$\max\tau_{zy} = Q_y S_x^{ct} / (J_x d). \text{ При } Q_y = 4ql; S_x^{ct} = 163 \text{ см}^3; J_x = 3460 \text{ см}^4; d = 0,56 \text{ см}$$

$$\max\tau_{zy} = 4q \cdot 80 \cdot 163 / (3460 \cdot 0,56) = 26,9q / \text{см}. \text{ Из условия прочности (7.12) } \max\tau_{zy} \leq R_s; 26,9q \leq 18,5 \text{ находим } q \leq 0,688 \text{ кН/см}.$$

Расчет по главным напряжениям.

Наибольшие главные напряжения в двутавре возникают в месте соединения стенки и полки (точка  $a$  на рис. 7.23), где достаточно велики и нормальные  $\sigma_z$ , и касательные  $\tau_{zy}$  напряжения, хотя ни те, ни другие не максимальны в сечении.

$$\text{Нормальное напряжение в точке } a \sigma_z = M_x y_a / J_x = 4ql^2 (h/2 - t) / J_x = 4q \cdot 80^2 (24/2 - 0,95) / 3460 = 81,7q / \text{см}.$$

$$\text{Касательные напряжения } \max\tau_{zy} = Q_y S_x^{ct} / (J_x d) = 4qlbt (h/2 - t/2) / (J_x d) = 4q \cdot 80 \cdot 11,5 \cdot 0,95 (24/2 - 0,95/2) / (3460 \cdot 0,56) = 20,8q / \text{см}.$$

$$\text{Главные напряжения в точке } \sigma_{\max(\min)} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}) / 2 = ((81,7 \pm \sqrt{81,7^2 + 4 \cdot 20,8^2}) / 2) q = 86,7 (-4,99) q / \text{см}. \text{ Итак, } \sigma_{\max} = 86,7q / \text{см}, \sigma_{\min} = -4,99q / \text{см}. \text{ Минимальное напряжение составляет около 6\% от максимального, им можно пренебречь и считать напряженное состояние линейным. Так как } \sigma_{\max} < \max\sigma_z, \text{ принимаем } q = 0,361 \text{ кН/см}.$$

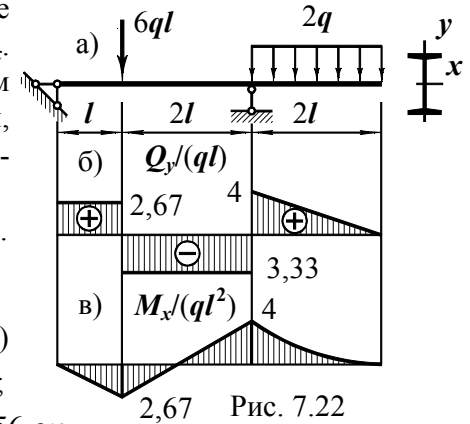


Рис. 7.22

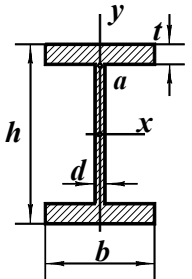


Рис. 7.23

## 7.9. Рациональные типы сечений балок

Распределение напряжений по сечению балки неоднородно:

– нормальные напряжения вблизи нейтральной линии малы и возрастают по мере удаления от нее;

– касательные напряжения в части сечения, прилегающей к нейтральной линии, хотя и достигают наибольших значений, но, как правило, существенно меньше нормальных.

Это предоставляет возможность рационально размещать материал, полнее используя его прочность.

При равных расчетных сопротивлениях растяжению и сжатию, целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно нейтральной линии (прямоугольник, круг, двутавр и т.д.), или несимметричные, но с центром тяжести посередине высоты (рельс).

Величина изгибающего момента, допустимого по условию прочности (7.11),  $M_x \leq RW_x$  пропорциональна осевому моменту сопротивления сечения. Расход материала – площади  $A$ . Поэтому экономичность двух типов сечения можно оценить отношением площадей при равных моментах сопротивления.

Квадрат и круг.

Квадрат со стороной  $a$ :  $W_x^I = a^3/6$  (7.13);  $A_1 = a^2$ .

Круг с диаметром  $D$ :  $W_x^2 = \pi D^3/32$  (7.14);  $A_2 = \pi D^2/4$ .

Из равенства моментов сопротивления следует  $(a/D)^3 = 6\pi/32 = 0,589$ , откуда  $a/D = 0,838$ . Отношение площадей  $A_1/A_2 = (4/\pi)(a/D)^2 = 0,895$ . Квадрат экономичнее круга.

Квадрат и прямоугольник.

Прямоугольник с основанием  $b$  и высотой  $h$ :  $W_x^3 = bh^2/6$ ;  $A_3 = bh$ .

При равных моментах сопротивления  $a^3 = bh^2$ . Запишем это соотношение по-другому:  $a^2/(bh) = h/a$ . Отношение площадей  $A_1/A_3 = a^2/(bh) = h/a$ . Экономичность прямоугольного сечения по сравнению с квадратным зависит от отношения их высот. Если  $h < a$ , прямоугольник неэкономичен. При  $h > a$ , равнопрочное прямоугольное сечение рациональнее квадратного. С ростом высоты прямоугольника растет и его экономичность. Это обстоятельство способствует увеличению высоты сечения балок с уменьшением его ширины. Однако делать это можно до определенного предела, пока балка не приобрела излишнюю податливость к случайным боковым воздействиям.

Сравним квадратное сечение балки с двутавром № 24. У двутавра  $W_x = 289 \text{ см}^3$ . Равнопрочный ему квадрат должен иметь сторону  $(a^3/6 = 289)$   $a = 12 \text{ см}$ . Площадь квадрата  $144 \text{ см}^2$ , двутавра  $34,8 \text{ см}^2$  – в 4,1 раза меньше.

Основной принцип рационального конструирования сечения балки – изъять материал из слабонапряженных мест и добавить в области высоких напряжений. Такому принципу отвечают прокатные профили, сварные двутавры и швеллеры, сечения коробчатого типа и т.п., широко применяемые в строительных конструкциях.

## 7.10. Понятие о балках равного сопротивления

Изгибающие моменты, как правило, переменны по длине балки. Это обстоятельство также может быть использовано в экономических целях. Сечения с малыми изгибающими моментами можно сделать меньших размеров, убрав материал, в котором нет необходимости. Познакомимся с постановкой и решением подобных задач на примере.

**Пример 7.7.** Консольная балка длиной  $l = 2 \text{ м}$  несет равномерно распределенную нагрузку  $q = 40 \text{ кН/м}$  (рис. 7.24 а). Запроектируем балку при условиях:

- сечение балки прямоугольное шириной  $b$  и высотой  $h(z)$ ;
- ширина сечения по длине балки постоянна;
- отношение  $h(z)/b$  должно быть не более пяти;

– материал балки сталь 15ХСНД с  $R = 330 \text{ МПа}$ ;

– все сечения балки равноопасны –  $\max \sigma_z(z) = \text{const}$ .

Эпюра изгибающего момента показана на рис. 7.24 б. В сечении произвольного положения  $M_x(z) = qz^2/2$ ,  $\max M_x = ql^2/2$ .

Определим размеры сечения на правом конце балки, где действует максимальный изгибающий момент:

$$\max M_x / W_x = (ql^2/2) / (bh_0^2/6) \leq R.$$

Приняв согласно условию  $b = 0,2h_0$ , находим  $h_0^3 \geq 15ql^2/R = 15 \cdot 0,4 \cdot 200^2 / 33 = 7273 \text{ см}^3$ , т.е.  $h_0 \geq 19,4 \text{ см}$ ; Округляя, принимаем  $h_0 = 20 \text{ см}$ ;  $b = 0,2h_0 = 4 \text{ см}$ .

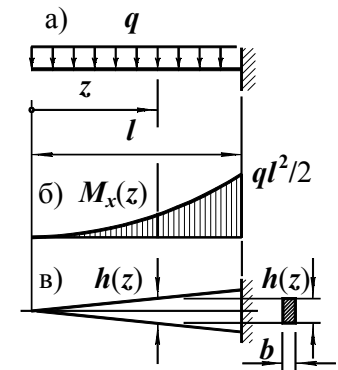


Рис. 7.24



Установим теперь зависимость высоты сечения от его положения. Условие равноопасности сечений имеет вид  $M_x(z)/W_x(z) = R$ . Подставив сюда  $M_x(z)$  и  $W_x(z)$ , получаем  $(qz^2/2)/(bh^2(z)/6) = R$ , откуда при постоянной  $b$  высота  $h(z) = z\sqrt{3q/(bR)}$  – линейная функция. На левом конце балки  $h(0) = 0$ , на правом  $h(l) = h_0$ , в произвольном сечении  $h(z) = h_0z/l = 20z/200 = 0,1z$ .

Итак, при ширине балки, равной 4 см, и высоте, линейно возрастающей от нуля на левом конце до 20 см на правом, максимальные нормальные напряжения от заданной нагрузки во всех сечениях одинаковы:  $\max \sigma_z = R$ .

Ясно, что полученное решение справедливо только при тех условиях, которые использованы в задаче. Если какое-либо из них изменить (вид нагрузки, постоянство ширины сечения), условие равноопасности сечений нарушится.

Описанный прием проектирования балок переменного сечения часто используют на практике. Широкое применение в строительстве нашли консольные и однопролетные железобетонные балки переменной высоты; стальные двутавровые балки с постоянной высотой, но переменной шириной полков. Они менее материалоемки и потому более экономичны.

### 7.11. Потенциальная энергия деформации при поперечном изгибе

Потенциальная энергия деформации является самостоятельной характеристикой напряженно-деформированного состояния балки. Кроме того, она часто используется в различных методах расчета конструкций. Выведем формулу потенциальной энергии деформации балки, испытывающей поперечный изгиб.

Материал балки подвержен нормальным напряжениям  $\sigma_z$  и касательным  $\tau_{xy}$ . Удельная потенциальная энергия деформации при одноосном растяжении и сжатии равна  $\sigma_z^2/(2E)$  (5.8), при чистом сдвиге  $\tau_{xy}^2/(2G)$  (6.2). Во всей балке  $U = \int_A \int_I (\sigma_z^2/(2E) + \tau_{xy}^2/(2G)) dAdz$ . С помощью формул (7.3) и (7.4) выразим напряжения через внутренние силовые факторы:  $U = \int_A \int_I ((M_x y/J_x)^2/(2E) + (Q_y S_x^{ct}/(J_x b))^2/(2G)) dAdz$ .

Преобразуем полученное выражение:

$$U = \int_I (M_x^2/(2EJ_x^2)) \int_A y^2 dAdz + \int_I (Q_y^2/(2GJ_x^2)) \int_A (S_x^{ct}/b)^2 dAdz.$$

Внутренний интеграл в первом слагаемом – осевой момент инерции сечения балки. Он сокращается со стоящим в знаменателе. Для преобразования второго слагаемого к виду, обычно используемому в расчетах, введем обозначение

$$A \int (S_x^{ct}/b)^2 dA/J_x^2 = \mu, \quad (7.17)$$

называемое *коэффициентом формы сечения*. После этого формула потенциальной энергии деформации балки примет вид

$$U = \int_I (M_x^2/(2EJ_x)) dz + \int_I (\mu Q_y^2/(2GA)) dz. \quad (7.18)$$

Если сечение балки постоянно,

$$U = \int_I M_x^2 dz / (2EJ_x) + \mu \int_I Q_y^2 dz / (2GA). \quad (7.19)$$

Полученные формулы показывают, что потенциальная энергия деформации балки состоит из двух частей –  $U_M = \int_I (M_x^2/(2EJ_x)) dz$ , связанной с действием момента, и  $U_Q = \mu \int_I (Q_y^2/(2GA)) dz$ , отражающей энергию сдвигов от поперечных сил. Обычно  $U_M \gg U_Q$ . Если энергией сдвигов пренебречь,

$$U = \int_I (M_x^2/(2EJ_x)) dz \quad (7.20)$$

**Пример 7.8.** С целью иллюстрации способа определения коэффициента формы сечения найдем его для прямоугольника (рис. 7.25).

Коэффициент  $\mu = A \int (S_x^{ct}/b)^2 dA/J_x^2$ . Найдем входящие в выражение геометрические величины:

$$A = bh;$$

$$S_x^{ct} = b(h^2/4 - y^2)/2;$$

$$J_x = bh^3/12;$$

$$\int_A (S_x^{ct}/b)^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} ((h^2/4 - y^2)/2)^2 b dy = bh^5/120.$$

$$\mu = A \int (S_x^{ct}/b)^2 dA/J_x^2 = bh(bh^5/120)/(bh^3/12)^2 = 1,2.$$

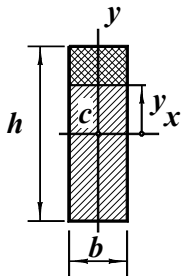


Рис. 7.25

Величины коэффициентов  $\mu$  для наиболее распространенных типов сечений обычно приводятся в справочной литературе.

## 7.12. Перемещения при прямом изгибе.

### Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

#### Расчет на жесткость

7.12.1. В результате деформирования ось балки искривляется, поперечные сечения перемещаются в новые положения. На рис. 7.26 показан вид балки до и после деформации. На нем обозначено:

$w$  – продольное перемещение центра тяжести сечения;

$v$  – поперечное перемещение центра тяжести;

$\theta$  – угол поворота поперечного сечения.

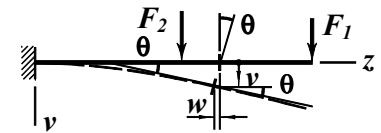


Рис. 7.26

Обычно поперечные перемещения в строительных балках невелики (редко превышают 1/200 пролета). Кроме того, из-за относительно слабого влияния сдвиговых деформаций их можно игнорировать. В таких случаях можно считать, что

– центры тяжести поперечных сечений перемещаются перпендикулярно недеформированной оси ( $w \ll v$ , продольными перемещениями пренебрегаем, полагая  $w = 0$ );

– угол поворота сечения равен углу наклона касательной к кривой  $v(z)$ , т.е.

$$\theta = \operatorname{tg} \theta = v'. \quad (7.21)$$

Таким образом, *перемещения поперечных сечений балки определяются одной функцией  $v(z)$* . Ее называют *прогибом*. Для определения прогибов достаточно найти уравнение изогнутой оси балки.

7.12.2. При выводе формулы нормальных напряжений было получено выражение кривизны оси балки (7.2):  $1/r = M_x/(EJ_x)$ . В курсе математического анализа кривизна кривой  $1/r = v''/(1+(v')^2)^{3/2}$ . Приравняв правые части приведенных равенств, получаем дифференциальное уравнение  $v''/(1+(v')^2)^{3/2} = M_x/(EJ_x)$ . (7.22)

Уравнение (7.22) является нелинейным. Его интегрирование связано с большими математическими трудностями и не всегда возможно. Для решения практических задач уравнение упрощают. Учитывая, что углы поворота  $\theta$  малы, величиной  $(v')^2$  по сравнению с единицей пренебрегают. Тогда уравнение (7.22) принимает вид

$$v'' = M_x/(EJ_x). \quad (7.23)$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 7.9.** Консольная балка постоянного сечения нагружена силой на свободном конце (рис. 7.27). Найдем

- уравнение изогнутой оси  $v(z)$ ;
- угол поворота на свободном конце  $\theta$ ;
- максимальный прогиб  $v_{max}$ .

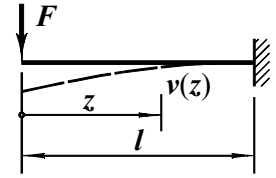


Рис. 7.27

Составим и решим дифференциальное уравнение (7.23).

Изгибающий момент в произвольном сечении  $M_x(z) = Fz$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$v''(z) = Fz/(EJ_x).$$

После первого интегрирования имеем  $v'(z) = Fz^2/(2EJ_x) + C_1$ ;

после второго  $v(z) = Fz^3/(6EJ_x) + C_1z + C_2$ .

Из бесчисленного множества кривых, описываемых полученным общим решением, выберем одну, отвечающую изогнутой оси балки (штриховая линия на рис. 7.27). Подберем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы выполнялись условия закрепления балки:

$v'(l) = 0$  (угол поворота сечения балки в месте заземления равен нулю),  $\Rightarrow C_1 = -Fl^2/(2EJ_x)$ ;

$v(l) = 0$  (прогиб на правом конце также отсутствует),  $\Rightarrow$

$$C_2 = -Fl^3/(6EJ_x) - C_1l = Fl^3/(3EJ_x).$$

В результате

$$v'(z) = F(z^2 - l^2)/(2EJ_x);$$

$v(z) = F(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x)$  – это и есть уравнение изогнутой оси балки.

Угол поворота левого конца балки  $\theta = v'(0) = -Fl^2/(2EJ_x)$ ; Знак свидетельствует о повороте против хода часовой стрелки, что согласуется с выбранными направлениями осей.

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(0) = Fl^3/(3EJ_x)$ . Положительный прогиб – вниз.

Итак, в консольной балке, нагруженной силой на конце,

$$v_{max} = Fl^3/(3EJ_x). \quad (7.24)$$

**Пример 7.10.** Шарнирно опертая балка подвержена равномерно

распределенной нагрузке по всему пролету (рис. 7.28). Сечение балки постоянно. Найдем

- уравнение изогнутой оси  $v(z)$ ;
- максимальный прогиб балки  $v_{max}$ .

Изгибающий момент

$$M_x(z) = qz^2/2 - qlz/2.$$

Рис. 7.28

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v''(z) = q(z^2 - lz)/(2EJ_x).$$

Интегрируем уравнение:

$$v'(z) = q(z^3/3 - lz^2/2)/(2EJ_x) + C_1;$$

$$v(z) = q(z^4/12 - lz^3/6)/(2EJ_x) + C_1z + C_2.$$

Постоянным интегрирования присвоим конкретные значения из условий закрепления балки:

$$v(0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$v(l) = 0, \Rightarrow C_1 = ql^3/(24EJ_x).$$

Подставляя постоянные в общее решение дифференциального уравнения, находим уравнение изогнутой оси балки:

$$v(z) = q(z^4 - 2lz^3 + l^3z)/(24EJ_x).$$

Максимальный прогиб возникает посередине пролета:  $v_{max} = v(l/2)$ . Подставив в полученное уравнение  $z = l/2$ , находим

$$v_{max} = 5ql^4/(384EJ_x). \quad (7.25)$$

**Пример 7.11.** Рассмотрим такую же балку, как и в предыдущем примере, но под асимметричной силой  $F$  (рис. 7.29). Найдем максимальный прогиб.

На балке два участка:  $z \leq a$ ,  $z \geq a$ .

Левый участок ( $z \leq a$ ).

Изгибающий момент  $M_{Ix}(z) = -Fbz/l$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v_1''(z) = -Fbz/(lEJ_x).$$

Рис. 7.29

После его интегрирования имеем:

$$v_1'(z) = -Fbz^2/(2lEJ_x) + C_1; \quad (a)$$

$$v_1(z) = -Fbz^3/(6lEJ_x) + C_1z + C_2. \quad (б)$$

Правый участок ( $z \geq a$ ).

Изгибающий момент  $M_{2x}(z) = -Fbz/l + F(z-a)$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

$$v_2''(z) = -Fbz/(lEJ_x) + F(z-a)/(EJ_x).$$

Последовательное интегрирование приводит к равенствам

$$v_2'(z) = -Fbz^2/(2lEJ_x) + F(z-a)^2/(2EJ_x) + C_3; \quad (в)$$

$$v_2(z) = -Fbz^3/(6lEJ_x) + F(z-a)^3/(6EJ_x) + C_3z + C_4. \quad (г)$$

Итак, два участка, два дифференциальных уравнения, четыре постоянных интегрирования. Граничные условия:

– отсутствие прогиба на левом конце:  $v_1(0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0$ ;

– общая касательная к обеим кривым на границе участков:

$$v_1'(a) = v_2'(a), \Rightarrow C_1 = C_3;$$

– равенство прогибов, соответствующих обеим функциям, на границе участков:  $v_1(a) = v_2(a), \Rightarrow C_1a + C_2 = C_3a + C_4$ , что с учетом предыдущих равенств приводит к  $C_4 = 0$ ;

– отсутствие прогиба на правом конце балки:  $v_2(l) = 0, \Rightarrow$

$$C_1 = C_3 = Fbl/(6EJ_x) - F(l-a)^3/(6lEJ_x) = Fb(l^2 - b^2)/(6lEJ_x).$$

Подставив найденные постоянные интегрирования в равенства (б) и (г), находим

$$v_1(z) = Fbz(l^2 - b^2 - z^2)/(6lEJ_x); \quad (д)$$

$$v_2(z) = F(bz(l^2 - b^2 - z^2)/l + (z-a)^3)/(6EJ_x). \quad (е)$$

Прогиб достигает наибольшего значения там, где касательная горизонтальна:  $v'(z) = 0$ . В рассматриваемой балке  $a > b$ , максимальный прогиб, очевидно, будет на левом участке. Из условия  $v_1'(z) = Fb(l^2 - b^2 - 3z^2)/(6lEJ_x) = 0$  находим  $z = \sqrt{(l^2 - b^2)}/3$ . На таком расстоянии от левой опоры прогиб будет наибольшим. Подставив найденное значение в равенство (д), получаем

$$v_{max} = Fb(l^2 - b^2)^{3/2}/(9\sqrt{3} lEJ_x). \quad (7.26)$$

Приведенные примеры показывают, что определение прогибов в балках – сравнительно громоздкая задача. С целью снижения трудоемкости решения практических задач

- разработаны специальные компактные методы интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки;
- составлены таблицы формул прогибов в балках при наиболее распространенных видах нагрузок;
- предложены способы определения перемещений, не требующие составления и решения дифференциальных уравнений.

Тем не менее к дифференциальным уравнениям приходится обращаться не только для определения перемещений. Многие задачи, связанные с анализом напряженно-деформированного состояния балок, требуют применения дифференциального соотношения между прогибом и моментом. Некоторые из таких задач рассмотрены ниже.

Обратим внимание на особенности геометрической реакции балки при изменении нагрузки. В уравнениях изогнутых осей всегда

- один из множителей – параметр нагрузки ( $F$  или  $q$ );
- второй множитель – геометрическая функция  $z$  с постоянными коэффициентами, не зависящими от нагрузки;
- в знаменателе – произведение  $EJ_x$ .

Это свидетельствует о том, что при изменении нагрузки пропорционально ей изменяются прогибы и углы поворота во всех местах балки – нагрузка и деформации синхронны. Произведение  $EJ_x$ , стоящее в знаменателе, носит название *изгибной жесткости*. Чем больше это произведение, тем меньше деформации, балка жестче.

7.12.3. Деформации и перемещения в балках обычно определяют для проверки ее жесткости. Условия жесткости имеют вид

$$\theta_{max} \leq [\theta], \quad v_{max} \leq [v] \quad (7.27)$$

в зависимости от того, на какой показатель деформирования балки наложено ограничение нормами проектирования. В квадратных скобках условий жесткости – допустимые значения соответствующих перемещений.

Балка – распространенный элемент строительных сооружений. Расчет на прочность и жесткость изгибаемых элементов конструкций объемней и сложнее чем при растяжении, сжатии и кручении. Методы расчета балок

- используют более широкий перечень геометрических понятий;

- требуют анализа закономерностей изменения внутренних силовых факторов, напряжений в ее сечениях, напряженного состояния в исследуемых точках;

- вовлекают в проверку прочности большее число механических характеристик материалов;

- применяют расчетный аппарат, выходящий за рамки элементарной математики.

Этим объясняется то повышенное внимание, которое уделено расчету балок.

Дифференциальное уравнение (7.23) получено на фоне трех предпосылок:

- поперечные сечения балок остаются плоскими и перпендикулярными оси, деформации сдвига слабо влияют на перемещения;

- перемещения малы и практически не влияют на усилия в балке;

- балка работает в упругой стадии – напряжения в ней не превышают предел пропорциональности материала.

Тем не менее возможны ситуации, когда какая-либо из отмеченных предпосылок неприемлема, и требуется привлечение более точного метода, учитывающего особенность конкретных условий. Подобные случаи не входят в программу курса. При необходимости определения деформаций в условиях уточнения уравнения (7.23) следует обратиться к дополнительной литературе.

## 8. Расчет балок на упругом основании

Среди строительных конструкций часто встречаются такие, которые можно рассматривать как **балки на упругом основании**. К их числу относятся опирающиеся на грунт ленточные фундаменты зданий, железнодорожные рельсы, шпалы, передающие усилия на насыпь, понтонные мосты, поддерживаемые водой, и т.п. Расчет таких балок, естественно, представляет практический интерес.

### 8.1. Исходные предпосылки.

#### Механическая модель основания

Применительно к балкам используются обычные предпосылки технической теории: деформации и перемещения малы; материал балки идеально упругий.

Выбор модели основания – сложная и ответственная часть задачи. Зависимость деформаций основания от нагрузки, действующей на него, определяется многими факторами: видом основания, величиной нагрузки, размерами конструкции и т.п. При расчете строительных конструкций используются разные механические модели основания. Простейшая из них **модель несвязного упругого основания двустороннего действия** предложена акад. Н.И.Фуссом<sup>1</sup> в 1801 г. и использована проф. Е.Винклером<sup>2</sup> в задачах о балках. Поэтому ее называют моделью Фусса–Винклера, а чаще моделью Винклера.

<sup>1</sup> Н.И.Фусс (1755–1825) – академик и секретарь Петербургской Академии наук, ученик и один из ближайших сотрудников Эйлера. Автор ряда работ по математическому анализу и приложениям его к задачам изгиба балок.

<sup>2</sup> Е.Винклер (1835–1888) – профессор Венского политехникума, автор многих оригинальных работ по сопротивлению материалов и строительной механике.

В соответствии с этой моделью основание можно представить семейством отдельных пружин, опирающихся на жесткую плоскость (рис. 8.1 а). С ними соединена балка. Под нагрузкой балка изгибается и деформирует пружины (рис. 8.1 б). При этом

– деформируются лишь те пружины, которые контактны с балкой (несвязность основания);

– основание препятствует и проникновению внутрь него, и отрыву балки (двустороннее действие, рис. 8.1 в);

– реакция основания пропорциональна осадке его поверхности (линейная упругость):

$$p = kv, \quad (8.1)$$

где  $p$  – интенсивность реакции основания;

$k$  – коэффициент жесткости основания, измеряемый в  $H/m^2$ ;

$v$  – осадка поверхности основания (вертикальное перемещение точки поверхности).

Коэффициент жесткости  $k$  зависит от вида основания и ширины балки:

$$k = k_f b;$$

$k_f$  носит название **коэффициента постели**<sup>1</sup> (размерность –  $H/m^3$  и т.п.);

$b$  – ширина балки (рис. 8.1).

Коэффициент постели грунтового основания зависит от многих факторов: вида грунта, его химического состава, влажности, возраста, способа укладки и т.п. Диапазон возможных значений  $k_f$  достаточно широк и более или менее точно может быть установлен с учетом конкретных условий. Существуют специальные методики определения коэффициента постели, отражающие влияние названных факторов и других характеристик грунта и конструкции.

<sup>1</sup> Индекс от англ. *foundation* – основание, фундамент.

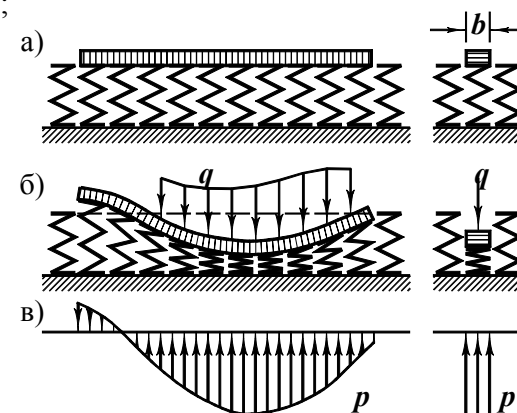


Рис. 8.1

Таблица 8.1

Коэффициенты постели некоторых грунтов<sup>1</sup>

№ п.п.	Материал основания	$k_f, \text{Н/см}^3$
1	Песок свеженасыпанный. Глина мокрая, размягченная.	1...5
2	Песок слежавшийся. Гравий насыпной. Глина влажная.	5...50
3	Песок и гравий, плотно слежавшийся. Щебень. Глина малой влажности.	50...100
4	Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный. Глина твердая.	100...200
5	Известняк, песчаник, мерзлота.	200...1000
6	Твердая скала.	1000...15000

## 8.2. Дифференциальное уравнение задачи. Математическая модель расчетной схемы

8.2.1. Для составления разрешающей системы уравнений (формирования математической модели задачи) рассмотрим балку под произвольной нагрузкой (рис. 8.2 а). Основание будем считать однородным (коэффициент  $k$  не зависит от  $z$ ).

Условия равновесия элементарного отрезка балки (рис. 8.2 б) приводят к равенствам:  $\Sigma Y = Q - q \cdot dz - (Q + dQ) + p \cdot dz = 0$ , или  $Q' = p - q$ . (а)

$\Sigma \text{mom}_c = M - Q \cdot dz + q \cdot dz \cdot dz/2 - M - dM - p \cdot dz \cdot dz/2 = 0$ , что после приведения подобных членов и отбрасывания малых величин второго порядка принимает вид  $M' = -Q$ . (б)

<sup>1</sup> Таблица позаимствована из учебника "Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности" / Г.С.Варданян, В.И.Андреев, Н.М.Атаров, А.А.Горшков; Под ред. Г.С.Варданяна. - М: Изд-во асс. строит. вузов, 1995. - 576 с.

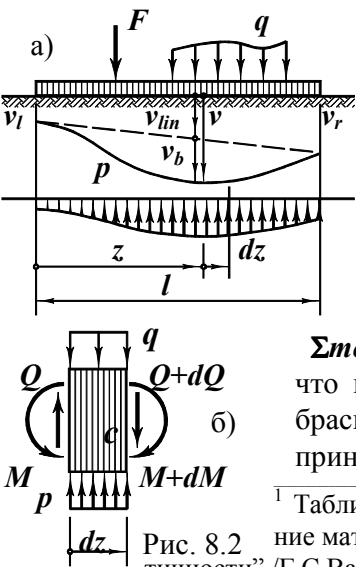


Рис. 8.2

Кривизна оси балки и изгибающий момент связаны законом Гука –  $v_b'' = M/(EJ)$ , (в)

в котором  $v_b$  – прогиб балки.

Осадка основания  $v$  равна сумме (рис. 8.2 а)

$$v = v_{lin} + v_b, \quad (г)$$

где  $v_{lin}$  – линейная часть осадки. Ее выражение –

$$v_{lin} = v_l + (v_r - v_l)z/l. \quad (д)$$

Система равенств (8.1) и (а)...(д) позволяет найти характеристики напряженно-деформированного состояния балки и основания.

8.2.2. Преобразуем разрешающую систему к виду, удобному для применения.

Из равенств (а) и (б) следует  $M' = q - p$ , а из (в)  $EJv_b'''' = M''$ , откуда  $EJv_b'''' = q - p$ . (е)

Принимая во внимание линейность выражения (д), по равенству (г) устанавливаем:  $v_b'''' = v''''$ . После подстановки полученного равенства и выражения (8.1) в уравнение (е) получаем

$$EJv'''' = q - kv. \quad (ж)$$

Чтобы придать уравнению канонический вид, обозначим

$$k/EJ = 4\beta^4. \quad (8.2)$$

Размерность  $\beta$  –  $1/м$ . Параметр  $\beta$  можно охарактеризовать как некоторую физико-механическую константу системы балка–основание. После обозначения (8.2) уравнение (ж) принимает вид

$$v'''' + 4\beta^4 v = q/EJ. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) позволяет найти осадку поверхности основания и его реакцию (8.1).

Прогиб балки описывается выражениями (г) и (д). Изгибающий момент – формулой (в), из которой по равенству  $v_b'' = v''$  следует

$$M = EJv''. \quad (8.4)$$

Поперечная сила (б)

$$Q = -EJv'''. \quad (8.5)$$

Таким образом, после решения уравнения (8.3) характеристики напряженно-деформированного состояния балки и упругого основания определяются равенствами (8.4), (8.5) и соответствующими им формулами для напряжений, деформаций и перемещений, полученными в предыдущих разделах курса.

### 8.3. Бесконечная балка

Изучение взаимодействия балки и упругого основания, их реакции на внешнюю нагрузку, а также методов решения задач естественно начинать с простейших случаев. Обратимся к балке бесконечной длины.

#### 8.3.1. Действие сосредоточенной силы

Рассмотрим бесконечно длинную балку под сосредоточенной силой  $F$  (рис. 8.3). Учитывая симметрию расчетной схемы, ограничимся правой половиной балки.

В произвольной точке интенсивность  $q = 0$ , поэтому дифференциальное уравнение (8.3) будет однородным:

$$v'''' + 4\beta^4 v = 0.$$

Интеграл этого уравнения выражается через гиперголо-тригонометрические функции –

$$v = Ae^{\beta z} \sin \beta z + Be^{\beta z} \cos \beta z + Ce^{-\beta z} \sin \beta z + De^{-\beta z} \cos \beta z.$$

где  $A, B, C, D$  – постоянные интегрирования.

Для определения постоянных воспользуемся граничными условиями.

Из физических соображений ясно, что при  $z \rightarrow \infty$  осадка упругого основания  $v \rightarrow 0$ . А так как при  $z \rightarrow \infty$  функции  $e^{\beta z} \rightarrow \infty$ , необходимо приравнять  $A = B = 0$ . После этого решение уравнения принимает вид

$$v = Ce^{-\beta z} \sin \beta z + De^{-\beta z} \cos \beta z. \quad (и)$$

Поскольку балка деформируется симметрично, то при  $z = 0$  производная  $v' = 0$ . Из выражения (и) следует

$$v' = C\beta e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) - D\beta e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z).$$

Подставляя сюда  $z = 0$  и приравнявая  $v' = 0$ , получаем  $C - D = 0$ .

Решение (и) упрощается:  $v = Ce^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z)$ . (к)

Для определения постоянной  $C$  вновь воспользуемся симметрией. Равнодействующая реакции основания равна силе  $F$ . При этом давление на каждую половину балки приводится к  $F/2$ . Отсюда следует, что при  $z \rightarrow 0$  поперечная сила  $Q \rightarrow -F/2$ . Но по формуле (8.5)  $Q = -EJv''''$ . Следовательно, при  $z \rightarrow 0$  должно быть  $v'''' \rightarrow F/(2EJ)$ .

Из равенства (к), дифференцируя, находим:

$$\begin{aligned} v' &= -2C\beta e^{-\beta z} \sin \beta z; \\ v'' &= -2C\beta^2 e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z); \\ v'''' &= 4C\beta^3 e^{-\beta z} \cos \beta z. \end{aligned} \quad (л)$$

Подставляя в последнее равенство из (л)  $z = 0$  и  $v'''' = F/(2EJ)$ , имеем

$$C = F/(8\beta^3 EJ). \quad (м)$$

Равенства (к), (л), (м) и формулы (8.4) и (8.5) позволяют найти усилия и перемещения в балке и на поверхности основания.

С целью сокращения записи введем обозначения:

$$\begin{aligned} e^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z) &= \eta_1(z); \quad e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) = \eta_2(z); \\ e^{-\beta z} \cos \beta z &= \eta_3(z); \quad e^{-\beta z} \sin \beta z = \eta_4(z). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Сопоставляя равенства (к) и (л), с одной стороны, и (8.6), с другой, нетрудно заметить дифференциальные связи между функциями:

$$\eta_1'(z) = -2\beta\eta_3(z); \quad \eta_2'(z) = -2\beta\eta_4(z); \quad \eta_3'(z) = -\beta\eta_1(z); \quad \eta_4'(z) = \beta\eta_2(z). \quad (8.7)$$

Функции  $\eta_1(z) \dots \eta_4(z)$  протабулированы и приведены в справочной литературе. Фрагмент таблиц приведен ниже.

Согласно равенствам (к), (м) и обозначениям (8.6) осадки поверхности упругого основания описываются выражением

$$v = F\eta_1/(8\beta^3 EJ). \quad (8.8)$$

Эпюра осадок от силы (рис. 8.4 а) показана на рис. 8.4 б. Формула (8.8) справедлива при  $z \geq 0$ . Для левой половины балки график осадок симметричен. В бесконечной балке осадки и прогибы – одно и то же.

Эпюра  $p$  – реактивного давления основания (8.1) подобна эпюре осадок.

Изгибающий момент (8.4) с учетом обозначений (8.6) и зависимостей (8.7) выражается так:

$$M = -F\eta_2/(4\beta). \quad (8.9)$$

Эпюра момента, подсчитанная для правой половины и симметрично отраженная влево, показана на рис. 8.4 в.

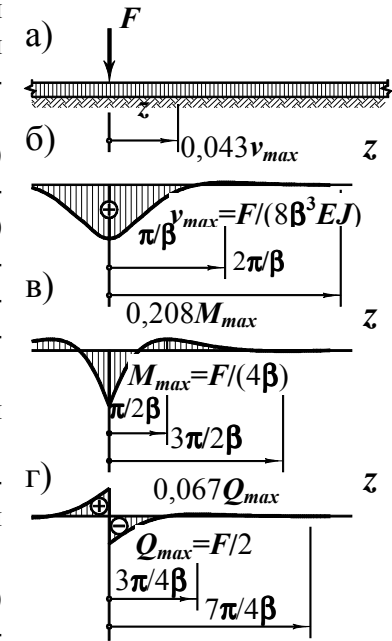


Рис. 8.4

Гиперболо-тригонометрические функции

Арг. $\beta z$	Значения функций				Арг. $\beta z$	Значения функций			
	$\eta$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$		$\eta$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903	3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627	3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189	3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610	3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908	3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099	3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
0,7	0,6997	0,0599	0,3708	0,3199	3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223	3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
0,9	0,5712	-0,0657	0,2525	0,3185	3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0139
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096	4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	-0,0139
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967	4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807	4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626	4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0124
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430	4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226	4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0109
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018	4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812	4,7	-0,0092	0,0090	-0,0001	-0,0091
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610	4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415	4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1231	5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057	5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0056
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0896	5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748	5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613	5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0491	5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383	5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287	5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204	5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132	5,9	0,0015	0,0036	0,0025	-0,0010

Поперечная сила (8.5) при обозначениях (8.6) и соотношениях (8.7) –

$$Q = -F\eta_2/2. \tag{8.10}$$

Эпюра кососимметрична. Поэтому подсчитанная для правой половины по формуле (8.10) она отражена влево с изменением знака (рис. 8.4 г).

Формулы (8.8)–(8.10) и построенные по ним эпюры показывают, что изменение усилий и перемещений по длине балки носит знакопеременно-затухающий характер. Наибольший эффект действия силы проявляется в месте ее приложения. Скорость уменьшения усилий и деформаций определяется множителем  $e^{-\beta z}$ . Поэтому коэффициент  $\beta$  называют *параметром затухания*.

Отметим, что величины прогиба и усилий в балке, а также скорости их затухания по длине зависят и от жесткости основания (коэффициента  $k$ ), и от изгибной жесткости балки ( $EJ$ ), фигурирующих либо явно, либо в составе параметра  $\beta$ . Так, ужесточение основания (увеличение  $k$ , а вместе с ним и  $\beta$ ) приводит к уменьшению осадок и моментов; скорость же затухания их по длине при этом возрастает. Возрастет давление под силой.

Увеличение изгибной жесткости (уменьшение  $\beta$ ) снижает скорость затухания осадок и усилий по длине балки, уменьшает прогиб и давление под силой, но приводит к некоторому росту максимального изгибающего момента.

Более полный и детальный анализ влияния жесткостных характеристик балки и основания может быть выполнен с помощью приведенных выше формул и таблиц фигурирующих в них функций.

Неоднозначное влияние коэффициента постели, материала и размеров сечения балки позволяет инженеру, регулируя ими, принимать оптимальные конструктивные решения, обеспечивающие выполнение условий прочности и жесткости при минимальных экономических затратах.



### 8.3.2. Балка под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотренное выше действие сосредоточенной силы на бесконечную балку не удовлетворяет практических запросов, ибо в составе внешних воздействий могут фигурировать распределенные нагрузки и сосредоточенные моменты. Для вывода соответствующих формул, а также с познавательной целью рассмотрим бесконечную балку под равномерно распределенной нагрузкой на участке ограниченной длины (рис. 8.5 а).

Во избежание трудностей, связанных с решением уравнения (8.3), воспользуемся формулой (8.8) и, выделив в нагрузке элементарную силу  $q_0 d\zeta$ , просуммируем результаты их действия. При этом будем иметь в виду, что равенство (8.8) справедливо лишь для положительных координат.

Если точка находится левее участка нагружения ( $z \leq z_{ql}$ ), то про-



Рис. 8.5

Если точка находится внутри участка нагружения ( $z_{ql} \leq z \leq z_{qr}$ ),

то 
$$v = q_0 \left( \int_z^z (z - \zeta) d\zeta + \int_z^{z_{qr}} \eta(\zeta - z) d\zeta \right) / (8\beta^3 EJ).$$

После интегрирования

$$v = q_0 (2 - \eta_2(z - z_{ql}) - \eta_2(z_{qr} - z)) / (2k). \quad (8.17)$$

Изгибающий момент и поперечную силу находим по формулам (8.4) и (8.5), используя соотношения (8.7):

$$M = q_0 (\eta_3(z - z_{ql}) - \eta_3(z_{qr} - z)) / (4\beta^2). \quad (8.18)$$

$$Q = q_0 (\eta_1(z - z_{ql}) - \eta_1(z_{qr} - z)) / (4\beta). \quad (8.19)$$

Поскольку в формулы (8.11) ... (8.16) входят затухающие гиперболо-тригонометрические функции (8.6), эпюры характеристик напряженно-деформированного состояния балки и основания за пределами участка нагружения имеют качественно такой же вид, как и при сосредоточенной силе – знакопеременно-затухающий.

Очертания эпюр внутри участка зависят от его длины и жесткостных характеристик балки и основания. Один из качественных вариантов эпюр показан на рис. 8.5 б–г.

Если увеличивать длину участка нагружения, то на достаточном удалении от его краев функции  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  станут практически нулевыми. Согласно формулам (8.17)–(8.19) осадка будет стремиться к  $v = q_0 / (2k)$ , изгибающий момент и поперечная сила будут ничтожно малы. Бесконечная балка, нагруженная по всей длине равномерно распределенной нагрузкой, оставаясь прямой, поступательно смещается в направлении нагрузки.

Выражения (8.11)–(8.19) позволяют расширить анализ влияния характеристик балки и основания на очертания эпюр и величины осадок и усилий. В целях сокращения объема излагаемого материала воздержимся от такого анализа, оставив его заинтересованному читателю.

### 8.3.3. Действие сосредоточенного момента

Расширяя перечень рассматриваемых видов нагрузки, обратимся к сосредоточенному моменту (рис. 8.6 а).

Представим момент парой сил (рис. 8.6 б). По условию статической эквивалентности  $F\Delta z = M_0$ . Силы  $F = M_0 / \Delta z$ .

Прогиб в произвольной точке будет равен разности прогибов от указанных сил. По формуле (8.8) имеем

$$v = F (\eta(z + \Delta z) - \eta(z)) / (8\beta^3 EJ) = M_0 ((\eta(z + \Delta z) - \eta(z)) / \Delta z) / (8\beta^3 EJ).$$

Переход от пары сил к сосредоточенному моменту осуществим предельным уменьшением  $\Delta z$ :

а) 
$$v = M_0 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} ((\eta(z+\Delta z) - \eta(z))/\Delta z) / (8\beta^3 EJ).$$

б) Предел, стоящий в этом выражении, есть производная функции  $\eta$ . По соотношению (8.7)  $\eta' = -2\beta\eta_3$ . Таким образом,

в) 
$$v = -M_0\eta_3 / (4\beta^2 EJ). \quad (8.20)$$

Дифференцируя полученное выражение в соответствии с равенствами (8.4) и (8.5) и учитывая (8.7), имеем

г) 
$$M = M_0\eta_2 / 2. \quad (8.21)$$

д) 
$$Q = M_0\beta\eta / 2. \quad (8.22)$$

Эпюры  $v$ ,  $M$  и  $Q$  изображены на рис. 8.6 в ... д. Формулы (8.20) ... (8.22) справедливы для правой половины балки. Для обобщения их на левую часть следует принять во внимание законы симметрии.

Если на балку действуют несколько нагрузок из рассмотренного набора, следует построить эпюры от каждой из них, после чего одноименные эпюры просуммировать.

**Пример 8.1.** На бесконечную балку действуют: сила  $F = 300$  кН; равномерная нагрузка интенсивностью  $q_0 = 150$  кН/м; момент  $M_0 = 50$  кНм (рис. 8.7 а).

Длина участка балки  $l = 1$  м; сечение прямоугольное шириной  $b = 0,8$  м и высотой  $h = 1,67$  м. Материал балки – железобетон ( $E = 2 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>); основание – плотный грунт ( $k_f = 5 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>).

Построим эпюры прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил в пределах участка, выделенного на рисунке.

Изгибная жесткость балки –  $EJ = Ebh^3/12 = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,8 \cdot 1,67^3/12 = 6,25 \cdot 10^6$  кНм<sup>2</sup>.

Коэффициент жесткости основания  $k = k_f b = 5 \cdot 10^4 \cdot 0,8 = 4 \cdot 10^4$  кН/м<sup>2</sup>.

Параметр затухания 
$$\beta = \sqrt[4]{k/(4EJ)} = \sqrt[4]{4 \cdot 10^4 / (4 \cdot 6,25 \cdot 10^6)} = 0,2 \text{ 1/м.}$$

Вначале построим эпюры от силы  $F$ . Выбрав начало координат в месте ее приложения, по формулам (8.8)...(8.10) находим:

а) 
$$v(F) = F\eta_1(z_1)/(8\beta^3 EJ) = 300\eta_1(z_1)/(8 \cdot 0,2^3 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = 7,5 \cdot 10^{-4} \eta_1(z_1) \text{ м;}$$

б) 
$$M(F) = -F\eta_2(z_1)/(4\beta) = -300\eta_2(z_1)/(4 \cdot 0,2) = -375\eta_2(z_1) \text{ кНм;}$$

в) 
$$Q(F) = -F\eta_3(z_1)/2 = -150\eta_3(z_1) \text{ кН.}$$

Построенные по полученным равенствам эпюры изображены на рис. 8.7 б ... г.

Рассмотрим теперь балку под равномерно распределенной нагрузкой. Начало координат можно оставить прежним. Тогда  $z_{q1} = l = 1$  м,  $z_{qr} = 4l = 4$  м.

При  $-\infty < z_1 \leq 1$  м формулы (8.11) ... (8.13) принимают вид

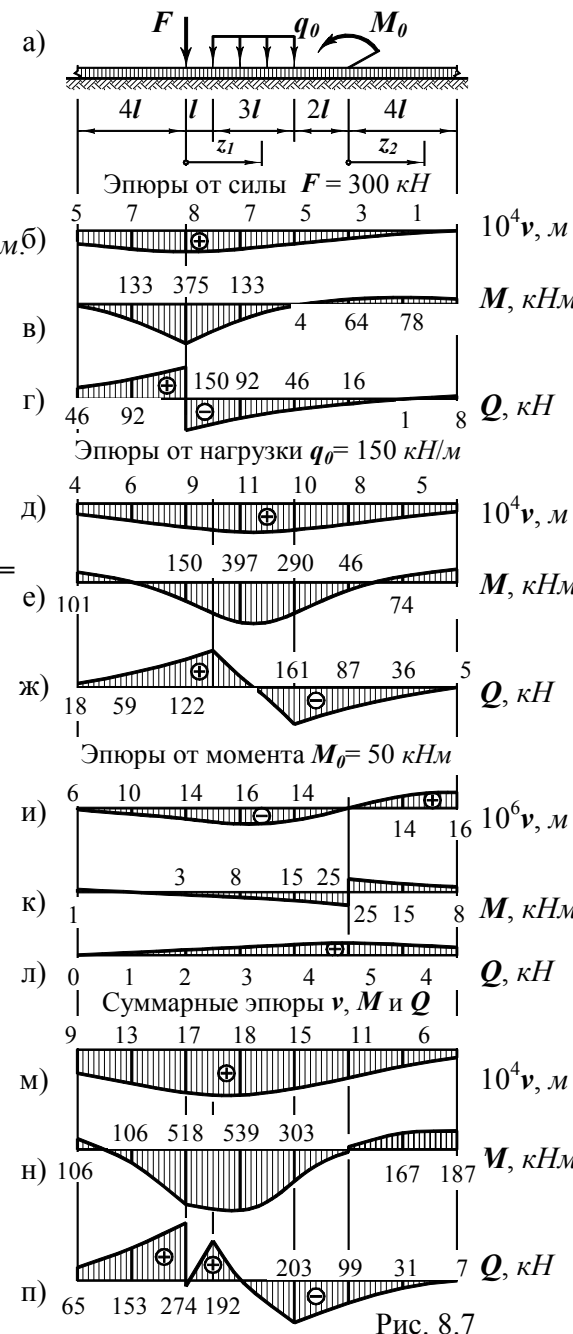


Рис. 8.7

$$v(q_0) = q_0(\eta_2(z_{qr}-z_I) - \eta_2(z_{qr}-z_I))/(2k) =$$

$$= 150(\eta_2(1-z_I) - \eta_2(4-z_I))/(2 \cdot 4 \cdot 10^4) = 18,75 \cdot 10^{-4}(\eta_2(1-z_I) - \eta_2(4-z_I)) \text{ м};$$

$$M(q_0) = q_0(\eta_3(z_{qr}-z_I) - \eta_3(z_{qr}-z_I))/(4\beta^2) =$$

$$= 150(\eta_3(1-z_I) - \eta_3(4-z_I))/(4 \cdot 0,2^2) = 937,5(\eta_3(1-z_I) - \eta_3(4-z_I)) \text{ кНм};$$

$$Q(q_0) = q_0(\eta_1(z_{qr}-z_I) - \eta_1(z_{qr}-z_I))/(4\beta) =$$

$$= 150(\eta_1(1-z_I) - \eta_1(4-z_I))/(4 \cdot 0,2) = 187,5(\eta_1(1-z_I) - \eta_1(4-z_I)) \text{ кН}.$$

На участке  $1 \leq z_I \leq 4 \text{ м}$  следует пользоваться формулами (8.17) ... (8.19).

$$v(q_0) = q_0(2 - \eta_2(z_I - z_{qI}) - \eta_2(z_{qr} - z_I))/(2k) = 18,75 \cdot 10^{-4}(2 - \eta_2(z_I - 1) - \eta_2(4 - z_I)) \text{ м};$$

$$M(q_0) = -q_0(\eta_3(z_I - z_{qI}) + \eta_3(z_{qr} - z_I))/(4\beta^2) = -937,5(\eta_3(z_I - 1) + \eta_3(4 - z_I)) \text{ кНм};$$

$$Q(q_0) = q_0(\eta_1(z_I - z_{qI}) - \eta_1(z_{qr} - z_I))/(4\beta) = 187,5(\eta_1(z_I - 1) - \eta_1(4 - z_I)) \text{ кН}.$$

Для участка, расположенного правее нагрузки, нет необходимости записывать формулы и производить по ним вычисления. Можно воспользоваться симметрией. Эпюры  $v(q_0)$ ,  $M(q_0)$  и  $Q(q_0)$  изображены на рис. 8.7 д...ж.

Действие сосредоточенного момента  $M_0$ .

Перемещения и усилия от него описываются формулами (8.20)

$$\dots (8.22): \quad v(M_0) = -M_0 \eta_3(z_2)/(4\beta^2 EJ) =$$

$$= -50 \eta_3(z_2)/(2 \cdot 0,2^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = -5 \cdot 10^{-5} \eta_3(z_2) \text{ м};$$

$$M(M_0) = M_0 \eta_2(z_2)/2 = 25 \eta_2(z_2) \text{ кНм};$$

$$Q(M_0) = M_0 \beta \eta_1(z_2)/2 = 50 \cdot 0,2 \eta_1(z_2)/2 = 5 \eta_1(z_2) \text{ кН}.$$

Эпюры  $v(M_0)$ ,  $M(M_0)$  и  $Q(M_0)$ , построенные по записанным выражениям для  $z_2 \geq 0$  и отображенные на область  $z_2 < 0$  с учетом косимметричного действия момента, изображены на рис. 8.7 и...л.

Эпюры осадок поверхности основания, изгибающих моментов и поперечных сил в балке при одновременном действии  $F$ ,  $q_0$  и  $M_0$  получены суммированием ординат одноименных эпюр от каждого рассмотренного воздействия. Суммарные эпюры показаны на рис. 8.7 м...п.

Пример проиллюстрировал методику расчета бесконечной балки на сложную нагрузку.

## 8.4. Формулы для полубесконечной балки, нагруженной на краю

Обратимся теперь к полубесконечной балке – балке, ограниченной с одной стороны (рис. 8.8 а, 8.9 а). Решения для такой балки обычно не представляют самостоятельного интереса, но используются при расчетах коротких балок. Формулы прогибов, моментов и поперечных сил для этих схем выводятся аналогично полученным выше. Приведем окончательные результаты.

### 8.4.1. Балка нагружена силой на краю (рис. 8.8 а)

$$\text{Осадка} - \quad v = F \eta_2/(2\beta^3 EJ). \quad (8.23)$$

$$\text{Изгибающий момент} - \quad M = F \eta_3/\beta. \quad (8.24)$$

$$\text{Поперечная сила} - \quad Q = -F \eta_1. \quad (8.25)$$

Отвечающие формулам эпюры изображены на рис. 8.8 б...г.

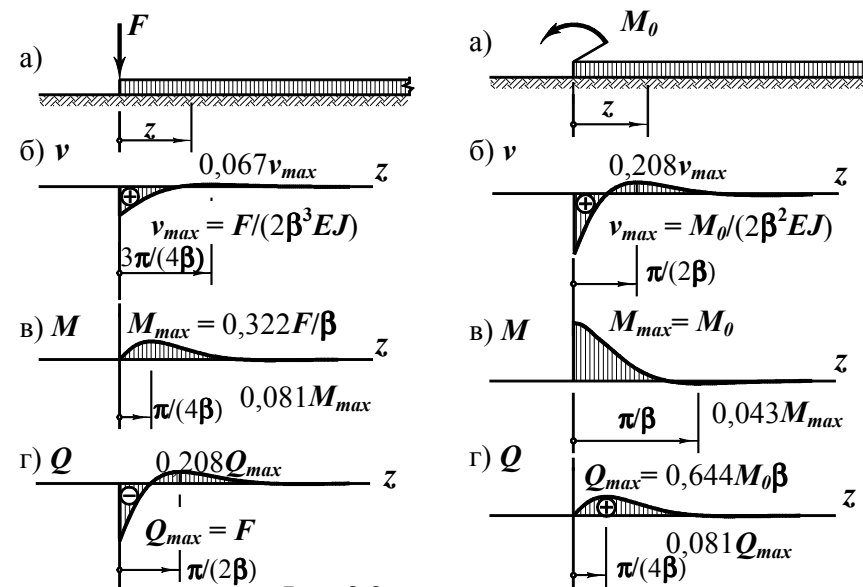


Рис. 8.8

Рис. 8.9

### 8.4.2. Балка нагружена моментом на краю (рис. 8.9 а)

$$\text{Осадка} - \quad v = M_0 \eta_1/(2\beta^2 EJ). \quad (8.26)$$

$$\text{Изгибающий момент} - \quad M = M_0 \eta. \quad (8.27)$$

$$\text{Поперечная сила} - \quad Q = 2\beta M_0 \eta_3. \quad (8.28)$$

Соответствующие этим формулам эпюры показаны на рис. 8.9 б...г.

## 8.5. Балки конечной длины

Бесконечно длинные балки – это идеализированные балки ограниченной протяженности. В этой связи возникает вопрос о границах возможности такой идеализации.

Рассмотрим две одинаково нагруженные балки – балку конечной длины (рис. 8.10 а) и бесконечную балку (рис. 8.10 б). В первой из них изгибающие моменты и поперечные силы на краях отсутствуют. В соответствующих же сечениях бесконечной балки они не равны нулю (рис. 8.10 в). По этой причине напряженно-деформированные состояния балки конечной длины и идентичного участка бесконечной балки будут разными. Чем

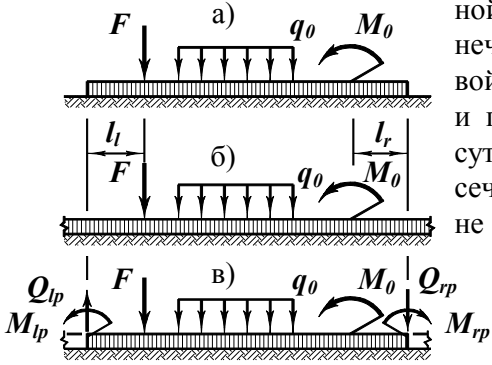


Рис. 8.10

больше усилия  $M_{lp}$ ,  $Q_{lp}$ ,  $M_{rp}$  и  $Q_{rp}$ , тем больше разнятся состояния сопоставляемых балок. В зависимости от степени влияния отмеченных “лишних” усилий балки конечной длины подразделяют на *длинные* и *короткие*.

### 8.5.1. Длинные балки

Приведенные выше решения показывают, что по мере удаления от места приложения нагрузки прогибы и внутренние усилия затухают и на некотором расстоянии становятся пренебрежимо малыми. Эпюры, приведенные на рис. 8.4 ... 8.6, 8.8 и 8.9, а также таблицы фигурирующих в решениях функций показывают, что на удалении  $z = 2\pi/\beta$  осадки, изгибающие моменты и поперечные силы составляют доли процента от соответствующих максимальных значений. Естественно, ими можно пренебречь. Таким образом, если длины свободных концов балки  $l_l$  и  $l_r$  (рис. 8.10 а) удовлетворяют условиям

$$l_l \geq 2\pi/\beta, \quad l_r \geq 2\pi/\beta, \quad (8.29)$$

то моменты,  $M_{lp}$  и  $M_{rp}$ , а также силы  $Q_{lp}$  и  $Q_{rp}$  пренебрежимо малы. В этом случае можно считать, что характеристики напряженно-деформированного состояния рассматриваемой части бесконечной балки такие же, как у балки конечной длины.

Балки, удовлетворяющие условиям (8.29), называют *длинными*. При их расчетах применимы формулы, полученные для бесконечной балки.

Если какое-либо из условий (8.29) нарушено, балку считают *короткой*. О методах их расчетов – ниже.

Существенно, что принадлежность балки к категории длинных (коротких) определяется не только ее протяженностью. Из рис. 8.10 очевидно влияние мест приложения внешних сил. Может оказаться, что при одной нагрузке балку можно считать длинной, при другой следует рассматривать как короткую. Кроме того, наличие параметра  $\beta$  в условиях (8.29) свидетельствует о влиянии на классификацию балки жесткостных характеристик  $EJ$  и  $k$ . Таким образом, термин “длинная (короткая) балка” является в отмеченном смысле условным.

### 8.5.2. Короткие балки

При расчетах коротких балок приведенные выше формулы дают значительную погрешность. Нужен другой метод расчета.

В учебной и научной литературе предложены и описаны различные методы расчетов коротких балок. Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками, имеет свою область применения. Не вдаваясь в перечисление и анализ предложенных методов, остановимся на так называемом *методе компенсирующих сил*.

Суть метода состоит в следующем. Пусть требуется найти усилия и деформации в короткой балке, изображенной на рис. 8.11 а. Задачу решают в два этапа.

На первом этапе рассматривают аналогично нагруженную бесконечную балку (рис. 8.11 б). Определяют усилия и деформации в ней. В сечениях, совпадающих с краями заданной балки, возникают усилия  $M_{lp}$ ,  $Q_{lp}$ ,  $M_{rp}$  и  $Q_{rp}$  (рис. 8.11 в). Их нужно устранить.

С этой целью на втором этапе рассматривают полубесконечные балки. Одна из них ограничена слева (рис. 8.11 г, д), другая справа (рис. 8.11 е, ж). К краям полубесконечных балок прикладывают компенсирующие силы  $M_{lc}$ ,  $F_{lc}$ ,  $M_{rc}$  и  $F_{rc}$ . Величины компенсирующих сил подбирают из условий отсутствия суммарных  $M_l$ ,  $Q_l$ ,  $M_r$  и  $Q_r$  в сечениях, соответствующих краям заданной короткой балки.

Эпюры для схемы, изображенной на рис. 8.11 а, получают суммированием одноименных эпюр, соответствующих балкам и нагрузкам, представленным на рис. 8.11 б ... ж. Рассмотрим пример.

**Пример 8.2.** Построим эпюры осадки поверхности основания,

давления на грунт, изгибающего момента и поперечной силы в балке, изображенной на рис. 8.12 а, при тех же жесткостных характеристиках, что и в примере 8.1 ( $k = 4 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$   $EJ = 6,25 \cdot 10^6 \text{ кНм}^2$ ).

Установим категорию балки. Длины свободных концов  $l_l = l_r = 2 \text{ м}$ . Согласно условиям (8.29) минимальная длина концов равна  $2\pi/\beta = 2 \cdot 3,14/0,2 = 31,4 \text{ м}$ .

Балка короткая. Применим метод компенсирующих сил.

Первый этап – построение эпюр от заданной нагрузки в бесконечной балке. Этот этап, как самостоятельная задача, рассмотрен в примере 8.1.

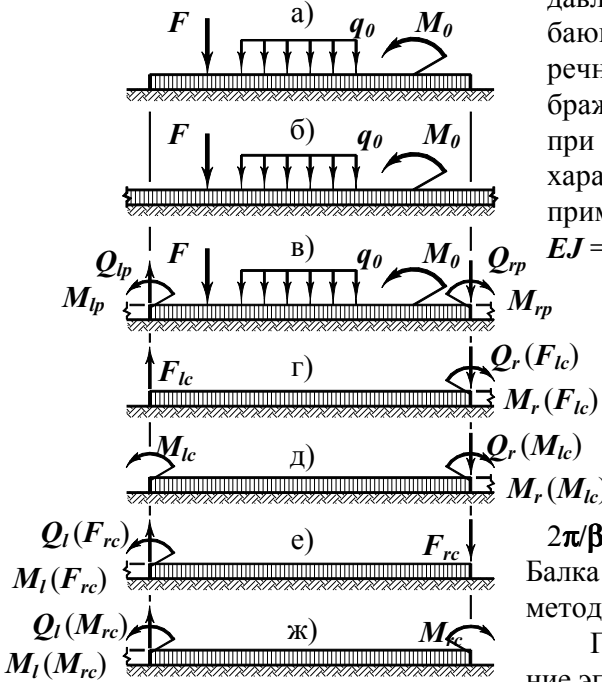


Рис. 8.11

Соответствующие схемы и эпюры приведены на рис. 8.12 б ... д. На краях рассматриваемого участка возникают

$$M_{lp} = 106 \text{ кНм}, Q_{lp} = 153 \text{ кН}, M_{rp} = 167 \text{ кНм} \text{ и } Q_{rp} = -31 \text{ кН}.$$

Второй этап – построение эпюр от компенсирующих сил в полубесконечных балках. От силы  $F_{lc}$ , приложенной на левой границы балки (8.12 е), по формулам (8.23) ... (8.25) находим:

$$v(F_{lc}) = -F_{lc}\eta_2/(2\beta^3 EJ) = -F_{lc}\eta_2/(2 \cdot 0,2^3 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = -10^{-5} F_{lc}\eta_2 (\text{м/кН});$$

$$M(F_{lc}) = -F_{lc}\eta_3/\beta = -F_{lc}\eta_3/(2 \cdot 0,2) = -50 F_{lc}\eta_3 (\text{м}); Q(F_{lc}) = F_{lc}\eta_1.$$

Эпюры, соответствующие полученным выражениям, изображены на рис. 8.12 ж ... к. Усилия на краях, показаны на рис. 8.12 е.

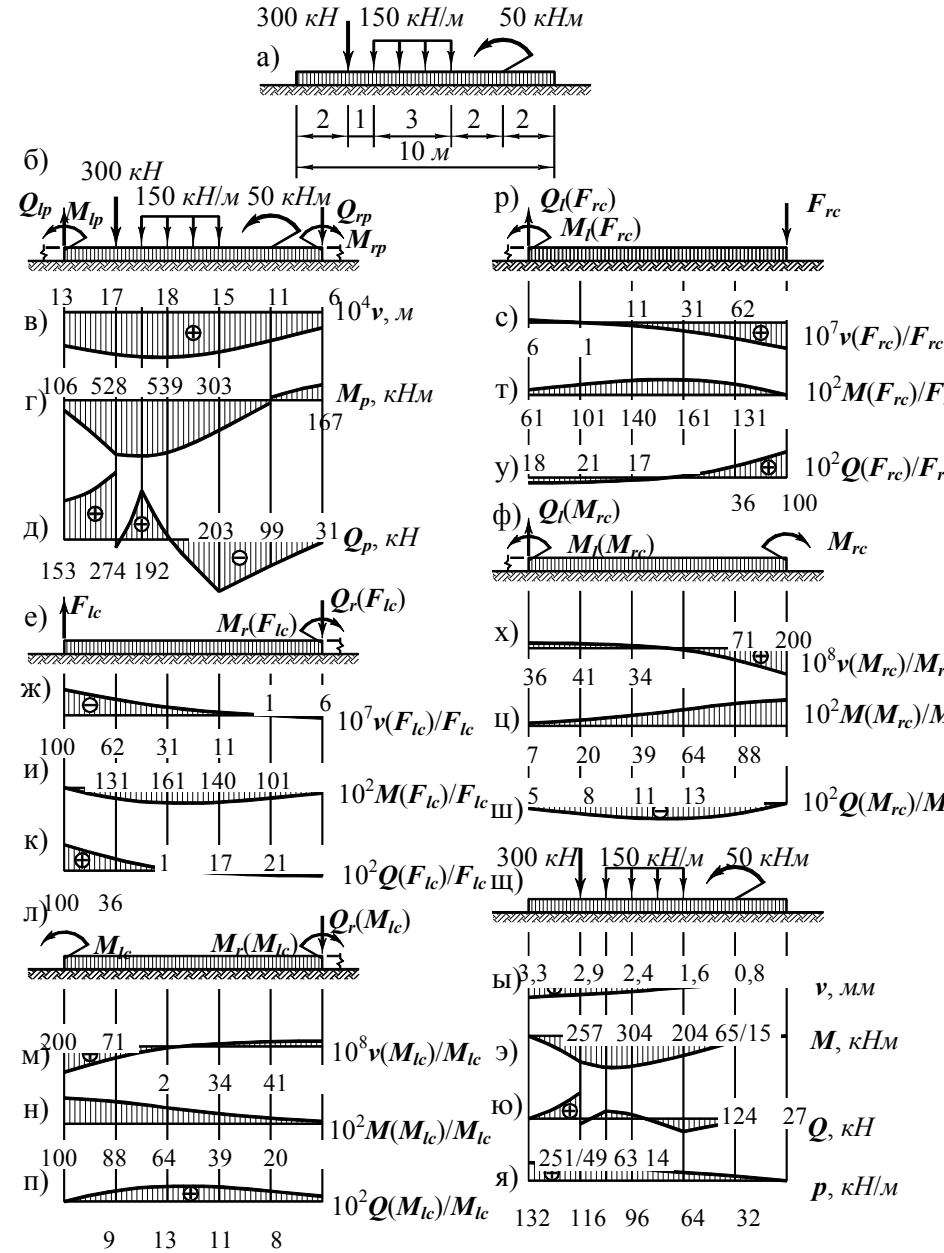


Рис. 8.12

Момент  $M_{lc}$  (рис. 8.12 л) согласно формулам (8.26) ... (8.28) вы-  
зывает

$$v(M_{lc}) = M_{lc}\eta_l / (2\beta^2 EJ) = M_{lc}\eta_l / (2 \cdot 0,2^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6) = 2 \cdot 10^{-6} M_{lc}\eta_l (l/\kappa H);$$

$$M(M_{lc}) = M_{lc}\eta;$$

$$Q(M_{lc}) = 2\beta M_{lc}\eta_3 = 0,42 M_{lc}\eta_3 (l/M).$$

Усилия на краях участка и эпюры, отвечающие полученным равенст-  
вам, показаны на рис. 8.12 л ... п.

Эпюры от  $F_{rc}$  – правой компенсирующей силы (рис. 8.12 р) ана-  
логичны изображенным на рис. 8.12 ж ... к. С учетом направления  
силы  $F_{rc}$  и правил знаков они имеют вид, приведенный на рис. 8.12 с  
... у.

По эпюрам с рис. 8.12 м ... п построены аналогичные эпюры от  
момента  $M_{rc}$  (рис. 8.12 ф). Они показаны на рис. 8.12 х ... ш.

Это – подготовительная часть задачи.

Подберем теперь компенсирующие силы  $M_{lc}$ ,  $F_{lc}$ ,  $M_{rc}$  и  $F_{rc}$  так,  
чтобы в крайних сечениях рассматриваемого участка отсутствовали  
поперечные силы  $Q_l$ ,  $Q_r$  и изгибающие моменты  $M_l$ ,  $M_r$ .

Левое сечение:

$$- \text{поперечная сила } Q_l = Q_{lp} + F_{lc} + Q_l(F_{rc}) + Q_l(M_{rc}) = 0;$$

$$- \text{изгибающий момент } M_l = M_{lp} + M_{lc} + M_l(F_{rc}) + M_l(M_{rc}) = 0.$$

Правое сечение:

$$- \text{поперечная сила } Q_r = Q_{rp} + F_{rc} + Q_r(F_{lc}) + Q_r(M_{lc}) = 0;$$

$$- \text{изгибающий момент } M_r = M_{rp} + M_{rc} + M_r(F_{lc}) + M_r(M_{lc}) = 0.$$

Взяв с соответствующих эпюр крайние значения фигурирующих  
здесь сил, придаем системе уравнений вид

$$153 + F_{lc} - 0,179 F_{rc} + 0,049 M_{rc} = 0;$$

$$-106 + M_{lc} + 0,610 F_{rc} + 0,066 M_{rc} = 0;$$

$$-31 + F_{rc} - 0,179 F_{lc} + 0,049 M_{lc} = 0;$$

$$167 + M_{rc} - 0,610 F_{lc} + 0,066 M_{lc} = 0$$

(отличия коэффициентов при неизвестных в записанной системе от  
ординат на эпюрах объясняются округлением последних). Решение  
системы:

$$F_{lc} = -168 \text{ кН}, M_{lc} = 128 \text{ кНм}, F_{rc} = -5,7 \text{ кН}, M_{rc} = -279 \text{ кНм}.$$

Окончательные эпюры получаем суммированием ординат од-  
ноименных эпюр:

$$v = v_p + v(F_{lc}) \cdot F_{lc} + v(M_{lc}) \cdot M_{lc} + v(F_{rc}) \cdot F_{rc} + v(M_{rc}) \cdot M_{rc};$$

$$M = M_p + M(F_{lc}) \cdot F_{lc} + M(M_{lc}) \cdot M_{lc} + M(F_{rc}) \cdot F_{rc} + M(M_{rc}) \cdot M_{rc};$$

$$Q = Q_p + Q(F_{lc}) \cdot F_{lc} + Q(M_{lc}) \cdot M_{lc} + Q(F_{rc}) \cdot F_{rc} + Q(M_{rc}) \cdot M_{rc}.$$

При найденных значениях компенсирующих сил эти равенства вы-  
глядят так:

$$v = v_p - 168v(F_{lc}) + 128v(M_{lc}) - 5,7v(F_{rc}) - 279v(M_{rc});$$

$$M = M_p - 168M(F_{lc}) + 128M(M_{lc}) - 5,7M(F_{rc}) - 279M(M_{rc});$$

$$Q = Q_p - 168Q(F_{lc}) + 128Q(M_{lc}) - 5,7Q(F_{rc}) - 279Q(M_{rc}).$$

После умножения ординат указанных эпюр на соответствующие  
числа и суммирования окончательные эпюры в заданной балке при-  
мут вид, показанный на рис. 8.12 ы ... ю.

Давление балки на грунт пропорционально осадке (8.1):  $p = kv =$   
 $= 4 \cdot 10^4 v$ . Эпюра давления изображена на рис. 8.12 я. Задача решена.

Как следует из приведенного примера, для определения ком-  
пенсирующих сил приходится решать систему линейных алгебраиче-  
ских уравнений четвертого порядка. Существуют методы расчета  
коротких балок, требующие решения системы уравнений второго  
порядка (метод начальных параметров). Однако это отличие не сле-  
дует считать существенным недостатком описанного здесь метода,  
ибо матрица его системы хорошо обусловлена. В методе же началь-  
ных параметров при некоторых сочетаниях характеристик балки и  
основания определитель системы уравнений становится близким к  
нулю. Это значительно снижает точность решения. Добавим, что ис-  
пользование ЭВМ в расчетах практически устраняет какие-либо  
сложности, связанные с порядком системы линейных алгебраиче-  
ских уравнений.

Рассмотренная выше модель Фусса–Винклера является про-  
стейшей из моделей, предложенных для расчетов балок, опираю-  
щихся на деформируемое основание. В расчетной практике исполь-  
зуют модели упругого полупространства, упругого слоя конечной  
толщины, а также синтезированные деформируемые конструкции,  
имитирующие реакцию деформируемого основания. Изучение таких  
моделей выходит за рамки курса.

## 9. Оценка прочности материалов при сложных напряженных состояниях

В предыдущих разделах установлено, что в поперечных сечениях стержневых элементов конструкций могут возникать как нормальные, так и касательные напряжения. В таких случаях материал находится в сложном напряженном состоянии. Для оценки степени опасности напряженно-деформированного состояния необходимо установить, насколько близко оно к предельному. Естественно в этой ситуации обратиться к опыту.

### 9.1. Об испытаниях материала при сложном напряженном состоянии

Для испытания материала при сложном напряженном состоянии обычно используются тонкостенные трубчатые образцы (рис. 9.1 а), распределение напряжений в которых практически равномерно. Образцы нагружают продольной силой, крутящим моментом и внутренним давлением.

Элемент образца, вырезанный поперечными и радиальными плоскостями, подвержен напряжениям  $\sigma_z$ ,  $\sigma_s$  и  $\tau_{zs}$  (рис. 9.1 б). Конкретным значениям  $N$ ,  $M_t$  и  $p$  соответствуют конкретные  $\sigma_z$ ,  $\sigma_s$  и  $\tau_{zs}$ ;  $\alpha_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис. 9.1 в).

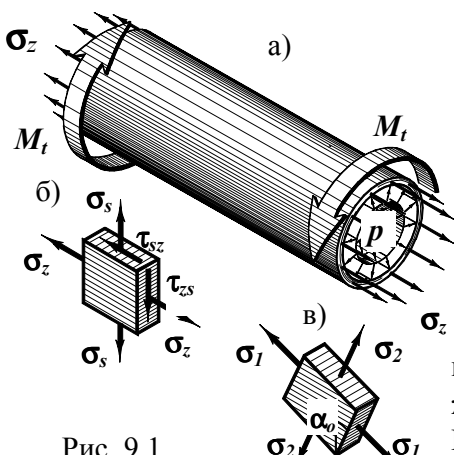


Рис. 9.1  
 $p$  соответствуют конкретные  $\sigma_z$ ,  $\sigma_s$  и  $\tau_{zs}$ ;  $\alpha_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис. 9.1 в).

Подбирая соотношение между  $N$ ,  $M_t$  и  $p$ , можно задать любое соотношение между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Пропорциональным увеличением сил осуществляют нагружение образца (такое нагружение называют *простым*).

Вместе с ростом напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  растут и деформации  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  ( $\epsilon_3$  – удлинение в радиальном направлении). Диаграмма деформирования представляет собой кривую в пятимерном пространстве. Изобразить такую кривую невозможно, поэтому строят изолинии характеристик прочности (рис. 9.2). Они ограничивают области, соответствующие различным состояниям материала.

Задав некоторое соотношение между напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и увеличивая их (нагружение по лучу  $Oc_1$ ), можно обнаружить предел пропорциональности (ему соответствует точка  $a_1$ ), предел текучести ( $b_1$ ) и предел прочности ( $c_1$ ). Повторив испытание при другом соотношении напряжений (например,  $Oc_2$ ), можно найти новые значения названных характеристик (точки  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ). Так можно установить границы области упругих деформаций (линия, идущая по точкам  $a$ ), текучести (действительной или условной; на ней расположены точки  $b$ ) и прочности (линия с точками  $c$ ).

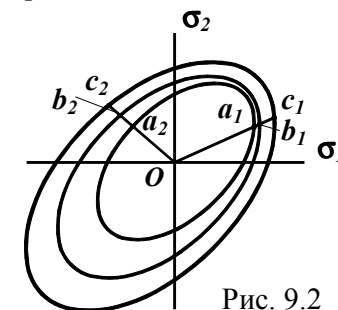


Рис. 9.2

Как следует из рис. 9.2, характеристики прочности при сложном напряженном состоянии изображаются линиями. Уравнения их можно записать в форме  $f_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ ,  $f_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ ,  $f_3(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ . Вид функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  зависит от материала и ряда других факторов.

При сложных траекториях нагружения проявляются упругая разгрузка, наклеп и эффект Баушингера. Таким образом, обсуждаемые границы в процессе изменения напряжений перемещаются, меняя очертание. Описание этих явлений – достаточно сложная задача, требующая специального оборудования и образцов, привлечения физических представлений о строении и поведении материалов. Задача эта является предметом специальных наук, изучающих свойства материалов, в частности, теорий упругости, пластичности и ползучести.

## 9.2. Некоторые физико-механические соотношения в линейно упругом изотропном теле

Прежде чем приступить к решению задачи прочности, установим необходимые зависимости между характеристиками напряженно-деформированного состояния в твердом теле. Ограничимся вначале упругими изотропными материалами, в которых напряжения и деформации пропорциональны друг другу и механические свойства во всех направлениях одинаковы.

### 9.2.1. Обобщенный закон Гука

Закон Гука (5.4) и соотношения между деформациями (5.5) справедливы при одноосном напряженном состоянии. При объемном напряженном состоянии связи деформаций с напряжениями более сложные.

В изотропном теле нормальные напряжения вызывают линейные деформации и не влияют на сдвиговые, касательные же связаны только со сдвигами. Поэтому закон Гука при чистом сдвиге (6.1) соблюдается и при объемном напряженном состоянии. Необходимо дополнить его зависимостями удлинений от нормальных напряжений.

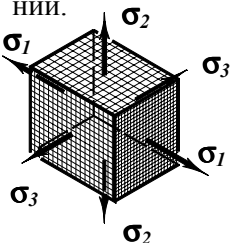


Рис. 9.3

Рассмотрим элементарный параллелепипед в трехосном напряженном состоянии (рис. 9.3). Относительные удлинения ребер запишем в виде  $\epsilon_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_{21} + \epsilon_{22} + \epsilon_{23}$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_{31} + \epsilon_{32} + \epsilon_{33}$ . (а) Здесь (рис. 9.4) первый индекс показывает направление деформации, второй – номер напряжения, вызвавшего это удлинение. Так,  $\epsilon_1$  – удлинение в направлении  $\sigma_1$ ,  $\epsilon_2$  – в направлении  $\sigma_2$ ,

$\epsilon_3$  – в направлении  $\sigma_3$ ;  $\epsilon_{11} = \epsilon_1(\sigma_1)$ ,  $\epsilon_{12} = \epsilon_1(\sigma_2)$ ,  $\epsilon_{13} = \epsilon_1(\sigma_3)$ ,  $\epsilon_{21} = \epsilon_2(\sigma_1)$  ...

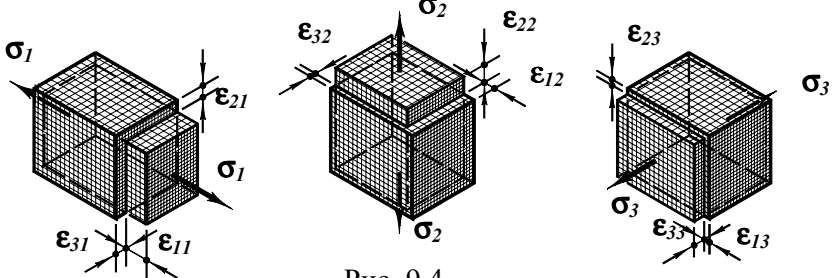


Рис. 9.4

Согласно закону Гука (5.4) при одноосных растяжениях продольные удлинения  $\epsilon_{11} = \sigma_1/E$ ,  $\epsilon_{22} = \sigma_2/E$ ,  $\epsilon_{33} = \sigma_3/E$ . В соответствии с соотношением (5.5) поперечные деформации  $\epsilon_{21} = \epsilon_{31} = -\nu\epsilon_{11} = -\nu\sigma_1/E$ . Аналогично,  $\epsilon_{12} = \epsilon_{32} = -\nu\sigma_2/E$ ,  $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = -\nu\sigma_3/E$ . Подставив эти выражения в равенства (а), получаем закон Гука, обобщенный на трехмерное напряженное состояние. Деформации в направлении главных напряжений связаны с последними так:

$$\epsilon_1 = (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))/E, \epsilon_2 = (\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1))/E, \epsilon_3 = (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))/E. \quad (9.1)$$

Для изотропного тела обобщенный закон Гука (9.1) справедлив и при наличии касательных напряжений на гранях параллелепипеда. В декартовых координатах он имеет вид

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))/E, \epsilon_y = (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))/E, \epsilon_z = (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))/E. \quad (9.2)$$

При плоском напряженном состоянии (например, в плоскости  $xy$ , когда  $\sigma_z = 0$ ) равенства (9.2) вырождаются в соотношения

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \epsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E. \quad (9.3)$$

Во всех разновидностях закон Гука имеет силу до тех пор, пока в материале не появятся пластические деформации.

### 9.2.2. Относительная объемная деформация

В результате деформирования вместе с линейными размерами изменяется и объем. Установим зависимость относительного изменения объема элементарного параллелепипеда от величины напряжений, действующих на гранях (рис. 9.5).

Объем до деформации  $V = dxdydz$ .

Абсолютные удлинения ребер:

$$\Delta dx = \epsilon_x dx, \Delta dy = \epsilon_y dy, \Delta dz = \epsilon_z dz.$$

Объем после деформации

$$V_1 = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)dxdydz.$$

Относительное изменение объема

$$\epsilon_V = (V_1 - V)/V = ((1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)dxdydz - dxdydz)/(dxdydz) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_z\epsilon_x + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z.$$

Деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  малы, можно пренебречь их произведениями по сравнению с самими деформациями и считать  $\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ . Подставив сюда закон Гука (9.2), получаем

$$\epsilon_V = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/E. \quad (9.4)$$

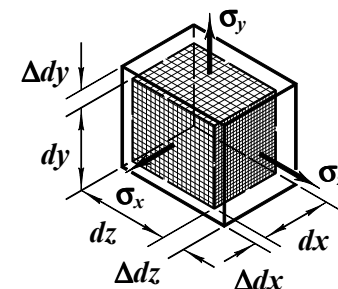


Рис. 9.5



Из полученного выражения видно, что *изменение объема пропорционально сумме напряжений*. В частном случае, когда сумма напряжений  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$ , длины ребер изменятся (изменится форма параллелепипеда, определяемая отношением его размеров), но объем останется прежним.

### 9.2.3. Связь между упругими константами материала

В зависимостях деформаций от напряжений (5.4), (5.5), (6.1), а также (9.1)...(9.4) фигурируют три упругих константы материала – модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль сдвига  $G$ . Естественно возникает вопрос: каково необходимое и достаточное число физико-механических констант, определяющих деформационные свойства материала. Выясним это на примере чистого сдвига.

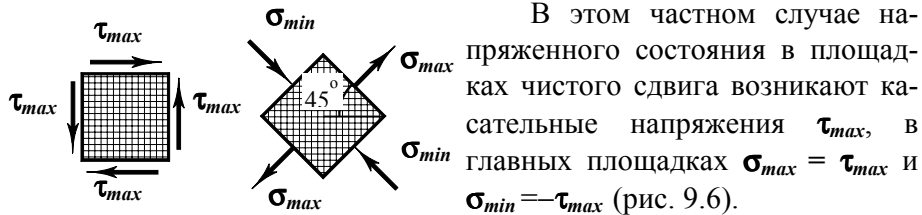


Рис. 9.6

В этом частном случае напряженного состояния в площадках чистого сдвига возникают касательные напряжения  $\tau_{max}$ , в главных площадках  $\sigma_{max} = \tau_{max}$  и  $\sigma_{min} = -\tau_{max}$  (рис. 9.6). При деформировании геометрические фигуры, нанесенные на образец, изменяют свои очертания. Изменения очертаний зависят от ориентации фигур. Так (рис. 9.7), квадрат  $abcd$  со стороной  $h$ , обозначающий площадки чистого сдвига, станет ромбом  $a_1b_1cd$ , а  $klmn$ , имеющий сторону  $s$  и проведенный по главным площадкам, – прямоугольником  $k_1l_1m_1n$ .

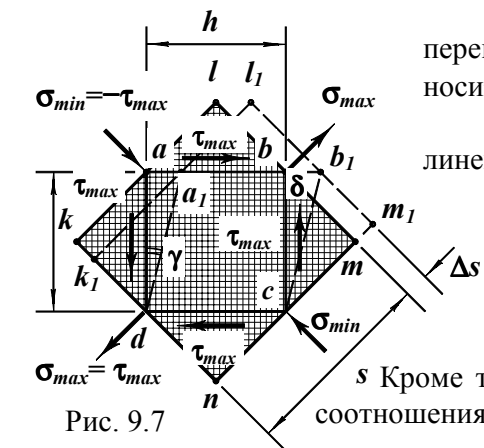


Рис. 9.7

Обозначим буквой  $\delta$  сдвиговое перемещение  $aa_1 = bb_1 = ll_1$ . Тогда относительный сдвиг  $\gamma = \delta/h$ . (а)

Наибольшее относительное удлинение  $\epsilon_{max} = \Delta s/s$ . (б)

Поскольку тело непрерывно, точки, общие для квадратов до деформации, остались общими и после нее:

$$\Delta s = \delta \cdot \cos 45^\circ.$$

Кроме того,  $h = s \cdot \cos 45^\circ$ . Учитывая эти соотношения, из равенств (а) и (б) имеем

$$\epsilon_{max}/\gamma = \Delta s \cdot h / (\delta \cdot s) = \delta \cdot \cos 45^\circ \cdot h / (\delta \cdot h / \cos 45^\circ) = 0,5.$$

Таким образом, из условия неразрывности деформаций следует

$$\epsilon_{max} = \gamma/2. \quad (в)$$

По закону Гука (6.1) и (9.3)

$$\gamma = \tau_{max}/G; \quad \epsilon_{max} = (\sigma_{max} - \nu \sigma_{min})/E. \quad (г)$$

Из условий равновесия (4.2)  $\sigma_{max} = \tau_{max}$ ,  $\sigma_{min} = -\tau_{max}$ . Подставив  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  в равенство (г) и используя соотношение (в), получаем

$$E = 2(1+\nu)G. \quad (9.5)$$

Три константы связаны условием (9.5). Следовательно, независимыми из них являются лишь две, третья выражается через них. Таким образом, из условий равновесия, неразрывности деформаций и закона Гука вытекает, что для описания деформационных свойств линейно упругого тела необходимо и достаточно двух физико-механических констант. Ими могут быть любые, фигурирующие в равенстве (9.5) или какие-либо их комбинации.

### 9.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации

Выведем формулу потенциальной энергии деформации для общего случая трехосного напряженного состояния (рис. 9.8).

Потенциальную энергию деформации  $U$  найдем как сумму работ  $W$  сил, соответствующих напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , на удлинениях  $\Delta ds_1$ ,  $\Delta ds_2$  и  $\Delta ds_3$ .

Для простоты рассуждений будем считать, что все напряжения растут пропорционально от нуля до конечных значений. Тогда в соответствии с равенством (5.23)

$$U = \sigma_1 ds_2 ds_3 \cdot \Delta ds_1 / 2 + \sigma_2 ds_3 ds_1 \cdot \Delta ds_2 / 2 + \sigma_3 ds_1 ds_2 \cdot \Delta ds_3 / 2.$$

Удельная энергия деформации

$$u = U/V = U/(ds_1 \Delta ds_2 ds_3) = (\sigma_1 \Delta ds_1 / ds_1 + \sigma_2 \Delta ds_2 / ds_2 + \sigma_3 \Delta ds_3 / ds_3) / 2.$$

А так как  $\Delta ds_1 / ds_1 = \epsilon_1$ ,  $\Delta ds_2 / ds_2 = \epsilon_2$ ,  $\Delta ds_3 / ds_3 = \epsilon_3$ , в итоге имеем

$$u = (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) / 2. \quad (9.6)$$

Формула (9.6), строго говоря, справедлива для линейно упругих материалов. Тем не менее формулой можно пользоваться также для тех упругопластических тел, у которых справедлив закон упругой разгрузки при условии, что  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  – упругие части деформаций, связанные с напряжениями обобщенным законом Гука.

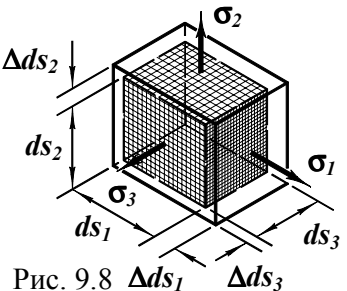


Рис. 9.8

### 9.2.5. Удельная потенциальная энергия изменения формы

В процессе деформирования изменяется не только объем элементарного параллелепипеда, но и его форма. Найдем потенциальную энергию, связанную со второй частью деформации.

Представим напряжения, действующие на гранях, в виде сумм (рис. 9.9)  $\sigma_1 = \sigma' + \sigma''_1, \sigma_2 = \sigma' + \sigma''_2, \sigma_3 = \sigma' + \sigma''_3$ . (а)

При равномерном растяжении с напряжениями  $\sigma'$ , изменяется лишь объем параллелепипеда, форма же (отношение длин ребер) остается неизменной. Подберем напряжения  $\sigma''$ , так, чтобы при них изменялась лишь форма, а объем оставался постоянным. Для этого по формуле (9.4) должно выполняться требование  $\sigma''_1 + \sigma''_2 + \sigma''_3 = 0$ . (б)

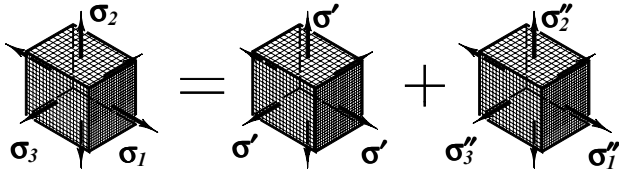


Рис. 9.9

Из уравнений (а) и (б) находим:  $\sigma' = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ;

$$\sigma''_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)/3, \sigma''_2 = (-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3)/3, \sigma''_3 = (-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3)/3. (в)$$

В соответствии с формулой (9.6) удельная потенциальная энергия изменения формы  $u_f = (\sigma''_1 \epsilon_1 + \sigma''_2 \epsilon_2 + \sigma''_3 \epsilon_3)/2$ . Подставляя сюда напряжения (в) и деформации (9.1), приходим к равенству

$$u_f = (1+\nu)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/(6E). (9.7)$$

## 9.3. Теории предельных напряженных состояний

### 9.3.1. Постановка и план решения задачи

Инженерные расчеты не ограничиваются определением напряжений и деформаций. Они, как правило, заканчиваются проверкой условий прочности. На этом этапе расчета задача ставится так. В некоторой точке конструкции возникают главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  (рис. 9.10 а). Необходимо оценить, насколько опасно это напряженное состояние материала.

Оценка опасности заданного напряженного состояния производится сравнением его с предельным состоянием. Количественной мерой безопасности напряженного состояния является *коэффициент запаса*. Для его определения нужно изготовить образец из данного

материала и нагружать его до предельного состояния так, чтобы в течение всего процесса отношение напряжений  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$  оставалось постоянным. Определив таким образом предельные значения главных напряжений  $\sigma_{1l}, \sigma_{2l}$  и  $\sigma_{3l}$ , можно вычислить коэффициент запаса<sup>1</sup>  $n_s = \sigma_{1l}/\sigma_1 = \sigma_{2l}/\sigma_2 = \sigma_{3l}/\sigma_3$ .

Однако такой путь практически невозможен. Нельзя перебрать все мыслимые соотношения главных напряжений – объем испытаний становится неограниченным. Кроме того, не всякое напряженное состояние может быть воспроизведено на испытательных машинах. Поэтому *оценку прочности материала при сложном напряженном состоянии производят теоретически*.

При теоретической оценке центральным является вопрос о критерии возникновения предельного состояния. Если такой критерий установлен, можно сравнивать опасность различных напряженных состояний. Можно считать, что два разных по соотношениям напряжений состояния равноопасны, если значения некоторых характеристик, принятых в качестве критерия, у них одинаковы. Исходя из этого, план решения обсуждаемой задачи выглядит так.

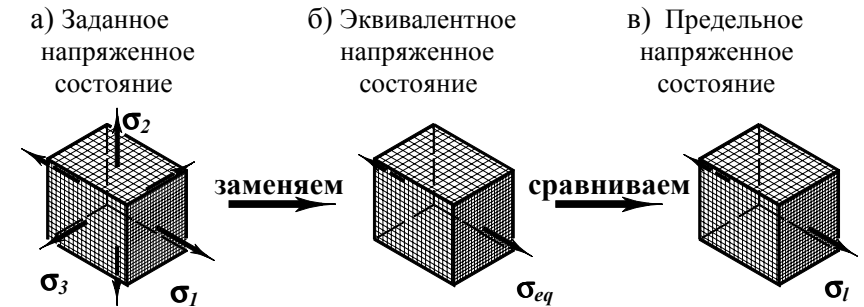


Рис. 9.10

Пусть в качестве критерия наступления предельного состояния принята некоторая характеристика. Обозначим ее буквой<sup>2</sup>  $C$ . Тогда по известным напряжениям  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  можно найти значение критерия для заданного напряженного состояния –  $C_g = C_g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

Представим теперь, что образец из того же материала находится в линейном напряженном состоянии (рис. 9.10 б). Для него также

<sup>1</sup> Индекс от англ. *safety* – безопасность.

<sup>2</sup> Обозн. от англ. *criterion* – критерий.

можно найти значение критерия<sup>1</sup>  $C_{eq} = C_{eq}(\sigma_{eq})$ . Если подобрать величину напряжения  $\sigma_{eq}$  так, чтобы критерии  $C_g = C_{eq}$ , то два напряженных состояния будут равноопасными. При равенстве критериев прочности линейное напряженное состояние эквивалентно заданному объемному. Объемное напряженное состояние можно заменить эквивалентным ему линейным и оценивать прочность последнего.

Линейное напряженное состояние хорошо изучено. Для него имеются физико-механические характеристики, соответствующие предельному состоянию материала (рис. 9.10 в).

Вообще говоря, в качестве эквивалентного может быть принято напряженное состояние любого вида. Однако наиболее удобным является одноосное растяжение, сравнительно просто реализуемое в лабораторных условиях, не требующее сложных образцов и оборудования. Поэтому в качестве эквивалентного принимают главное напряжение при одноосном растяжении.

Ввиду сложности и многообразия физических явлений, происходящих при деформировании, до настоящего времени не удалось построить такую теорию, которая была бы пригодна для всех материалов. В расчетной практике используются разные теории. Выбор критерия прочности и соответствующей теории зависит от материала, вида напряженного состояния и ряда других факторов.

Ниже изложены основы теорий, используемых при расчетах элементов строительных конструкций.

### 9.3.2. Теории прочности хрупких материалов

#### 9.3.2.1. Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)

В этой теории критерием прочности является наибольшее нормальное напряжение<sup>2</sup>.

Согласно изложенной выше позиции два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния, если наибольшие нормальные напряжения у них одинаковы.

<sup>1</sup> Индекс от англ. *equivalent* – эквивалент.

<sup>2</sup> Теория предложена в XVII в. Галилеем. В то время распространенным строительным материалом был естественный камень – типично хрупкий материал.

У хрупких материалов расчетные сопротивления на растяжение и на сжатие, как правило, различны, поэтому выбор “наибольшего” напряжения зависит от вида напряженного состояния и величин главных напряжений.

При трехосном растяжении ( $\sigma_3 > 0$ ) наибольшим является напряжение  $\sigma_1$ . Условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 \leq R_t. \quad (9.8)$$

В случае трехосного сжатия ( $\sigma_1 < 0$ ) наибольшим по величине является напряжение  $\sigma_3$ . Условие прочности –

$$|\sigma_3| \leq R_c. \quad (9.9)$$

При смешанном напряженном состоянии ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ ) следует проверять оба условия – (9.8) и (9.9). Ясно, что определяющим будет то напряжение, которое ближе к соответствующему расчетному сопротивлению.

Первая теория прочности плохо согласуется с результатами экспериментов при объемных напряженных состояниях. В настоящее время она представляет, главным образом, исторический интерес. Но, благодаря простоте расчетных формул, ее иногда используют для весьма хрупких материалов при напряженных состояниях, близких к линейным.

#### 9.3.2.2. Вторая теория прочности

##### (теория наибольших относительных удлинений)

Во второй теории критерием прочности служит наибольшее относительное удлинение<sup>1</sup>.

Согласно этой теории два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния, если наибольшие относительные удлинения у них одинаковы.

Для заданного трехмерного напряженного состояния критерий прочности  $C_g = \epsilon_{max} = \epsilon_1$ . По обобщенному закону Гука (9.1)  $C_g = \epsilon_1 = (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))/E$ .

В эквивалентном напряженном состоянии  $C_{eq} = \epsilon_{max} = \sigma_{eq}/E$ .

<sup>1</sup> Предложение высказано известным физиком Мариоттом в 1682 г., по-видимому, полагавшим, что причиной разрушения является отдаление микрочастиц друг от друга на некоторую величину, превышающую критическую.

Приравнявая критерии прочности, находим

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (9.10)$$

Условие прочности по второй теории прочности принимает вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R_t. \quad (9.11)$$

Как видно из формулы (9.10), теория наибольших относительных удлинений учитывает все главные напряжения. Более того, она в какой-то мере отражает свойства материала, так как содержит коэффициент Пуассона. Эти обстоятельства следует отнести к достоинствам теории. Теория наибольших относительных удлинений способна объяснить образование продольных трещин при сжатии, что иногда наблюдается в хрупких материалах (см. рис. 5.7).

В то же время обсуждаемая теория обладает существенными недостатками. В тех случаях, когда материал испытывает напряженное состояние, близкое к всестороннему сжатию,  $\epsilon_{max}$  отрицательно и формулу (9.10) применять нельзя. Это противоречит самой идее теории.

Следует также отметить, что теория наибольших относительных удлинений, строго говоря, является не теорией *прочности*, а теорией наступления предельного упругого состояния, ибо при выводе формулы эквивалентного напряжения использован закон Гука. Однако у хрупких материалов деформации в момент разрушения малы, и можно считать, что закон Гука выполняется во всем диапазоне несущей способности. Поэтому высказанное замечание имеет скорее принципиальное, а не практическое значение.

Вторая теория прочности имеет ограниченную область применения и обычно используется вместе с первой теорией, как дополнительный способ прогнозирования состояния хрупкого материала.

### 9.3.3. Гипотезы пластичности

В качестве предельного состояния пластичного материала принимают такое, при котором появляются остаточные деформации. Предельным напряжением служит либо действительный, либо условный предел текучести. Поэтому излагаемые ниже теории следует рассматривать как условия появления пластических деформаций, хотя термин “прочность” в них будет использован (в отмеченное выше смысле).

### 9.3.3.1. Третья теория (теория наибольших касательных напряжений)

В этой теории *критерием прочности является наибольшее касательное напряжение*<sup>1</sup>.

Основанием критерия послужили линии скольжения в момент текучести растягиваемого образца из мягкой стали (рис. 9.11). Линии наклонены под 45° к оси образца. Известно, что в таких площадках возникают наибольшие касательные напряжения.

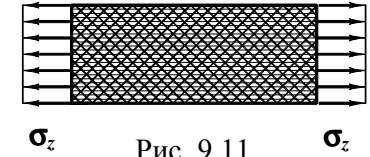


Рис. 9.11

Итак, по третьей теории *два элемента из одинакового материала равнопрочны, если максимальные касательные напряжения у них одинаковы*<sup>1</sup>.

Согласно формуле (4.7) критерий прочности в заданном напряженном состоянии  $C_g = \tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ . Учитывая, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , имеем  $C_g = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ .

В эквивалентном состоянии (одноосном растяжении)  $C_{eq} = \sigma_{eq}/2$ .

Из равенства критериев следует

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (9.12)$$

По полученной формуле видно, что эквивалентное напряжение не зависит от промежуточного по величине напряжения  $\sigma_2$ . Это недостаток теории, ибо опытная проверка показала, что влияние  $\sigma_2$  вносит коррективы до 15 %.

При двухосном растяжении и смешанном напряженном состоянии она неплохо согласуется с экспериментальными результатами для пластичных материалов. Поэтому в настоящее время теорию наибольших касательных напряжений часто используют в инженерных расчетах, благодаря простоте формулы эквивалентного напряжения.

Формула (9.12) связывает эквивалентное и главные напряжения. Целесообразно записать ее частный вид, учитывающий напряженное состояние, характерное для стержневого элемента.

<sup>1</sup> Предложена в 1773 г. известным физиком Кулоном.

Наиболее общим является напряженное состояние при поперечном изгибе. Одноосное растяжение (сжатие) и чистый сдвиг – частные его виды. Фигурирующие в формуле (9.12) главные напряжения в случае поперечного изгиба определяются равенствами (7.7):

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{max,min} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2})/2.$$

Подставив их в формулу (9.12), получаем

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}. \quad (9.13)$$

Второй индекс у касательного напряжения намеренно опущен, чтобы распространить формулу на  $\tau_z$  любого направления.

Условие прочности по третьей теории имеет вид

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \leq R. \quad (9.14)$$

### 9.3.3.2. Четвертая теория

(теория удельной потенциальной энергии изменения формы)

Нередко возникающая необходимость учета влияния всех главных напряжений на условие возникновения пластических деформаций породила предложение использовать в ранге критерия удельную потенциальную энергию изменения формы.

В четвертой теории принято, что два элемента из одинакового материала равнопрочны независимо от вида напряженного состояния при равных удельных потенциальных энергиях изменения формы.

Критерий прочности в заданном напряженном состоянии – (9.7)

$$C_g = u_f = (1+\nu)((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/(6E).$$

В эквивалентном состоянии  $C_{eq} = u_f = (1+\nu)2\sigma_{eq}^2/(6E)$ . Из равенства критериев

$$\sigma_{eq} = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2}. \quad (9.15)$$

Условие прочности в этой теории записывается так:

$$\sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/2} \leq R. \quad (9.16)$$

Четвертая теория свободна от недостатка, присущего третьей теории. В формуле (9.15) равноправно присутствуют все главные напряжения. Области экспериментального подтверждения третьей и четвертой теорий близки. Однако последняя из них лучше согласуется с экспериментом при промежуточном напряжении  $\sigma_2$ , близком к  $\sigma_1$  или  $\sigma_3$ .

Формула (9.15) и условие (9.16) нашли широкое применение при расчетах стержневых элементов конструкций. Учитывая, что в стержне  $\sigma_2 = 0$ , а  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  равны значениям (7.7), получаем частные формулу и условие прочности

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}. \quad (9.17)$$

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq R. \quad (9.18)$$

Третью и четвертую теории рекомендуют для пластичных материалов с равными пределами текучести при растяжении и сжатии.

### 9.3.4. Теория прочности О.Мора

Для оценки прочности материала, с одной стороны, обладающего пластическими свойствами, но, с другой, имеющего разные характеристики прочности при растяжении и сжатии, О.Мором<sup>1</sup> была предложена теория, основанная на экспериментальном определении коэффициента запаса.

Изложение теории О.Мора связано с графическим отображением напряженного состояния, которое здесь не дано. Поэтому ограничимся описанием приближенного варианта теории.

По этому варианту теории эквивалентное напряжение можно представить линейной функцией наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений:

$$\sigma_{eq} = a\sigma_1 + b\sigma_3, \quad (a)$$

в которой коэффициенты  $a$  и  $b$  можно найти из испытаний на одноосные растяжение и сжатие.

При растяжении (рис. 9.12 а) напряженное состояние элементарного параллелепипеда характерно тем, что  $\sigma_1 = N/A$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .

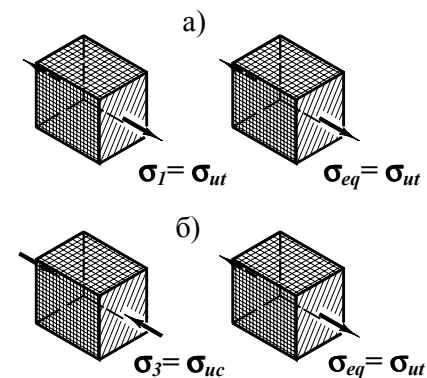


Рис. 9.12

<sup>1</sup> Отто Мор (1835–1918) – известный немецкий ученый в области сопротивления материалов и строительной механики. По образованию инженер-строитель занимался строительством железных дорог, преподавал инженерную механику в Штутгартском политехникуме, вел большую научную работу.

В тот момент, когда напряжение достигнет предела прочности  $\sigma_1 = \sigma_{ut}$ , эквивалентное напряжение также следует принять равным  $\sigma_{eq} = \sigma_{ut}$ . Подставив напряжения, соответствующие рассматриваемому моменту, в равенство (а), имеем  $\sigma_{ut} = a\sigma_{ut} + b \cdot 0$ , откуда  $a = 1$ .

При сжатии (рис. 9.12 б)  $\sigma_3 = N/A$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . Когда напряжение достигнет предела прочности на сжатие  $\sigma_3 = -\sigma_{uc}$ , эквивалентное напряжение в силу того, что оно растягивающее, следует принять равным  $\sigma_{eq} = \sigma_{ut}$ . Подставив напряжения, соответствующие этому состоянию, в равенство (а), устанавливаем:  $\sigma_{ut} = a \cdot 0 - b\sigma_{uc}$ . Отсюда  $b = -\sigma_{ut}/\sigma_{uc}$ .

$$\text{Итак,} \quad \sigma_{eq} = \sigma_1 - (\sigma_{ut}/\sigma_{uc})\sigma_3. \quad (9.19)$$

Условие прочности по теории О.Мора –

$$\sigma_1 - (\sigma_{ut}/\sigma_{uc})\sigma_3 \leq R. \quad (9.20)$$

У хрупких материалов отношение  $\sigma_{ut}/\sigma_{uc}$  мало. Если пренебречь вторым слагаемым в формуле (9.19), теория О.Мора совпадает с первой теорией (в области растягивающих напряжений). При  $\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$ , что характерно для пластичных материалов, формулы (9.19) и (9.12) становятся одинаковыми – теория О.Мора совпадает с третьей теорией.

Теорию О.Мора рекомендуют применять для оценки прочности материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию. При этом в рассмотренном приближенном варианте она совершенно не применима для трехосных растяжений и трехосных сжатий. Теория дает удовлетворительные результаты при смешанных напряженных состояниях, когда  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ .

Изложенные теории дают возможность оценивать степень опасности плоского и объемного напряженных состояний материала. При этом в рамках одного расчета нередко используют несколько теорий. Так, прочность бетона при растяжении проверяют, как правило, по первой теории, при сжатии – по первой и второй; иногда применяют специальные теории, здесь не рассмотренные. Такой анализ расширяет представление о возможных вариантах поведения материала в рассматриваемых условиях.

Первую и вторую теории рекомендуют для хрупких материалов. Но в условиях всестороннего сжатия ни та, ни другая не подтверждаются экспериментами и не применимы.

Третья и четвертая теории в расчетах стержневых элементов конструкций дают практически одинаковые результаты. В пластинках, оболочках и массивных объектах их прогнозы отличаются до 15%. Четвертая теория лучше совпадает с экспериментом, но более сложна в реализации. Третья же проще в расчетах, но менее достоверна. Выбор критерия прочности, а вместе с ним и теории зависит от конкретных условий.

Теорию О.Мора рекомендуют для материалов, которые нельзя отнести ни к ярко выраженным хрупким, ни к безусловно пластичным. Среди строительных материалов перечень таких достаточно широк.

Не следует забывать, что деление материалов на хрупкие и пластичные весьма относительно. Один и тот же материал в разных условиях может проявлять разные свойства: в одних быть хрупким, в других пластичным. Важнейшими факторами, определяющими поведение материала, являются

- температура,
- скорость нагружения,
- длительность действия нагрузки,
- вид напряженного состояния и др.

Влияние этих факторов следует принимать во внимание, теоретически прогнозируя поведение материалов при сложных напряженных состояниях.

## 10. Сложное сопротивление

Термин “сложное сопротивление” в известной степени условен. В учебной и методической литературе по сопротивлению материалов встречаются разные толкования этого термина. Достаточно сказать, что рассмотренный выше поперечный изгиб во многих случаях оказывается сложнее некоторых видов нагружения, отнесенных к сложному сопротивлению, как по методам определения напряжений, так и по оценке опасности напряженного состояния материала.

*Сложным условимся называть сопротивление такому виду нагружения, при котором возникает несколько внутренних силовых факторов, одновременно учитываемых в расчете на прочность.*

С этих позиций нетрудно объяснить, почему прямой поперечный изгиб отнесен к так называемому “простому” сопротивлению. Хотя в сечении балки при этом возникают два внутренних силовых фактора (изгибающий момент и поперечная сила), в условиях прочности фигурирует один из них: момент в расчете по нормальным напряжениям, поперечная сила – по касательным.

*Для определения напряжений и деформаций при сложном сопротивлении, как правило, пользуются принципом независимости действия сил (иногда его называют принципом наложения или принципом суперпозиции).*

Названный принцип можно сформулировать так. *Результат сложного воздействия равен сумме не зависящих друг от друга результатов простых воздействий, составляющих сложное.*

Из этой формулировки следует, что *напряжение в точке стержня при наличии нескольких внутренних силовых факторов равно сумме напряжений, соответствующих каждому силовому*

*фактору в отдельности.* Сумма может быть алгебраической или геометрической в зависимости от того, какие напряжения суммируются – нормальные или касательные.

### 10.1. Косой изгиб

*Косым изгибом называют такой вид нагружения, при котором плоскость действия изгибающего момента не перпендикулярна ни одной из главных центральных осей сечения балки.*

Если наряду с изгибающим моментом в сечении возникает и поперечная сила, изгиб называют косым поперечным, когда поперечной силы нет, – косым чистым.

#### 10.1.1. Напряжения в поперечном сечении

Для знакомства с методом определения нормальных напряжений в поперечном сечении при косом изгибе балки рассмотрим конкретную схему (рис. 10.1 а).

Сила  $F$  перпендикулярна продольной оси балки и наклонена к главной центральной оси  $x$  под углом  $\alpha$ . Естественно, плоскость действия изгибающего момента также наклонена к оси  $x$  под углом  $\alpha$  – балка испытывает косой изгиб.

Для упрощения дальнейших выкладок заменим силу  $F$  двумя:  $F_x$  и  $F_y$ :  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$ . Каждая из них вызывает прямой изгиб. Эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях балки показаны на рис. 10.1 б).

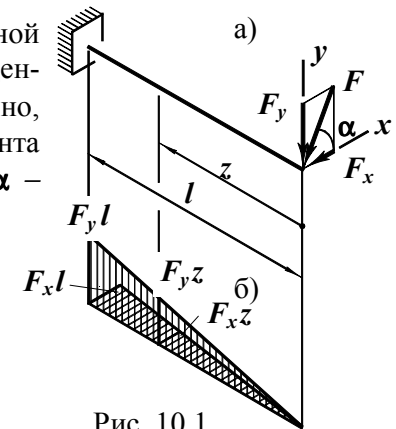


Рис. 10.1

Рассмотрим произвольное сечение балки. Оно вместе с изгибающими моментами, возникающими в нем, изображено на рис. 10.2.

Согласно принципу независимости действия сил нормальное напряжение  $\sigma_z$  в произвольной точке можно найти как сумму напряжений от изгиба в плоскости  $yz$  и в плоскости  $xz$ :

$$\sigma_z = \sigma_z(M_x) + \sigma_z(M_y).$$

Найдем каждое из них. По формуле (7.3) и аналогии имеем:

$$\sigma_z(M_x) = M_x y / J_x, \quad \sigma_z(M_y) = M_y x / J_y.$$

Таким образом,  $\sigma_z = M_x y / J_x + M_y x / J_y$ . (10.1)

Здесь:  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты;

$y$  и  $x$  – расстояния от главных центральных осей сечения до рассматриваемой точки;

$J_x$  и  $J_y$  – главные моменты инерции сечения балки.

Знаки перед каждым слагаемым выбираются в зависимости от знака

напряжения. Например, плюс, если напряжение растягивающее, минус, если сжимающее. При тех направлениях изгибающих моментов, которые показаны на рис. 10.2 а, в незаштрихованной четверти суммируются растягивающие напряжения; в четверти, заштрихованной дважды, напряжения также суммируются (рис. 10.2 б), но сжимающие. В четвертях, заштрихованных в одну сторону, напряжения от одного момента растягивающие, от другого сжимающие и потому вычитаются.

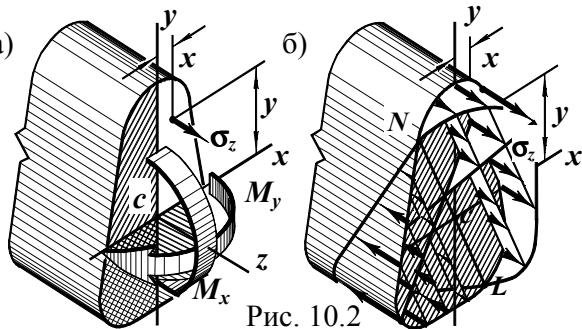


Рис. 10.2

Касательные напряжения в сечении балки также могут быть найдены по принципу независимости действия сил. Но суммировать напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  нужно геометрически.

Касательные напряжения в сечении балки также могут быть найдены по принципу независимости действия сил. Но суммировать напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  нужно геометрически.

**Пример 10.1.** Двутавровая балка опирается концами на шарнирные опоры (рис. 10.3 а). Посередине пролета на нее действует сила  $F$ , перпендикулярная продольной оси балки и наклоненная к горизонтальной главной плоскости под углом  $\alpha$ .

Построим эпюру нормальных напряжений в среднем сечении балки: от каждого изгибающего момента, а также суммарную.

Числовые значения исходных данных:  $F = 3 \text{ кН}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ; двутавр № 24 ( $W_x = 289 \text{ см}^3$ ,  $W_y = 34,5 \text{ см}^3$ ).

Разложим силу на две составляющие:  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$  (рис. 10.3 а). Эпюры изгибающих моментов от них показаны на рис. 10.3 б. У балки растянуты нижние и правые волокна (рис. 10.3 в).

Моменты в среднем сечении балки равны:

$$M_x = F_y l / 2 = (Fl/2) \sin \alpha, \quad M_y = F_x l / 2 = (Fl/2) \cos \alpha.$$

Наибольшие напряжения, вызванные изгибом в вертикальной плоскости,

$$\begin{aligned} \max \sigma_z(M_x) &= M_x / W_x = \\ &= Fl \sin \alpha / (2W_x) = \\ &= 3 \cdot 200 \sqrt{3} / (2 \cdot 2 \cdot 289) = \\ &= 0,9 \text{ кН/см}^2 \text{ (рис. 10.3 г)}. \end{aligned}$$

От изгиба в горизонтальной плоскости (рис. 10.3 д)

$$\begin{aligned} \max \sigma_z(M_y) &= M_y / W_y = \\ &= Fl \cos \alpha / (2W_y) = \\ &= 3 \cdot 200 / (2 \cdot 2 \cdot 34,5) = \\ &= 4,35 \text{ кН/см}^2 \text{ (рис. 10.3 д)}. \end{aligned}$$

Общую эпюру нормальных напряжений в сечении (рис. 10.3 е) получаем суммированием предыдущих эпюр с учетом направления напряжений.

Наибольшие напряжения в среднем сечении балки достигают  $5,25 \text{ кН/см}^2$ . В левой верхней точке они сжимающие, в правой нижней – растягивающие.

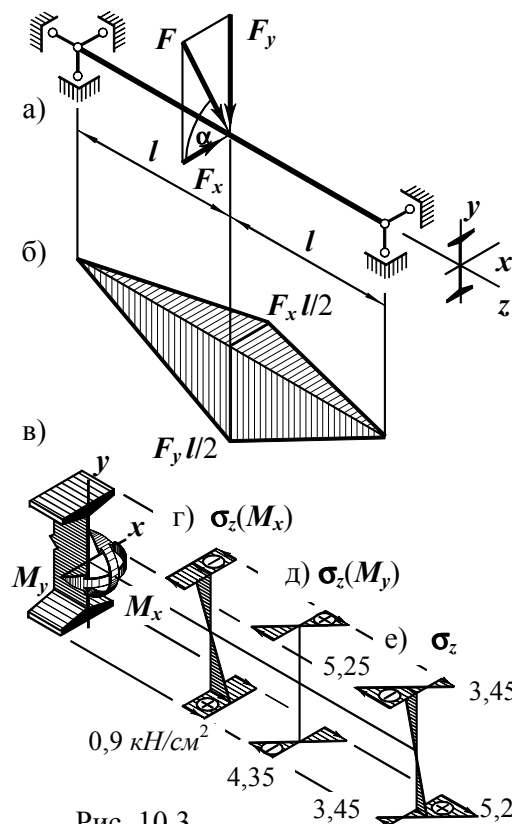


Рис. 10.3

### 10.1.2. Нейтральная линия при косом изгибе.

#### Наибольшие нормальные напряжения. Расчет на прочность

10.1.2.1. Вновь обратимся к схеме, изображенной на рис. 10.1. Найдем положение нейтральной линии ( $NL$ ) в произвольном сечении балки (рис. 10.4). Пусть  $x_0$  и  $y_0$  – координаты ее точек. Тогда нормальные напряжения  $\sigma_z = M_x y_0 / J_x + M_y x_0 / J_y = 0$  – *нейтральная линия при косом изгибе – прямая, проходящая через начало координат (центр тяжести)*. Из уравнения находим  $y_0 = -(J_x M_y / (J_y M_x)) x_0$ . Множитель при  $x_0$  – тангенс угла наклона нейтральной линии к оси  $x$ :  $\text{tg} \varphi = -(J_x M_y / (J_y M_x))$ . Но  $M_y / M_x = F_x z / (F_y z) = F \cos \alpha / (F \sin \alpha) = \text{ctg} \alpha$ . Итак,

$$\text{tg} \varphi = -(J_x / J_y) \text{ctg} \alpha. \quad (10.2)$$



Зная плоскость действия результирующего изгибающего момента  $M_b$  (угол  $\alpha$ ), по формуле (10.2) можно найти положение нейтральной линии (угол  $\varphi$ ).

Если  $J_x \neq J_y$ , то  $\operatorname{tg}\varphi \neq -\operatorname{ctg}\alpha$  – нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия результирующего момента. При  $J_x = J_y$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\alpha$  – нейтральная линия перпендикулярна плоскости изгиба.

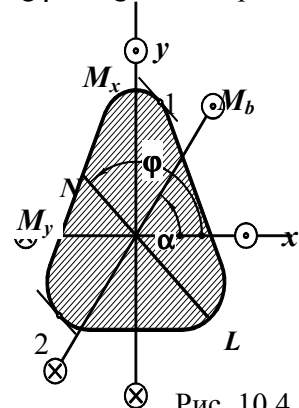


Рис. 10.4

10.1.2.2. Для оценки прочности материала балки нужно найти опасную точку. С этой целью проанализируем равенство (10.1). Для фиксированного сечения оно представляет собой уравнение плоскости, так как переменные  $\sigma_z$ ,  $x$  и  $y$  входят в него в первой степени. Эпюра  $\sigma_z$  представляет тело (рис. 10.2 б), ограниченное

- плоскостью поперечного сечения;
- плоскостью (10.1), пересекающейся с сечением по нейтральной линии;

– цилиндрической боковой поверхностью балки.

Чем дальше от нейтральной линии расположена точка, тем больше в ней напряжение  $\sigma_z$ . Наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_z$  возникает в самой удаленной от нейтральной линии точке. На рис. 10.4 отмечены точки 1 и 2. В первой возникает наибольшее растягивающее напряжение, во второй – наибольшее сжимающее.

**Пример 10.2.** В эллиптическом сечении балки возникают изгибающие моменты  $M_x = 1$  кНм и  $M_y = 0,4$  кНм (рис. 10.5). Размеры сечения:  $b = 8$  см,  $h = 16$  см. Найдём наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

Установим плоскость действия результирующего изгибающего момента  $M_b$ . Изобразив моменты векторами, видим, что

$$\operatorname{tg}\beta = M_y/M_x = 0,4; \quad \beta = 21^\circ 50'; \quad \alpha = \beta + 90^\circ = 111^\circ 50'.$$

По формуле (10.2) найдём положение нейтральной линии (NL). Моменты инерции эллипса:

$$J_x = \pi b h^3 / 64 = 3,14 \cdot 8 \cdot 16^3 / 64 = 1608 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \pi b^3 h / 64 = 3,14 \cdot 8^3 \cdot 16 / 64 = 402 \text{ см}^4.$$

Теперь  $\operatorname{tg}\varphi = -(J_x/J_y)\operatorname{ctg}\alpha = -1608\operatorname{ctg}111^\circ 50' / 402 = 1,6$ . Отсюда  $\varphi = 58^\circ$ .

Для поиска точек с наибольшими напряжениями запишем вначале уравнение эллипса:  $4x^2/b^2 + 4y^2/h^2 = 1$ . Разрешенное относительно  $y$  оно имеет вид  $y = \pm h\sqrt{1 - 4x^2/b^2}/2$ .

Тангенс угла между осью  $x$  и касательной к эллипсу и равен

$$y' = \pm 2hx / (b\sqrt{b^2 - 4x^2}).$$

Абсциссы точек, наиболее удаленных от нейтральной линии, найдем из равенства  $y' = \operatorname{tg}\varphi$ . Решив это уравнение, имеем

$$x = \pm b^2 \operatorname{tg}\varphi / (2\sqrt{h^2 + b^2 \operatorname{tg}^2\varphi}) =$$

$$= \pm 8^2 \cdot 1,6 / (2\sqrt{16^2 + 8^2 \cdot 1,6^2}) = \pm 2,5 \text{ см}.$$

Ординаты  $y = \pm h\sqrt{1 - 4x^2/b^2}/2 =$

$$= \pm 16\sqrt{1 - 4 \cdot 2,5^2 / 8^2} / 2 = \pm 6,25 \text{ см}.$$

Точки с наибольшими нормальными напряжениями – 1 и 2 во втором и четвертом квадрантах, где напряжения от моментов  $M_x$  и  $M_y$  одного знака.

Напряжения:

$$\max \sigma_z = M_x y_{1,2} / J_x + M_y x_{1,2} / J_y =$$

$$= 100 \cdot 6,25 / 1608 + 40 \cdot 2,5 / 402 = 0,636 \text{ кН/см}^2.$$

В точке 1 напряжение растягивающее, в 2 сжимающее.

Не всегда, однако, удастся аналитически определить координаты точек с наибольшими напряжениями. Если очертание контура сечения сложно, аналитический путь становится чрезмерно громоздким, а порой невозможным. В таких случаях можно использовать графические приемы.

Нередко проще вычислить напряжения в нескольких “подозрительных” точках. Сопоставляя напряжения в них, можно найти максимальное и установить, какая точка опасна.

Если в сечении имеются точки, наиболее удаленные одновременно от обеих главных центральных осей (прямоугольник, двутавр, швеллер и т.п.), одна из них и будет опасной. Формула напряжений (10.1) в таких точках принимает вид

$$\max \sigma_z = M_x / W_x + M_y / W_y. \quad (10.3)$$

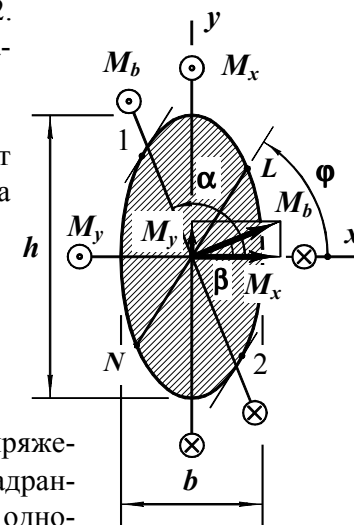


Рис. 10.5

10.1.2.3. Расчет на прочность при косом изгибе ведется обычно по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности (5.9) требует, чтобы наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения не превысили соответствующие расчетные сопротивления материала балки.

В тонкостенных балках не исключена необходимость проверки прочности материала по наибольшим касательным напряжениям (6.3) или (7.12).

**10.1.3. Перемещения при косом изгибе**

Перемещения при косом изгибе определяются также по принципу независимости действия сил. Проиллюстрируем методику определения прогибов в балках конкретной схемой.

**Пример 10.3.** Найдем уравнение изогнутой оси, величину и направление прогиба конца балки, показанной на рис. 10.6.

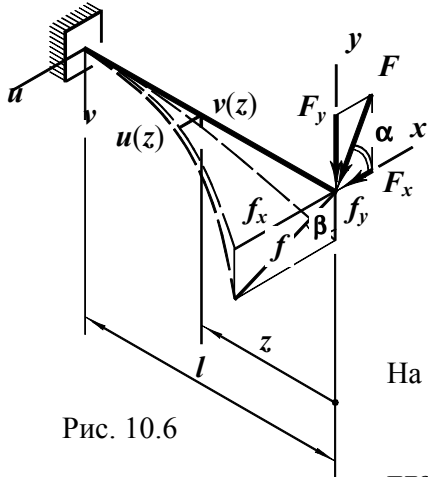


Рис. 10.6

Заменим силу  $F$  двумя:  $F_x = F \cos \alpha$  и  $F_y = F \sin \alpha$ , лежащими в главных плоскостях  $xz$  и  $yz$ . Каждая из них вызывает плоский прямой изгиб.

Подобная балка рассмотрена в примере 7.9. Используя его результат, запишем уравнение вертикальных перемещений точек балки

$$v(z) = F_y(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x).$$

На свободном конце  $f_y = v(0) = F_y l^3 / (3EJ_x)$ .

Аналогично в горизонтальной плоскости: уравнение прогибов

$$u(z) = F_x(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_y), \text{ на конце } f_x = u(0) = F_x l^3 / (3EJ_y).$$

Полное перемещение конца балки  $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ .

Направление полного перемещения конца определяется отношением  $f_y/f_x = \text{ctg} \beta = F_y l^3 3EJ_y / (3EJ_x F_x l^3) = (J_y/J_x) \cdot \text{tg} \alpha$ . Зафиксируем результат:  $\text{ctg} \beta = (J_y/J_x) \text{tg} \alpha$ . (10.4)

Из отношения  $v(z)/u(z)$  следует то же равенство. Это значит, что угол  $\beta$  не зависит от  $z$ . Изогнутая ось балки – плоская кривая.

Если моменты инерции сечения разные:  $J_y \neq J_x$ , то  $\beta \neq 90 + \alpha$ . Направление перемещения не совпадает с направлением силы  $F$ . Это обстоятельство и является причиной названия “косой изгиб”. При  $J_y = J_x$  угол  $\beta = 90 + \alpha$ , изгиб прямой.

Перемножим левые и правые части формул (10.2) и (10.4):  $\text{tg} \varphi \cdot \text{ctg} \beta = -(J_x/J_y) \text{ctg} \alpha (J_y/J_x) \text{tg} \alpha = -1$ . Из этого равенства следует, что при плоском косом изгибе перемещения перпендикулярны нейтральному слою.

В зависимости от вида внешней нагрузки, способа закрепления и материала балки, а также геометрических характеристик сечения изогнутая ось может быть и не плоской кривой. В таких случаях изгиб называют пространственным.

**10.2. Внецентренное сжатие. Растяжение или сжатие с изгибом**

**10.2.1. Внецентренное сжатие**

Внецентренное сжатие – это такой вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, параллельна оси стержня.

**10.2.1.1. Напряжения в поперечном сечении**

Рассмотрим действие силы  $F$ , приложенной в точке с координатами  $x_F$  и  $y_F$  (рис. 10.7 а). Оси  $x$  и  $y$  – главные центральные.

В стержнях большой жесткости искривление продольной оси незначительно. Им можно пренебречь. Тогда в сечениях стержня возникнут продольные силы и изгибающие моменты (рис. 10.7 б):  $N = F, M_x = Fy_F$  и  $M_y = Fx_F$ . (10.5)

По принципу наложения напряжение в произвольной точке  $a$  с координатами  $x$  и  $y$  равно сумме напряжений  $\sigma_z(N)$ ,  $\sigma_z(M_x)$  и  $\sigma_z(M_y)$  (рис. 10.7 в, г, д):

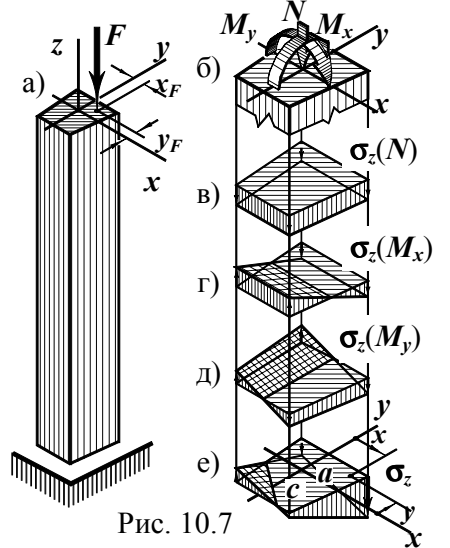


Рис. 10.7

$\sigma_z = \sigma_z(N) + \sigma_z(M_x) + \sigma_z(M_y)$  (рис. 10.7 е). Используя формулы напряжений (5.10) и (10.1), запишем

$$\sigma_z = N/A + M_x y/J_x + M_y x/J_y. \quad (10.6)$$

В виде (10.6) формула напряжений справедлива не только для внецентренно сжатого стержня, но и при других нагрузках, вызывающих в сечении продольную силу и изгибающие моменты.

Во внецентренно сжатом стержне внутренние силовые факторы определяются равенствами (10.5). Нормальные напряжения в нем будут равны

$$\sigma_z = F/A + F y_F y/J_x + F x_F x/J_y. \quad (10.7)$$

В правых частях формул (10.6) и (10.7) слагаемые суммируются, так как напряжения от всех действующих силовых факторов в первом квадранте сечения сжимающие.

### 10.2.1.2. Нейтральная линия при внецентренном сжатии.

#### Положение опасной точки. Расчет на прочность

Обозначим координаты точек нейтральной линии  $x_0$  и  $y_0$ . Подставим их в формулу (10.7) и приравняем напряжения нулю:

$$F/A + F y_F y_0/J_x + F x_F x_0/J_y = 0.$$

Преобразуем это равенство к виду

$$1 + y_F y_0/(J_x/A) + x_F x_0/(J_y/A) = 0.$$

Отношения, стоящие в знаменателях второго и третьего слагаемых, являются геометрическими характеристиками сечения. В сопротивлении материалов используется понятие *радиуса инерции* –

$$i_{x(y)} = \sqrt{J_{x(y)}/A}. \quad (10.8)$$

В этой формуле  $J_{x(y)}$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $x$  ( $y$ ). Используя обозначение (10.8), уравнение нейтральной линии можно записать в виде

$$1 + y_F y_0/i_x^2 + x_F x_0/i_y^2 = 0. \quad (a)$$

Отсюда видим, что *при внецентренном сжатии нейтральная линия – прямая, не проходящая через центр тяжести сечения.*

Обозначим  $a_x$  и  $a_y$  отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях  $x$  и  $y$  (рис. 10.8). Подставив в уравнение (a) вначале  $x_0 = 0$  и  $y_0 = a_y$ , а затем  $x_0 = a_x$  и  $y_0 = 0$ , находим:

$$a_x = -i_y^2/x_F, \quad a_y = -i_x^2/y_F. \quad (10.9)$$

Из анализа равенств (10.9) можно сделать некоторые выводы о зависимости положения нейтральной линии от места приложения силы:

- положение нейтральной линии  $nl$  не зависит от величины силы  $F$  (ее в формулах (10.9) нет);

- нейтральная линия всегда проходит через квадрант, противоположный тому, где приложена сила (об этом свидетельствуют знаки в равенствах (10.9));

- по мере удаления точки приложения силы  $F$  от центра тяжести (увеличения  $x_F$  и  $y_F$ ) нейтральная линия приближается к нему ( $a_x$  и  $a_y$  уменьшаются) и наоборот, если сила приближается к центру тяжести, нейтральная линия удаляется от него;

- в том случае, когда точка приложения силы лежит на одной из главных центральных осей, нейтральная линия перпендикулярна этой оси (например, при  $x_F \rightarrow 0$  отрезок  $a_x \rightarrow \infty$ );

- перемещение точки приложения силы по прямой вызывает поворот нейтральной линии вокруг некоторой неподвижной точки. Последнее утверждение не столь очевидно и требует доказательства.

Пусть линия действия силы  $F$  проходит через точку 1 (рис. 10.9). Нейтральная линия занимает некоторое положение  $n_1 l_1$ . Если через точку 2, –  $n_2 l_2$ . Напряжение в точке  $b$  в обоих случаях равно нулю. Любую силу, линия действия которой пересекает прямую 1–2 (например в точке 3), можно заменить двумя: одна с линией через точку 1, другая через 2. Напряжение в точке  $b$  при этом будет равным нулю. Нейтральная линия пройдет через нее. Движение вертикальной силы по прямой 1–2 вызовет поворот нейтральной линии вокруг точки  $b$ .

Формулы (10.6) и (10.7) – уравнения плоскости, наклоненной к поперечному сечению и пересекающейся с ним по нейтральной линии. Следовательно, *при внецентренном сжатии* (и подобных ему видах нагружения) *наибольшие нормальные напряжения возникают*

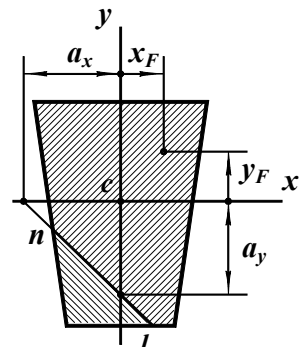


Рис. 10.8

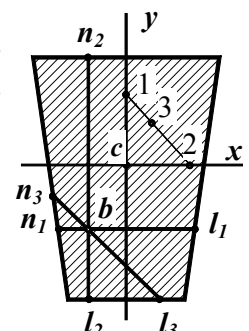


Рис. 10.9

в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. С одной стороны растягивающее, с другой – сжимающее.

Напряженное состояние при внецентренном сжатии – одноосное. Условие прочности (5.9) требует, чтобы напряжения в поперечном сечении не превышали соответствующего расчетного сопротивления.

**10.2.1.3. Ядро сечения**

Сжатые элементы строительных конструкций нередко выполняются из материалов, хорошо сопротивляющихся сжатию, но значительно хуже растяжению. Усилия на такие элементы желательно передавать в местах, исключая возможность появления растягивающих напряжений. Лучший вариант – центральное нагружение. Однако по конструктивным причинам не всегда удается передать нагрузку строго центрально. Тогда возникает вопрос о возможных эксцентриситетах нагружения сжимающей силой при условии отсутствия в сечении растягивающих напряжений.

Если линия действия силы проходит через центр тяжести, нейтральная линия находится в бесконечности. По мере роста эксцентриситета нейтральная линия приближается к сечению. Пока нейтральная линия вне сечения, напряжения в нем сжимающие.

*Область возможных эксцентриситетов сжимающей силы, при которых в сечении не возникает растягивающих напряжений, называется ядром сечения.*

Поскольку на положения нейтральной линии наложены ограничения – быть за пределами сечения, форма и размеры ядра определяются равенствами (10.9). Проиллюстрируем методику построения ядра сечения примерами.

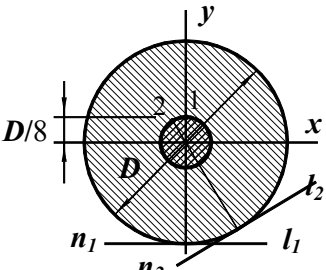


Рис. 10.10

**Пример 10.4.** Построим ядро круглого сечения (рис. 10.10).

Моменты инерции:  $J_x = J_y = \pi D^4/64$ .

Квадраты радиусов инерции:

$i_x^2 = i_y^2 = J_x/A = (\pi D^4/64)/(\pi D^2/4) = D^2/16$ .

Зададимся первым положением нейтральной линии –  $n_1l_1$ . У него  $a_x = \infty$ ,  $a_y = -D/2$ .

Из формул (10.9) находим  $x_F = -i_y^2/a_x = 0$ ,  $y_F = -i_x^2/a_y = -(D^2/16)/(-D/2) = D/8$ . Чтобы нейтральная линия заняла положение  $n_1l_1$ , линия действия силы должна проходить через точку 1.

Если задаться другим положением нейтральной линии, например  $n_2l_2$ , место приложения силы соответствует точке 2. Обобщая, приходим к выводу, что ядро сечения круга концентрический круг с диаметром в четыре раза меньшим диаметра сечения.

**Пример 10.5.** Построим ядро прямоугольного сечения (рис. 10.11).

Моменты инерции прямоугольника:

$J_x = bh^3/12$ ,  $J_y = hb^3/12$ .

Квадраты радиусов инерции

$i_x^2 = J_x/A = (bh^3/12)/(bh) = h^2/12$ ,

$i_y^2 = J_y/A = b^2/12$ .

Зададимся первым положением нейтральной линии –  $n_1l_1$ . При нем  $a_x = \infty$ ,  $a_y = h/2$ . Из формул (10.9) соответствующие координаты точки нагружения

$x_F = -i_y^2/a_x = 0$ ,

$y_F = -i_x^2/a_y = -(h^2/12)/(h/2) = -h/6$  (точка 1).

Аналогично для положения  $n_2l_2$  координаты  $x_F = 0$ ,  $y_F = h/6$  (точка 2).

Если задаться положением нейтральной линии  $n_3l_3$ , то  $a_x = b/2$ ,  $a_y = \infty$ . Соответствующая точка нагружения – 3 с координатами  $x_F = -i_y^2/a_x = -(b^2/12)/(b/2) = -b/6$ ,  $y_F = -i_x^2/a_y = 0$ . Так же находим координаты точки 4, соответствующей линии  $n_4l_4$ :  $x_F = b/6$ ,  $y_F = 0$ .

Переход нейтральной линии из положения  $n_1l_1$  в  $n_3l_3$ , допустимый условием однозначности напряжений в сечении, – поворот вокруг правого верхнего угла. Это произойдет при движении силы из точки 1 в точку 3 по прямой линии. Рассматривая остальные соседние положения нейтральной линии, приходим к выводу, что точки 3 и 2, 2 и 4, 4 и 1 также следует соединить прямыми. Таким образом, ядром сечения прямоугольника является ромб.

Используя приемы, проиллюстрированные примерами, можно построить ядро для сечения любой формы.

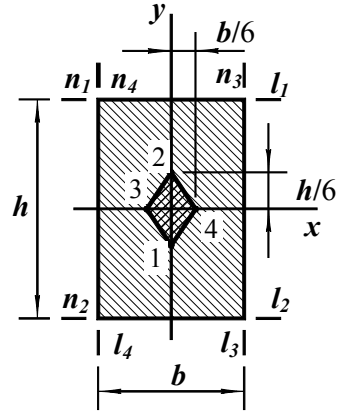


Рис. 10.11

рассмотренный геометрический объект сечения часто используется при анализе напряженности сечений каменных, бетонных и железобетонных конструкций и, как следствие, в методах и алгоритмах их расчетов.

### 10.2.2. Растяжение или сжатие с изгибом

Формула (10.6), вытекающая из принципа наложения, охватывает не только внецентренное сжатие, но и другие виды нагружения, такие например, как растяжение (сжатие) с поперечным изгибом балок. Касательные напряжения при поперечном изгибе балок массивного сечения, как правило, невелики, их можно игнорировать, и формула (10.6) дает возможность вычислить напряжение. Обратимся к примеру.

**Пример 10.6.** Консольная балка прямоугольного сечения нагружена, как показано на рис. 10.12 а.

Построим эпюры нормальных напряжений  $\sigma_z(N)$ ,  $\sigma_z(M_x)$ ,  $\sigma_z(M_y)$ , а также суммарную эпюру  $\sigma_z$ .

Числовые значения исходных данных:  $l = 1,8 \text{ м}$ ,  $b = 12 \text{ см}$ ,  $h = 20 \text{ см}$ ,  $F = 4 \text{ кН}$ .

Опасное сечение – 1. В нем:  
 $N = 8F = 8 \cdot 4 = 32 \text{ кН}$ ;  
 $M_x = Fl + 8Fh/2 = 4 \cdot 1,8 + 8 \cdot 4 \cdot 0,2/2 = 10,4 \text{ кНм}$ ;

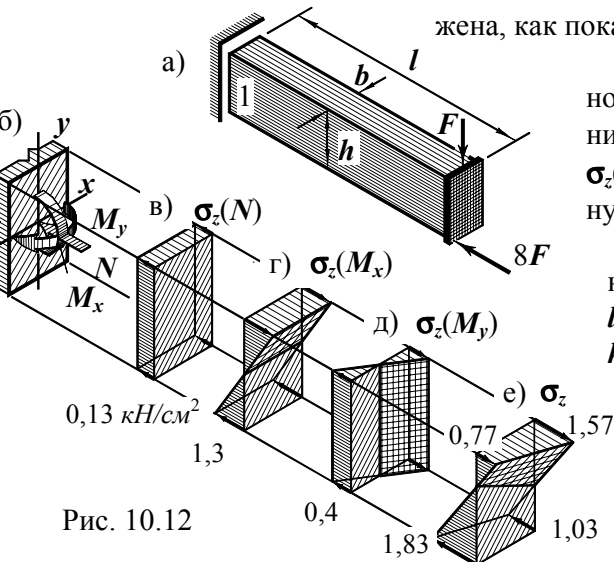


Рис. 10.12

$M_y = 8Fb/2 = 8 \cdot 4 \cdot 0,12/2 = 1,92 \text{ кНм}$ . Направления внутренних силовых факторов показаны на рис. 10.12 б.

Напряжения от продольной силы  $\sigma_z(N) = N/A = 32/(12 \cdot 20) = 0,13 \text{ кН/см}^2$ . Эпюра напряжений изображена на рис. 10.12 в.

Напряжения от изгиба в плоскости  $zy$  показаны на рис. 10.12 г. В верхних и нижних точках

$$\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x = 6M_x/(bh^2) = 6 \cdot 1040/(12 \cdot 20^2) = 1,3 \text{ кН/см}^2.$$

Аналогично определяются напряжения от изгиба в плоскости  $zx$  (рис. 10.12 д). В точках вертикальных краев

$$\max \sigma_y(M_y) = M_y/W_y = 6M_y/(hb^2) = 6 \cdot 192/(20 \cdot 12^2) = 0,4 \text{ кН/см}^2.$$

Эпюра нормальных напряжений в рассматриваемом сечении от заданной нагрузки представляет собой сумму трех предыдущих эпюр. Она изображена на рис. 10.12 е.

Таким образом, принцип независимости действия сил позволяет разделить задачу на три:

- осевое растяжение (сжатие);
- прямой изгиб в главной плоскости  $zy$ ;
- то же в плоскости  $zx$ .

При игнорировании касательных напряжений в балках массивного сечения (подобное, впрочем, нередко допустимо и в тонкостенных балках) напряженное состояние можно рассматривать как одноосное. Условие прочности при нем ограничивает напряжения  $\sigma_z$  расчетными сопротивлениями материала на растяжение и сжатие.

### 10.3. Общий случай нагружения

В общем случае нагружения в поперечном сечении стержня может возникнуть шесть внутренних силовых факторов: продольная сила  $N$ , поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , крутящий момент  $M_z$ .

Распределение напряжений по сечению описывается сложными зависимостями их от координат. Поиск опасной точки и напряжений в ней нередко оказывается весьма громоздкой задачей.

При определении напряжений в общем случае нагружения также используют принцип независимости действия сил. Сопоставляя напряжения и напряженные состояния в разных точках, устанавливают, какая из них опасна. Не всегда, однако, удается отдать предпочтение одной из точек. В таких случаях проверяют прочность материала в нескольких местах опасного сечения.

Обычно задачу упрощают. В стержнях массивного сечения, как правило, не учитывают касательные напряжения от поперечных сил, а иногда и нормальные напряжения, соответствующие продольной силе. Вопрос о возможности тех или иных упрощений решается в зависимости от конкретных условий.

В качестве иллюстрации приемов, используемых при поиске опасной точки и напряжений в ней, рассмотрим два типа сечения – круглое и прямоугольное.

### 10.3.1. Общий случай нагружения стержня круглого сечения

Будем считать, что по эпюрам внутренних силовых факторов установлено положение опасного сечения, найдены в нем величины и направления  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  (рис. 10.13 а). Круг – сечение массивного типа. Действие поперечных сил не учитываем.

Построим эпюры напряжений в сечении отдельно нормальных от растяжения и изгиба и касательных от кручения.

При осевом растяжении нормальные напряжения  $\sigma_z(N)$  распределены по сечению равномерно. Во всех точках  $\sigma_z(N) = N/A$ . Эпюра показана на рис. 10.13 б.

Напряжения от изгиба. В круге любая центральная ось – главная, кривой изгиб невозможен. Моменты  $M_x$  и  $M_y$  просуммируем и заменим результирующим изгибающим моментом  $M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

Наибольшие нормальные напряжения  $\max \sigma_z(M_b) = M_b/W$  ( $W$  – осевой момент сопротивления круга (7.14)). Они возникают в точках 1 и 2, лежащих в плоскости изгиба (определение положения плоскости действия результирующего момента проиллюстрировано в примере 10.2).

Наибольшие касательные напряжения (рис. 10.13 г) от кручения возникают на границе сечения (6.7);  $\max \tau_{zs}(M_z) = M_z/W_p$  ( $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения (6.8)).

Опасной может быть точка 1 или 2. В точке 1  $\max \sigma_z = N/A + M_b/W$ ; в 2  $\sigma_z = N/A - M_b/W$ ; в обеих точках  $\max \tau_{zs} = M_z/W_p$ . При  $R_t \leq R_c$  опасна точка 1. Если же  $R_t > R_c$ , опасной может быть и та, и другая в зависимости от отношений напряжений и расчетных сопротивлений.

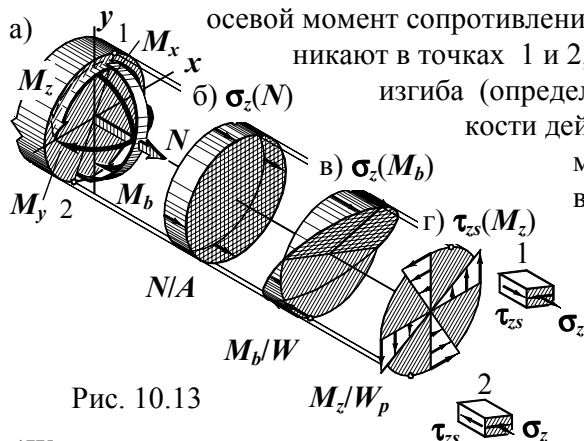


Рис. 10.13

### 10.3.2. Общий случай нагружения стержня прямоугольного сечения

Второй тип сечения – прямоугольник. Пусть внутренние силовые факторы, величины которых полагаем известными, направлены так, как показано на рис. 10.14 а. Сопоставим напряженные состояния в разных точках с целью выбора опасной из них. Для конкретности рассуждений будем считать, что расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие одинаковы.

Эпюры и формулы нормальных и касательных напряжений в некоторых точках сечения приведены на рис. 10.14 б ... д (напряжения от поперечных сил не учитываем).

Сравнивая нормальные напряжения в угловых точках сечения (касательных напряжений в них нет), видим, что наибольшие они в точке 1, где суммируются сжимающие напряжения  $\sigma_z(N)$ ,  $\max \sigma_z(M_x)$  и  $\max \sigma_z(M_y)$ . Величина наибольшего сжимающего напряжения

$$\max \sigma_z = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y.$$

Из точек, лежащих на оси  $x$ , опаснее точка 2, в которой суммируются  $\sigma_z(N)$  и  $\max \sigma_z(M_y)$ . Кроме того, здесь возникают наибольшие касательные напряжения от  $M_z$  (6.16)  $\max \tau_{zy} = M_z/W_t$  ( $W_t$  – момент сопротивления прямоугольного сечения при кручении (6.17)).

Сопоставляя напряжения в точках оси  $y$ , выделим из них точку 3, где также к сжатию от  $N$  ( $\sigma_z(N) = N/A$ ) добавляется сжатие от  $M_x$  ( $\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x$ ). Касательное напряжение в точке 3 (6.18)  $\max \tau_{zx} = \gamma M_z/W_t$ .

Итак, в качестве опасных намечаем три точки: 1, 2 и 3.

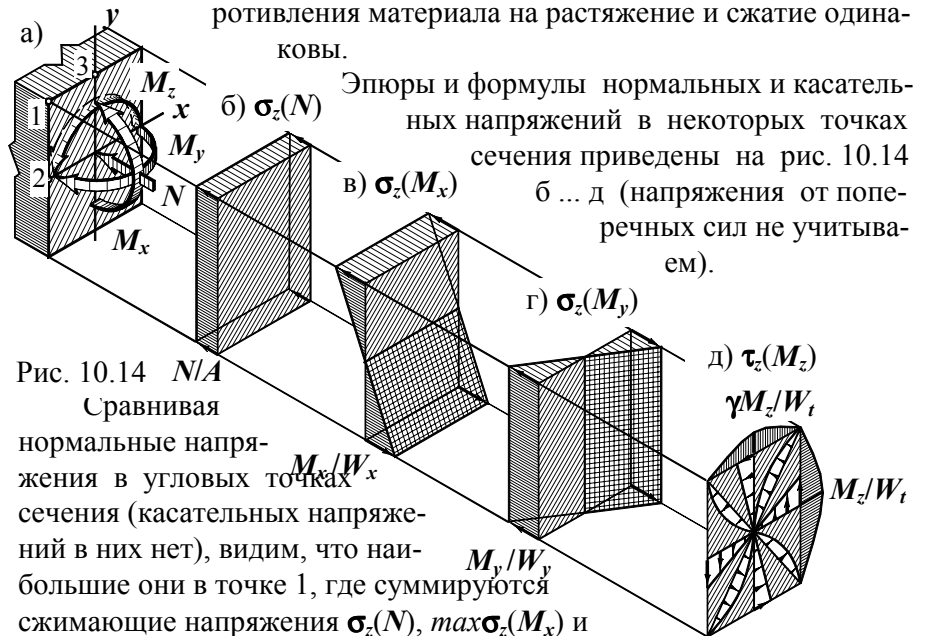


Рис. 10.14

Точка 1:  $\sigma_z = N/A + M_x/W_x + M_y/W_y$ ,  $\tau_z = 0$ .

Точка 2:  $\sigma_z = N/A + M_y/W_y$ ,  $\tau_{zy} = M_z/W_t$ .

Точка 3:  $\sigma_z = N/A + M_x/W_x$ ,  $\tau_{zx} = \gamma M_z/W_t$ .

Какая из них опаснее, ответить нельзя. Для этого нужно знать численные значения напряжений в них и характеристики прочности материала. В конкретных задачах это обычно известно, есть возможность выделить из трех точек одну.

Может оказаться, что действительная опасная точка не попала в названные, а располагается где-то в другом месте. Отсутствие формулы касательных напряжений в точках сечения от крутящего момента лишает возможности более строгого ее поиска с использованием аналитических методов. Приходится ограничиваться выборочной проверкой прочности материала. Впрочем, более строгое (естественно, более трудоемкое) исследование зачастую нецелесообразно. Погрешность выборочной проверки обычно укладывается в пределы, допускаемые в прочностных инженерных расчетах.

### 10.3.3. Примеры расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии

Для иллюстрации условий, в которых приходится обращаться к теориям предельных напряженных состояний, мотивов и действий при оценке прочности материала, рассмотрим примеры.

**Пример 10.7.** Определим допустимую нагрузку на раму, показанную на рис. 10.15 а. Материал – чугун СЧ-15 (расчетные сопротивления  $R_r = 55 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 160 \text{ МПа}$ , нормативные –  $R_{ut} = 110 \text{ МПа}$ ,  $R_{uc} = 220 \text{ МПа}$ ). Сечения стержней прямоугольные с  $b = 25 \text{ см}$ ,  $h = 10 \text{ см}$ ;  $l = 1,2 \text{ м}$ .

Первый этап решения задачи – построение эпюр внутренних силовых факторов. Они изображены на рис. 10.15 б ... д. Из эпюр следует, что нужно проверить два сечения – 1 и 2.

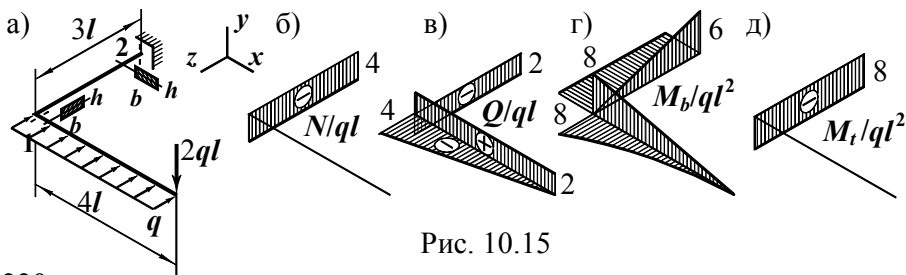


Рис. 10.15

Сечение 1.

Величины и направления внутренних силовых факторов, возникающих в сечении, показаны на рис. 10.16 а. Поскольку сечение массивное, поперечные силы в расчетах учитывать не будем (на рисунке они не изображены). Изгибающие моменты в сечении:  $M_y = M_z = 8ql^2$ .

Напряжения  $\sigma_x(M_z)$  (рис. 10.16 б). В точках верхнего и нижнего краев

$$\begin{aligned} \sigma_x(M_z) &= M_z/W_z = \\ &= 8ql^2/(bh^2/6) = \\ &= 8q120^2/(25 \cdot 10^2/6) = 276q/\text{см} \end{aligned}$$

От момента  $M_y$ , нормальные напряжения на вертикальных краях

$$\begin{aligned} \sigma_x(M_y) &= M_y/W_y = 8ql^2/(hb^2/6) = \\ &= 8q120^2/(10 \cdot 25^2/6) = 111q/\text{см} \end{aligned}$$

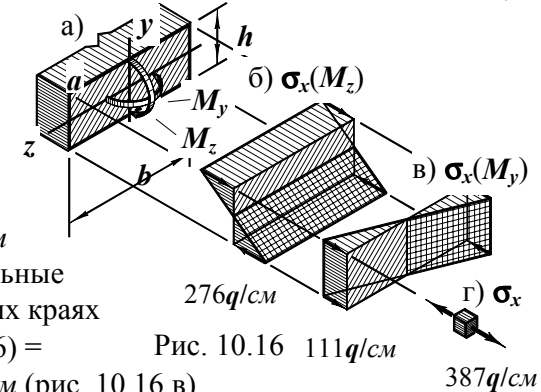


Рис. 10.16  $111q/\text{см}$   $387q/\text{см}$

Опасная точка в сечении – а. Напряжение в ней  $\sigma_x = 276q + 111q = 387q/\text{см}$ , напряженное состояние – линейное (рис. 10.16 г).

Сечение 2.

В сечении действуют (рис. 10.17 а)  
– изгибающие моменты  $M_x = 6ql^2$  и  $M_y = 8ql^2$ ;  
– продольная сила  $N = 4ql$ ;  
– крутящий момент  $M_z = 8ql^2$ ;

Поперечную силу  $Q_y$  не учитываем.

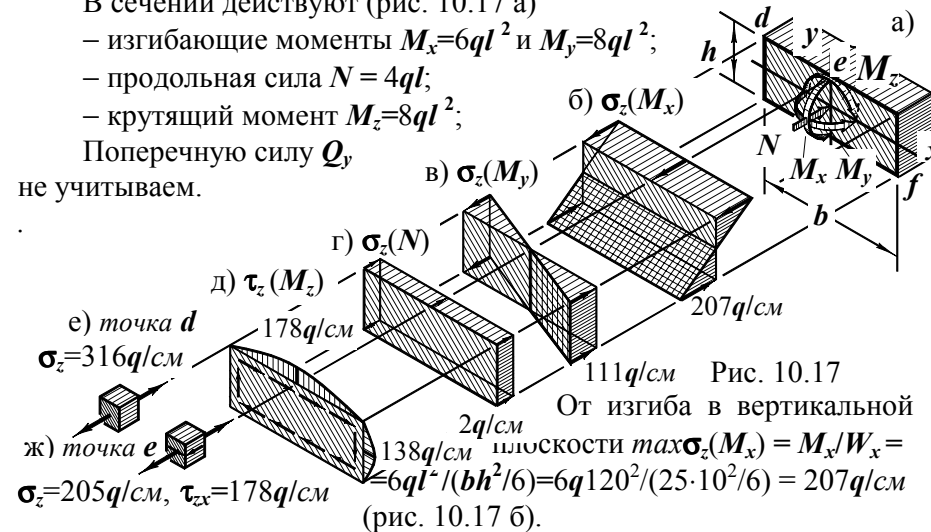


Рис. 10.17

От изгиба в вертикальной плоскости  $\max \sigma_z(M_x) = M_x/W_x = 6ql^2/(bh^2/6) = 6q120^2/(25 \cdot 10^2/6) = 207q/\text{см}$ ,  $\tau_{zx} = 178q/\text{см}$  (рис. 10.17 б).

Изгибающий момент в горизонтальной плоскости вызывает напряжения  $\max \sigma_z(M_y) = M_y/W_y = 8ql^2/(hb^2/6) = 8q120^2/(10 \cdot 25^2/6) = 111q/\text{см}$  (эпюра показана на рис. 10.17 в).

Нормальные напряжения от продольной силы (рис. 10.17 г)

$$\sigma_z(N) = N/A = 4ql/(bh) = 4q \cdot 120/(25 \cdot 10) = 2q/см.$$

Касательные напряжения от крутящего момента (рис. 10.17 д):

в точке *e*  $\max \tau_{zx} = M_z/W_t = 8ql^2/(\beta h^3) = 8q120^2/(0,647 \cdot 10^3) = 178q/см;$   
 посередине вертикальных сторон

$$\tau_{zy} = \gamma \max \tau_{zx} = 0,774 \cdot 178q = 138q/см,$$

(коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  взяты из таблицы 6.1).

Сравним напряжения в трех точках *d*, *e* и *f*.

Точка *d*:  $\sigma_z = 207q + 111q - 2q = 316q/см;$  напряженное состояние – одноосное растяжение (рис. 10.17 е).

Точка *f*:  $\sigma_z = 207q + 111q + 2q = 320q/см;$  напряженное состояние – одноосное сжатие.

Сравнивая, с одной стороны, напряжения в точках *d* и *f* и, с другой, расчетные сопротивления на растяжение  $R_t$  и сжатие  $R_c$ , видим – точка *d* опаснее.

Точка *e* (рис. 10.17 ж):  $\sigma_z = 207q - 2q = 205q/см,$   $\tau_{zx} = 178q/см;$  напряженное состояние плоское. Нормальные и касательные напряжения одного порядка:  $0,1 \leq \tau_{zx}/\sigma_z = 178q/(207q) = 0,86 \leq 10 \Rightarrow$  напряженное состояние в точке *e* сложное. Для оценки опасности состояния материала необходимо привлечь теорию прочности.

Материал рамы – чугун:

- хрупкий материал;
- с разными, но соизмеримыми пределами прочности на растяжение  $R_{ut}$  и сжатие  $R_{uc}$ ;
- при смешанном плоском напряженном состоянии.

В этих условиях следует использовать теорию прочности О.Мора.

Главные напряжения:

$$\sigma_{1/3} = (\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zx}^2})/2 = (205 \pm \sqrt{205^2 + 4 \cdot 178^2})q/2;$$

$$\sigma_1 = 308q/см, \quad \sigma_3 = -103q/см.$$

Эквивалентное напряжение (9.19) –

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - (R_{ut}/R_{uc})\sigma_3 = (308 - (110/220)(-103)q) = 355q/см.$$

Сопоставляя напряжения в точках *a*, *d* и *e*, видим, что опасна точка *a*. Напряжение в ней  $\sigma_x = 387q/см.$

Условие прочности при одноосном растяжении  $\sigma_x \leq R_t$  приводит к результату  $387q \leq 5,5; \quad q \leq 0,0142 \text{ кН/см.}$

Принимаем допустимую нагрузку  $[q] = 14 \text{ Н/см.}$

**Пример 10.8.** Для рамы, рассмотренной в примере 10.7 (рис. 10.15 а), подберем круглое сечение из стали 09Г2С ( $R = 335 \text{ МПа}$ ) при  $q = 14 \text{ Н/см.}$

Сечение 1 (рис. 10.18). Изгибающие моменты в сечении  $M_y = M_z = 8ql^2$ . Просуммируем их:

$$M_b = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} ql^2 = 11,3 ql^2.$$

Нормальное напряжение в точке *a*  
 $\max \sigma_x = M_b/W = 11,3 ql^2/(\pi D^3/32) = 362ql^2/(\pi D^3).$

Напряженное состояние – одноосное растяжение.

Сечение 2 (рис. 10.19). В нем действуют

- продольная сила  $N = 4ql;$
- изгибающие моменты:  $M_x = 6 ql^2, \quad M_y = 8ql^2; \quad M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} ql^2 = 10ql^2;$
- крутящий момент  $M_z = 8ql^2.$

Нормальное напряжение в точке *d* –

$$\max \sigma_z = N/A + M_b/W =$$

$$= 4ql/(\pi D^2/4) + 10ql^2/(\pi D^3/32) =$$

$$= 16ql/(\pi D^2) + 320ql^2/(\pi D^3).$$

Касательное напряжение в точке *d* –

$$\max \tau_{zs} = M_z/W_p = 8 ql^2/(\pi D^3/16) = 128 ql^2/(\pi D^3).$$

Напряжения соизмеримы, напряженное состояние сложное, необходимо обратиться к теории прочности.

Сталь 09Г2С – пластичный материал с равными расчетными сопротивлениями при растяжении и сжатии. Для таких материалов рекомендуют третью или четвертую теорию (для стержневых элементов они практически равноправны). Воспользуемся третьей.

Условие прочности (9.14) в рассматриваемой точке

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zx}^2} = \sqrt{(16ql/(\pi D^2) + 320ql^2/(\pi D^3))^2 + 4(128ql^2/(\pi D^3))^2} \leq R.$$

Из него нужно найти диаметр  $D$ .

В форме равенства это полное кубическое уравнение. Решение его трудоемко. Упростим процедуру решения, отбросив напряжения от продольной силы, равные  $16ql/(\pi D^2)$ . Теперь условие прочности запишется так:  $\sqrt{(320ql^2/(\pi D^3))^2 + 4(128ql^2/(\pi D^3))^2} \leq R$ , или после вычислений  $410ql^2/(\pi D^3) \leq R$ .

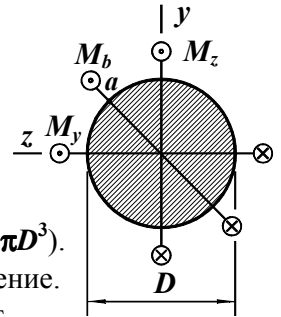


Рис. 10.18

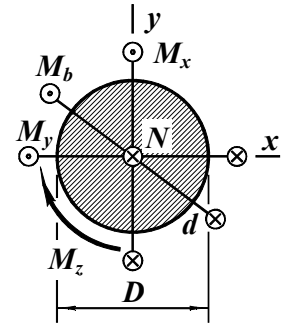


Рис. 10.19



Сравнивая левую часть условия с напряжением в точке  $a$ , видим, что точка  $d$  опаснее. Итак,  
 $D^3 \geq 410ql^2/(\pi R) = 410 \cdot 0,014 \cdot 120^2/(3,14 \cdot 33,5) = 786 \text{ см}^3$ ,  $D \geq 9,2 \text{ см}$ .  
 Пусть  $D = 10 \text{ см}$ .

Поскольку результат получен без учета продольной силы, проверим условие прочности, приняв ее во внимание:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 16ql/(\pi D^2) + 320ql^2/(\pi D^3) = \\ &= 16 \cdot 0,014 \cdot 120/(3,14 \cdot 10^2) + 320 \cdot 0,014 \cdot 120^2/(3,14 \cdot 10^3) = 20,6 \text{ кН/см}^2; \\ \tau_{zs} &= 128 \text{ } ql^2/(\pi D^3) = 128 \cdot 0,014 \cdot 120^2/(3,14 \cdot 10^3) = 8,21 \text{ кН/см}^2; \\ \sigma_{eq} &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zs}^2} = \sqrt{20,6^2 + 4 \cdot 8,21^2} = 26,3 < 33,5 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется.

Расчет показал, что сравнительно небольшое увеличение диаметра по отношению к требуемому вполне скомпенсировало напряжения от неучтенной продольной силы. В то же время использованное упрощение процесса решения кубического уравнения позволило уменьшить объем вычислительных операций во много раз.

Итак, расчет на прочность состоит из

- построения эпюр внутренних силовых факторов с целью выбора опасного сечения, определения величин и направлений обобщенных усилий в нем;
- поиска опасной точки в сечении и вычисления напряжений в ней;
- проверки условия прочности (при простых напряженных состояниях – одноосном растяжении или сжатии по (5.9), чистом сдвиге по (6.3); в случае сложного напряженного состояния условие имеет вид  $\sigma_{eq} \leq R$  с эквивалентным напряжением соответствующим материалу и напряженному состоянию материала).

#### 10.4. Условия применимости принципа суперпозиции

Принцип суперпозиции (наложения, независимости действия сил), намного облегчает решение задач прочности и жесткости, позволяя результат сложного воздействия получить суммированием результатов простых воздействий, составляющих сложное. Естественно возникает вопрос об условиях, при которых названный принцип можно использовать.

Пусть  $Z$  результат воздействия переменных  $Y_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Не вдаваясь в доказательство (оно, впрочем, очевидно), отметим, что принцип суперпозиции применим, если  $Z$  является линейной однородной функцией переменных  $Y_i$ :

$$Z = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_i Y_i + \dots + a_m Y_m, \quad (10.10)$$

где  $a_i$  – постоянные коэффициенты.

Если переменные  $Y_i$  сами являются линейными однородными функциями параметров  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) –

$$Y_i = b_{i1} X_1 + b_{i2} X_2 + \dots + b_{ij} X_j + \dots + b_{in} X_n,$$

то зависимость  $Z$  от  $X_j$  также будет линейной однородной:

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_j X_j + \dots + c_n X_n.$$

Рассмотрим с высказанных позиций некоторые ранее полученные зависимости.

Внутренние силовые факторы, рассмотренные в разд. 3, являются линейными однородными функциями параметров внешней нагрузки. Следовательно, к ним и их эпюрам можно применять принцип наложения.

Зависимость напряжения в точке (см., например, формулы (5.10), (6.4), (7.3)) от внутреннего силового фактора также линейна однородна. Принцип можно использовать, что и реализовано при сложном сопротивлении. Из отмеченного в этом и предыдущем абзацах следует справедливость принципа наложения и в связи нагрузка–напряжение.

Энергетические характеристики напряженно-деформированного состояния (5.8), (5.23), (5.24) и аналогичные им являются квадратичными функциями. Для их определения принцип независимости действия сил неприменим (скажем, работа двух сил не равна сумме работ каждой силы, действующей отдельно).

Критерий (10.10) позволяет в каждом конкретном случае решить, можно ли применить принцип наложения к той или иной характеристике напряженно-деформированного состояния конструкции.

## 11. Основы технической теории тонкостенных стержней открытого профиля

Стержни (рис. 11.1,  $d/l \leq 0,1$ ), у которых больший размер сечения значительно превышает толщину стенки ( $d/\delta \geq 10$ ), называют *тонкостенными*.

В шестом разделе были отмечены некоторые особенности поведения тонкостенных стержней открытого профиля при кручении:

- деформация поперечного сечения;
- большие напряжения и деформации;
- разновидности кручения (свободное или стесненное) в зависимости от возможности деформации сечения.

Приведенный перечень не является исчерпывающим и не отражает всей специфики их реакции на внешнюю нагрузку. Ознакомимся с элементами технической теории тонкостенных стержней открытого профиля, разработанной В.З.Власовым<sup>1</sup>.

### 11.1. Исходные предпосылки. Расчетные уравнения

Используемые термины:

– *Срединная поверхность* – поверхность, проходящая посередине толщин пластинок, образующих стержень.

<sup>1</sup> Василий Захарович Власов (1906–1958) – выдающийся советский ученый в области строительной механики, автор многих оригинальных работ по тонкостенным пространственным конструкциям.

– *Образующая* – прямая, параллельная продольной оси и принадлежащая срединной поверхности.

– *Профильная (контурная) линия* – линия пересечения срединной поверхности с поперечной плоскостью.

Техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля построена на следующих геометрических гипотезах:

- стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;
- деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют.

#### 11.1.1. Геометрические соотношения

Поперечные перемещения точек сечения.

На рис. 11.2 изображена контурная линия до (сплошными линиями) и после деформации (пунктирные линии). Из рисунка следует:

$$u = u_b - (y - y_b)\varphi,$$

$$v = v_b + (x - x_b)\varphi,$$

где  $u$  и  $v$  – горизонтальное и вертикальное перемещения произвольной точки  $k$ ;

$u_b$  и  $v_b$  – горизонтальное и вертикальное перемещение точки  $c_b$ , жестко связанной с сечением;

$x$  и  $y$  – координаты произвольной точки в главных центральных осях сечения;

$x_b$  и  $y_b$  – координаты точки  $c_b$ ;

$\varphi$  – угол поворота сечения вокруг точки  $c_b$ .

Введем цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, s$  и выразим перемещение произвольной точки через составляющие  $\xi$  – вдоль оси  $s$  и  $\zeta$  – вдоль  $\rho$  (рис. 11.3 а):

$$\xi = u \cos \alpha + v \sin \alpha,$$

$$\zeta = u \sin \alpha - v \cos \alpha.$$

После подстановки равенств (а) в (б) имеем

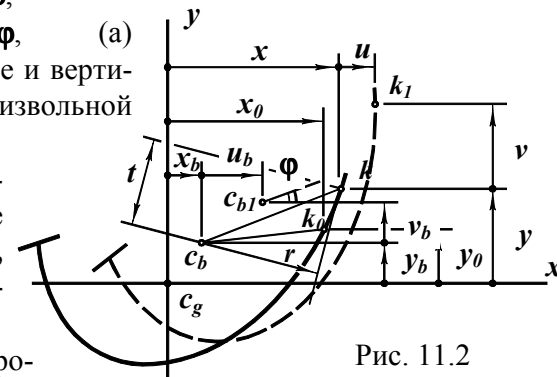


Рис. 11.2

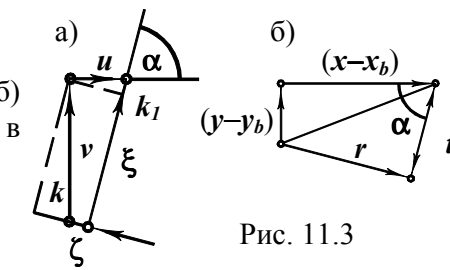


Рис. 11.3

$$\xi = (u_b - (y - y_b)\varphi)\cos\alpha + (v_b + (x - x_b)\varphi)\sin\alpha,$$

$$\zeta = (u_b - (y - y_b)\varphi)\sin\alpha - (v_b + (x - x_b)\varphi)\cos\alpha. \quad (\text{в})$$

По рис. 11.3 б  $(x - x_b)\sin\alpha - (y - y_b)\cos\alpha = r$ ,  $(y - y_b)\sin\alpha + (x - x_b)\cos\alpha = t$ .  
Учитывая это, фиксируем равенства (в) в виде

$$\xi = u_b\cos\alpha + v_b\sin\alpha + r\varphi, \quad \zeta = u_b\sin\alpha - v_b\cos\alpha - t\varphi. \quad (\text{г})$$

Продольные перемещения точек сечения.

Выделим элемент срединной поверхности и воспользуемся второй гипотезой (рис. 11.4):

$\text{tg}\beta = d\xi/dz = -dw/ds$ , откуда  $dw = -(d\xi/dz)ds$ . Согласно равенствам (г)

$$dw = -(u'_b\cos\alpha + v'_b\sin\alpha + r\varphi')ds. \quad (\text{д})$$

Проинтегрируем равенство (д) (рис. 11.5) от некоторой начальной точки  $k_0$  до произвольной

Рис. 11.4 точки  $k$ :  $\int_{k_0}^k dw = -\int_{k_0}^k u'_b\cos\alpha ds - \int_{k_0}^k v'_b\sin\alpha ds - \int_{k_0}^k r\varphi' ds$ . Но  $\cos\alpha ds = dx$ ,  
а)  $\sin\alpha ds = dy$ , произведение  $rds$  представляет собой удвоенную площадь элементарного сектора (он дважды заштрихован на рис. 11.5 а):  $rds = d\omega$ . Таким образом,

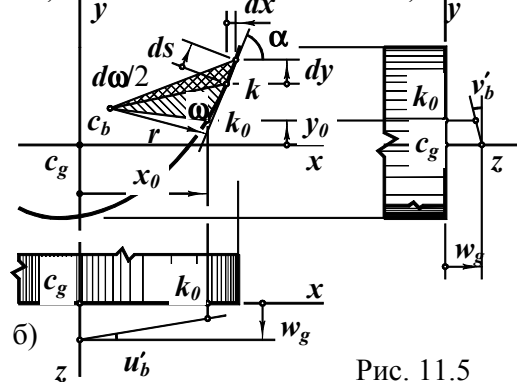


Рис. 11.5

$w - w_0 = -u'_b(x - x_0) - v'_b(y - y_0) - \varphi'\omega$ .  
Учитывая равенство (рис. 11.5 б, в)  $w_0 = w_g - u'_b x_0 - v'_b y_0$ , приходим к выражению

$$w = w_g - u'_b x - v'_b y - \varphi'\omega. \quad (\text{е})$$

В этом равенстве  $\omega$  — **секториальная координата** произвольной точки  $k$ , отсчитываемая от  $k_0$ .

Абсолютное удлинение элементарного отрезка продольного волокна (рис. 11.6)  $\Delta dz = w + (\partial w/\partial z)dz - w = (\partial w/\partial z)dz$ .

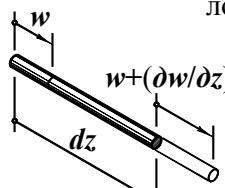


Рис. 11.6

Относительное —  $\epsilon_z = \Delta dz/dz = \partial w/\partial z$ . Дифференцируя равенство (е) по  $z$ , получаем

$$\epsilon_z = w'_g - u''_b x - v''_b y - \varphi''\omega. \quad (\text{ж})$$

Это и есть геометрическое равенство, описывающее распределение деформаций по сечению.

### 11.1.2. Физические и статические уравнения

Предпосылки, связанные с нормальными напряжениями:

— продольные волокна друг на друга не давят:  $\sigma_s = \sigma_p = 0$ ;

— нормальные напряжения  $\sigma_z$  по толщине стенки распределены равномерно. Согласно закону Гука  $\sigma_z = E\epsilon_z$ . (и)

Условия статической эквивалентности —

$$\int_A \sigma_z dA = N, \quad \int_A \sigma_z x dA = M_y, \quad \int_A \sigma_z y dA = M_x. \quad (\text{к})$$

Уравнения (ж), (и), (к) позволяют описать распределение нормальных напряжений по сечению стержня.

### 11.2. Нормальные напряжения в сечении

Из равенств (ж), (и) следует

$$\sigma_z = E(w'_g - u''_b x - v''_b y - \varphi''\omega). \quad (\text{л})$$

Подставив это равенство в условия (к), получаем выражения

$$Ew'_g \int_A dA - Eu''_b \int_A x dA - Ev''_b \int_A y dA - E\varphi'' \int_A \omega dA = N,$$

$$Ew'_g \int_A x dA - Eu''_b \int_A x^2 dA - Ev''_b \int_A xy dA - E\varphi'' \int_A \omega x dA = M_y,$$

$$Ew'_g \int_A y dA - Eu''_b \int_A xy dA - Ev''_b \int_A y^2 dA - E\varphi'' \int_A \omega y dA = M_x. \quad (\text{м})$$

В них сформировались известные и новые геометрические характеристики.

Известные:

$\int_A dA = A$  — площадь поперечного сечения;

$\int_A x dA = S_y$  и  $\int_A y dA = S_x$  — статические моменты сечения относительно осей  $x$  и  $y$ ; но так как эти оси — центральные,  $S_x = 0$ ,  $S_y = 0$ ;

$\int_A x^2 dA = J_y$  и  $\int_A y^2 dA = J_x$  — осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей  $x$  и  $y$ ;

$\int_A xy dA = J_{xy}$  — центробежный момент инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ ; но так как эти оси — главные,  $J_{xy} = 0$ .

Новые:

$\int_A \omega dA = S_\omega$  — **секториальный статический момент**, его размерность  $m^4$  и т.п.;

$\int_A \omega x dA = S_{\omega x}$  и  $\int_A \omega y dA = S_{\omega y}$  — **секториально-линейные статические моменты**, их размерность  $m^5$  и т.п.

Для упрощения расчетных формул воспользуемся возможностью произвольного выбора положений точек  $k_0$  и  $c_b$ . Точку  $k_0$  и координаты  $x_b$  и  $y_b$  выберем так, чтобы выполнялись условия

$$S_\omega = 0, S_{\omega x} = 0, S_{\omega y} = 0. \quad (11.1)$$

Точку  $k_0$  будем называть *главной секториальной нулевой точкой*, а полюс  $c_b$  — *центром изгиба сечения*.

При равенствах (11.1) выражения (м) примут вид

$$Ew'_g A = N, -Eu''_b J_y = M_y, -Ev''_b J_x = M_x,$$

или  $w'_g = N/(EA), u''_b = -M_y/(EJ_y), v''_b = -M_x/(EJ_x).$

Заменив этими равенствами производные перемещений в формуле (л), придаем ей вид

$$\sigma_z = N/A + M_y x/J_y + M_x y/J_x - E\phi'' \omega. \quad (н)$$

Формула нормальных напряжений упрощается и принимает типовой вид, если ввести новое понятие обобщенного усилия

$$B = \int_A \sigma_z \omega dA. \quad (11.2)$$

Новый силовой фактор носит название *бимомент*.

Подставим равенство (л) в выражение (11.2) с учетом (11.1):

$$B = Ew'_g \int_A \omega dA - Eu''_b \int_A \omega x dA - Ev''_b \int_A \omega y dA - E\phi'' \int_A \omega^2 dA = -E\phi'' \int_A \omega^2 dA. \quad (п)$$

Интеграл представляет собой новую геометрическую характеристику

$$\int_A \omega^2 dA = J_\omega, \quad (11.3)$$

называемую *секториальным моментом инерции сечения*. Его размерность  $m^6$  и т.п. Теперь  $B = -EJ_\omega \phi''$ , откуда

$$E\phi'' = -B/J_\omega. \quad (11.4)$$

После подстановки этого равенства в выражение (н) приходим к формуле нормальных напряжений

$$\sigma_z = N/A + M_y x/J_y + M_x y/J_x + B\omega/J_\omega. \quad (11.5)$$

Первые три слагаемых в правой части формулы (11.5) соответствуют обычной теории сложного сопротивления, базирующейся на гипотезе плоских сечений. Последний член этой формулы определяет величину дополнительных *секториальных напряжений*  $\sigma_\omega = B\omega/J_\omega$ , которые возникают вследствие переменной по длине деформации сечения. Напряжения  $\sigma_\omega$  распределяются в сечении по закону секториальной координаты  $\omega$  и образуют самоуравновешенную систему внутренних усилий, приводящуюся к двум равным противоположно направленным парам. Методом сечений бимомент определен быть не может.

### 11.3. Бимомент

Для иллюстрации понятия бимомента рассмотрим пример силового воздействия на двутавр.

Пусть двутавр подвержен двум моментам, как показано на рис. 11.7. В любом сечении  $N = M_x = M_y = 0$ . Тем не менее в двутавре возникнут напряжения вследствие изгиба полок. Эти напряжения определяются последним членом формулы (11.5)  $\sigma_\omega = B\omega/J_\omega$ .

*Бимомент равен произведению пары сил на расстояние между плоскостями их действия:*

$$B = Mh.$$

Размерность бимомента и  $Hm^2$  и т. п.

Вычисление бимомента сосредоточенной силы также рассмотрим на примере (рис. 11.8).

Пусть в некоторой точке  $k$  действует сила  $F$ .

Добавив в точках  $k_0$ ,  $a$  и  $c_b$  по две взаимно противоположные силы  $F$ , получим  $B = Fsh$ . Но  $sh = \omega$ , откуда  $B = F\omega$ .

*Бимомент сосредоточенной силы относительно полюса  $c_b$  равен произведению силы на секториальную координату точки ее приложения.*

Теперь можно объяснить смысл интеграла  $\int_A \sigma_z \omega dA$ :  $\int_A \sigma_z \omega dA = \int_A \omega dF = \int_A dB = B$ . Он представляет собой сумму бимоментов элементарных нормальных сил по всему поперечному сечению.

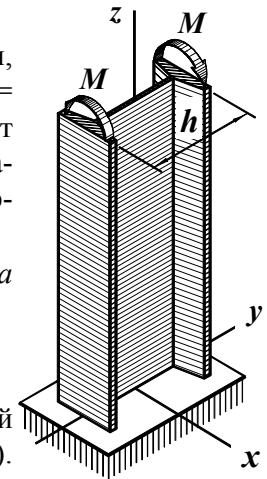


Рис. 11.7

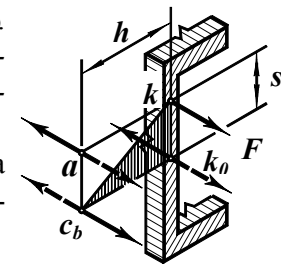


Рис. 11.8

### 11.4. Касательные напряжения в сечении

Предпосылки о касательных напряжениях (рис. 11.9):

- в любой точке поперечного сечения касательные напряжения параллельны касательной к профильной линии;
- по толщине стенки касательные напряжения линейно переменны (рис. 11.9 а).

Разложим касательные напряжения на две составляющие – кососимметричные и симметричные. Остановимся на них.

### 11.4.1. Кососимметричные касательные напряжения

Эти напряжения приводятся к моменту  $M_t$  и связаны с ним формулой (6.21), которая в используемых здесь обозначениях имеет вид

$$\tau_{ft} = M_t \delta / J_t, \quad (11.6)$$

где

$$J_t = \sum_1^n b_i \delta_i^3 / 3. \quad (11.7)$$

### 11.4.2. Симметричные касательные напряжения

Момент внутренних касательных напряжений равен моменту внешних сил (рис. 11.9 б):  $M_{z_1} = M_t + \int_A \tau_\omega \delta ds \cdot r$ . Обозначим  $\int_A \tau_\omega \delta ds \cdot r = \int_A \tau_\omega \delta d\omega = M_\omega$ . Тогда

$$M_{z_1} = M_t + M_\omega. \quad (11.8)$$

Здесь  $M_{z_1}$  – момент внешних сил относительно оси  $z_1$ , проходящей через центр изгиба;  $M_t$  – момент свободного кручения (часть крутящего момента, воспринимаемая кососимметричными касательными напряжениями);

$$M_\omega = \int_A \tau_\omega \delta d\omega. \quad (11.9)$$

– *изгибно-крутящий момент* (часть крутящего момента, воспринимаемая симметричными касательными напряжениями).

Для определения величины касательных напряжений  $\tau_\omega$  воспользуемся методом Д.И. Журавского (рис. 11.10):

$$\Sigma Z = \int_{A_{ct}} (\sigma_z + (\partial \sigma_z / \partial z) dz) dA - \int_{A_{ct}} \sigma_z dA - \tau_\omega \delta dz = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad \tau_\omega = \int_{A_{ct}} (\partial \sigma_z / \partial z) dA / \delta.$$

$$\text{Но } \sigma_z = N/A + M_y x / J_y + M_x y / J_x + B \omega / J_\omega,$$

$$\text{т.е. } \partial \sigma_z / \partial z = N' / A + M_y' x / J_y + M_x' y / J_x + B' \omega' / J_\omega.$$

Таким образом,

$$\tau_\omega = (N' \int_{A_{ct}} dA / A + M_y' \int_{A_{ct}} x dA / J_y + M_x' \int_{A_{ct}} y dA / J_x + B' \int_{A_{ct}} \omega dA / J_\omega) / \delta.$$

А так как при отсутствии продольной распределенной нагрузки

$$N' = 0, \quad M_y' = -Q_x, \quad M_x' = -Q_y, \quad \text{то}$$

$$\tau_\omega = -Q_x S_y^{ct} / (J_y \delta) - Q_y S_x^{ct} / (J_x \delta) + B' S_\omega^{ct} / (J_\omega \delta). \quad (p)$$

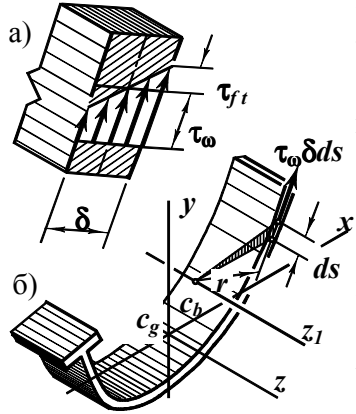


Рис. 11.9

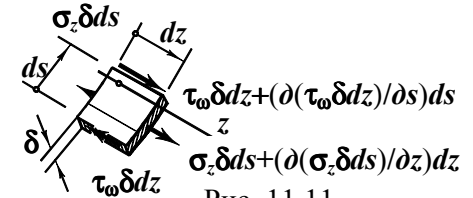


Рис. 11.11

Остановимся теперь на производной  $B'$ . По равенству (11.2)  $B = \int_A \sigma_z \omega dA$ . Следовательно,  $B' = \int_A (\partial \sigma_z / \partial z) \omega dA$ . Но из равновесия элемента тонкостенного стержня (рис. 11.11) вытекает:

$\Sigma Z = \sigma_z \delta ds + (\partial(\sigma_z \delta ds) / \partial z) dz - \sigma_z \delta ds - \tau_\omega \delta dz + \tau_\omega \delta dz + (\partial(\tau_\omega \delta dz) / \partial s) ds = 0$ , что после приведения подобных членов приводит к равенству  $(\partial(\sigma_z \delta ds) / \partial z) dz + (\partial(\tau_\omega \delta dz) / \partial s) ds = 0$ . Вынося за знаки производных  $\delta$  и  $ds$ , не зависящие от  $z$ , а также  $dz$ , не зависящий от  $s$ , приходим к равенству  $\partial \sigma_z / \partial z = -(\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} B' &= \int_A (\partial \sigma_z / \partial z) \omega dA = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta \omega dA = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) / \delta \omega \delta ds = \\ &= - \int_A (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) \omega ds. \end{aligned}$$

Возьмем интеграл по частям, приняв  $U = \omega$ ,  $dV = (\partial(\tau_\omega \delta) / \partial s) ds = d(\tau_\omega \delta)$ . Отсюда  $dU = d\omega$ ;  $V = \tau_\omega \delta$ ;  $B' = -\tau_\omega \omega \delta \Big|_A + \int_A \tau_\omega \delta d\omega$ . Первое слагаемое обращается в нуль, так как на границе сечения  $\tau_\omega = 0$ . Но по равенству (11.9)  $B' = M_\omega$ .

Формула касательных напряжений (p) принимает вид

$$\tau_\omega = -Q_x S_y^{ct} / (J_y \delta) - Q_y S_x^{ct} / (J_x \delta) + B' S_\omega^{ct} / (J_\omega \delta). \quad (11.11)$$

## 11.5. Деформации стержня.

### Обобщенные усилия в сечении

Деформации представляют самостоятельный интерес, поскольку позволяют оценить жесткость стержня. В тонкостенных же стержнях, где бимомент и изгибно-крутящий момент не могут быть найдены из условий равновесия, знание деформаций позволяет определить и эти обобщенные усилия в сечении.

### 11.5.1. Дифференциальное уравнение угла закручивания и его решение

По формулам (11.4)  $B = -E J_\omega \phi''$ ; (11.10)  $M_\omega = B' = -E J_\omega \phi''$ ; (6.25)  $M_t = G J \phi'$ ; (11.8)  $M_{z_1} = M_t + M_\omega$ . Подстановка второго и третьего равенства в последнее дает выражение  $-E J_\omega \phi'' + G J \phi' = M_{z_1}$ , дифференцирование, которого по  $z$ , приводит к уравнению

$$\varphi^{IV} - \alpha^2 \varphi'' = -M'_{z_1} / (EJ_{\omega}), \quad (11.12)$$

в котором обозначено  $\alpha^2 = GJ_t / (EJ_{\omega}). \quad (11.13)$

Общее решение дифференциального уравнения (11.12) –

$$\varphi = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + C_3 z + C_4 + \varphi_{par}, \quad (11.14)$$

где  $\varphi_{par}$  – частное решение уравнения (11.12).

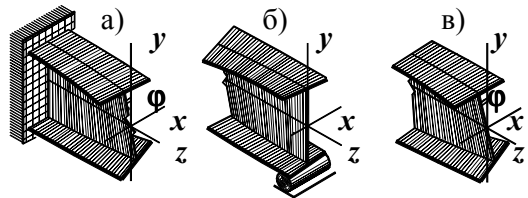
Постоянные  $C_1 \dots C_4$  определяются из граничных условий.

### 11.5.2. Граничные условия

Граничные условия отражают кинематические ограничения, накладываемые связями, и усилия на краю стержня. В реальных конструкциях кинематические и силовые взаимодействия элементов настолько многообразны, что охватить все случаи практически невозможно. Поэтому ограничимся простейшими примерами, проиллюстрировав методику назначения граничных условий.

#### Закрепленный край

Этот тип закрепления (рис. 11.12 а) препятствует повороту и деформации сечения:  $\varphi = 0$ ;  $\varphi' = 0$ .



#### Шарнирно закрепленный край

Край, опирающийся шарнирно, (рис. 11.12 б) не имеет возможности поворота вокруг продольной оси.

Рис. 11.12

Второе условие вытекает из отсутствия нормальных напряжений  $\sigma_{\omega}$ , из чего следует  $B = 0$ . Но  $B = -EJ_{\omega} \varphi''$ . Итак, на шарнирной опоре  $\varphi = 0$ ;  $\varphi'' = 0$ .

#### Свободный конец

На свободном краю (рис. 11.12 в) отсутствуют напряжения  $\sigma_{\omega}$ , момент  $M_{z_1} = 0$ . Следовательно, здесь должны выполняться условия

$$\varphi'' = 0, \quad EJ_{\omega} \varphi' - EJ_{\omega} \varphi''' = 0.$$

Если на стержне несколько участков, то для определения постоянных интегрирования используются условия неразрывности перемещений. В каждом конкретном случае, анализируя силовые и кинематические условия взаимодействия участков, можно обоснованно назначить достаточное количество граничных условий.

## 11.6. Секториальные геометрические характеристики

### 11.6.1. Секториальная координата

Секториальная координата точки  $k$  при полюсе  $T$  и начале  $k_0$  представляет собой удвоенную площадь сектора  $Tk_0k$  (рис. 11.13).

Размерность секториальной координаты  $m^2$  и т.п.

На рисунке  $Tk_0$  – неподвижный (начальный) радиус;  $Tk$  – подвижный (текущий) радиус.

Секториальную координату будем считать возрастающей, если подвижный радиус поворачивается против хода часовой стрелки.

Если начало отсчета перенести из точки  $k_0$  в точку  $k_1$ , то из рис. 11.13 очевидно, что

$$\omega_l = \omega_0 + \omega, \quad (11.15)$$

где  $\omega_l$  – секториальная координата точки  $k$  при начале отсчета  $k_l$ ;

$\omega_0$  – секториальная координата точки  $k_0$  при начале отсчета  $k_l$ ;

$\omega$  – секториальная координата точки  $k$  при начале отсчета  $k_0$ .

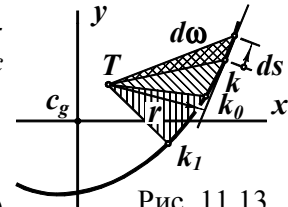


Рис. 11.13

### 11.6.2. Изменение секториальной координаты при переносе полюса

Перенесем полюс из точки  $c_d$  в точку  $c_b$  (рис. 11.14) и установим, как изменится при этом секториальная координата точки  $k$ .

Разность длин перпендикуляров

$$r_d - r_b = (x_b - x_d) \sin \alpha - (y_b - y_d) \cos \alpha,$$

$$r_b = r_d - (x_b - x_d) \sin \alpha + (y_b - y_d) \cos \alpha.$$

Дифференциалы секториальных координат: при полюсе  $c_d$   $d\omega_d = r_d ds$ ; с полюсом в точке  $c_b$

$$d\omega_b = r_b ds =$$

$$= r_d ds - (x_b - x_d) \sin \alpha ds + (y_b - y_d) \cos \alpha ds.$$

Но  $\sin \alpha ds = dy$ ,  $\cos \alpha ds = dx$ . Таким образом,

$$d\omega_b = d\omega_d - (x_b - x_d) dy + (y_b - y_d) dx.$$

Проинтегрируем равенство от некоторой фиксированной точки  $f$  до произвольной  $k$ :

$$\int_f^k d\omega_b = \int_f^k d\omega_d - (x_b - x_d) \int_f^k dy + (y_b - y_d) \int_f^k dx.$$

Отсюда  $\omega_b - \omega_{bf} = \omega_d - \omega_{df} - (x_b - x_d)(y - y_f) + (y_b - y_d)(x - x_f). \quad (11.16)$

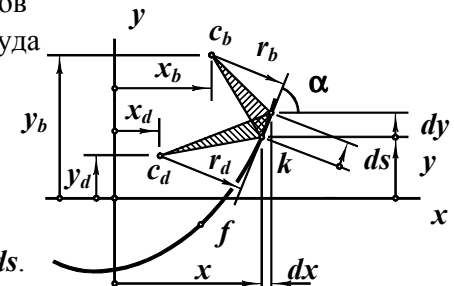


Рис. 11.14

### 11.6.3. Определение положения центра изгиба и главной нулевой точки

Центр изгиба и главная нулевая точка выбираются так, чтобы выполнялись равенства (11.1):  $S_{\omega x} = 0$ ,  $S_{\omega y} = 0$ ,  $S_{\omega} = 0$ .

Назначим произвольно начало отсчета в точке  $f$ , а полюс в точке  $c_d$ ; оси  $x$  и  $y$  – главные центральные. Воспользуемся первым условием, подставив в него зависимость (11.16):

$$S_{\omega x} = \int_A \omega_b x dA = \omega_{bf} \int_A x dA + \int_A \omega_d x dA - \omega_{df} \int_A x dA - (x_b - x_d) \int_A y x dA + (x_b - x_d) y_f \int_A x dA + (y_b - y_d) \int_A x^2 dA - (y_b - y_d) x_f \int_A x dA = 0.$$

Но  $\int_A x dA = 0$ ,  $\int_A y x dA = 0$ . Учитывая это, имеем

$$\int_A \omega_d x dA + (y_b - y_d) \int_A x^2 dA = 0.$$

Обозначив геометрические характеристики

$$\int_A \omega_d x dA = S_{\omega x}^d, \int_A x^2 dA = J_y,$$

приходим к равенству

$$y_b = y_d - S_{\omega x}^d / J_y. \quad (11.17)$$

Из второго требования  $-S_{\omega y} = 0$  вытекает аналогичное равенство

$$x_b = x_d + S_{\omega y}^d / J_x. \quad (11.18)$$

Равенство нулю секториального статического момента:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA = \int_A (\omega_I - \omega_0) dA = \int_A \omega_I dA - \omega_0 \int_A dA = 0$$

определяет секториальную координату главной нулевой точки –

$$\omega_0 = S_{\omega}^I / A. \quad (11.19)$$

Условию (11.19) могут удовлетворять несколько точек в сечении. Главной нулевой точкой будем считать ближайшую к центру изгиба.

### 11.7. Пример расчета

Консольная балка длиной  $l = 1$  м (рис. 11.15) подвержена равномерному давлению  $p = 4$  Н/см<sup>2</sup>. Сечение – прокатный швеллер № 10. Построим эпюры напряжений в опасном сечении.

#### 11.7.1. Геометрические характеристики сечения

Для упрощения вычислений заменим элементы швеллера прямоугольниками (рис. 11.16 а). Берем из таблицы:  $h = 10$  см,  $b = 4,6$  см,  $\delta = 0,45$  см,  $t = 0,76$  см,  $x_d = 1,22$  см (табличное  $z_0 = 1,44$  см минус  $\delta/2 = 0,225$  см),  $J_x = 174$  см<sup>4</sup>,  $J_y = 20,4$  см<sup>4</sup>. Главные центральные оси –  $x$ ,  $y$ .

Положение центра изгиба определяется формулами (11.17) и (11.18). Чтобы найти входящие в них секториально-линейные статические моменты  $S_{\omega x}^d$  и  $S_{\omega y}^d$ , построим эпюры абсцисс точек профильной линии  $x$  (рис. 11.16 б):

$$x_1 = x_4 = b - x_g = 4,6 - 1,44 = 3,16 \text{ см},$$

$$x_2 = x_3 = -x_g + \delta/2 = -1,44 + 0,45/2 = -1,22 \text{ см};$$

ординат  $y$  (рис. 11.16 в):

$$y_1 = y_2 = h/2 - t/2 =$$

$$= 10/2 - 0,76/2 = 4,62 \text{ см}, y_3 = y_4 = -4,62 \text{ см},$$

а также секториальных координат  $\omega_b$ , приняв полюс в точке  $c_d$  и начало отсчета в той же точке, но обозначенной буквой  $f$  (рис. 11.16 г):

$$\omega_{d2} = \omega_{d3} = 0, \omega_{d1} = -y_1(x_1 - x_d) = -4,62(3,16 + 1,22) = -20,2 \text{ см}^2, \omega_{d4} = 20,2 \text{ см}^2.$$

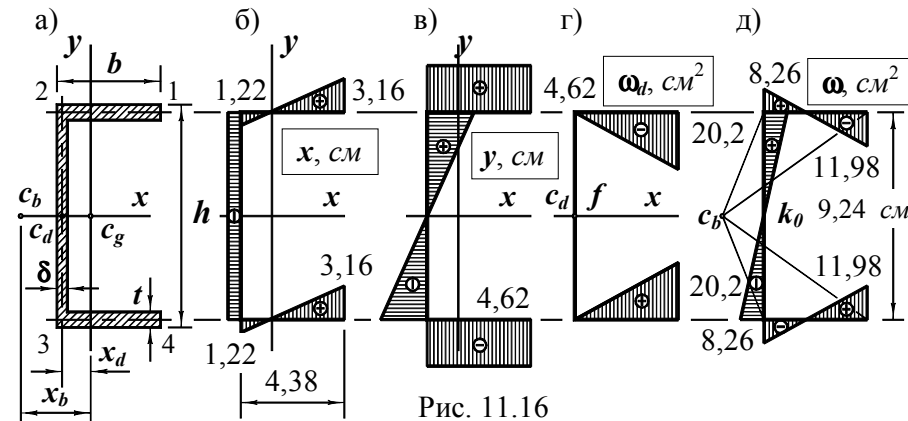


Рис. 11.16

Секториально-линейный статический момент  $S_{\omega x}^d = \int_A \omega_d x dA = 0$ , так как эпюра  $x$  симметрична, а  $\omega_d$  – кососимметрична. Из этого равенства и формулы (11.17) следует, что центр изгиба лежит на оси  $x$ :  $y_b = y_d - S_{\omega x}^d / J_y = y_d$ .

Другой момент  $-S_{\omega y}^d \neq 0$ . Вычислим его:  $S_{\omega y}^d = \int_A \omega_d y dA =$   
 $= 2 \int_{-1,22}^{3,16} \omega_d y_1 t dx = 2 y_1 t \int_{-1,22}^{3,16} \omega_d dx = -2 \cdot 4,62 \cdot 0,76 \cdot 4,38 \cdot 20,2/2 = -311 \text{ см}^5.$

Теперь по формуле (11.18)  $x_b = x_d + S_{\omega y}^d / J_x = -1,22 - 311/174 = -3,01$  см. Таким образом, центр изгиба находится в точке  $c_b$  (рис. 11.16 а, д).

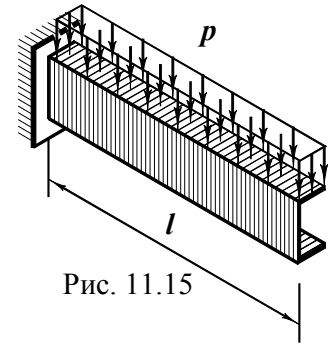


Рис. 11.15

Секториальные координаты при полюсе  $c_b$  и начале отсчета  $f$  (рис. 11.16 д):

– точка принадлежит стенке –  $\omega = (x_d - x_b) y$ :

$$\omega_2 = (-1,22 + 3,01) \cdot 4,62 = 8,26 \text{ см}^2, \quad \omega_3 = -8,26 \text{ см}^2;$$

– точка принадлежит верхней полке –  $\omega = \omega_2 - (x - x_1) y_2$ :

$$\omega_1 = 8,26 - (3,16 + 1,22) \cdot 4,62 = -11,98 \text{ см}^2;$$

– в нижней полке эпюра аналогична, но с обратным знаком.

Эпюра секториальных координат кососимметрична. Очевидно, что секториальный статический момент  $S_{\omega} = \int_A \omega dA = 0$ . Начало отсчета  $k_0$  следует принять в точке  $f$ .

Секториальный момент инерции:

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = 2 \int_0^{y_2} ((x_d - x_b) y)^2 \delta dy + 2 \int_{x_2}^{x_1} (\omega_2 - (x - x_1) y_2)^2 t dx =$$

$$= 2 \int_0^{4,62} ((-1,22 + 3,01)y)^2 0,45 dy + 2 \int_{-1,22}^{3,16} (8,26 - (x + 1,22)4,62)^2 0,76 dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем  $J_{\omega} = 345 \text{ см}^6$ .

Секториальный статический момент отсеченной части

$$S_{\omega}^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA:$$

– точка расположена в полке:  $S_{\omega}^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA = t \int_x^{x_1} (\omega_2 - (x - x_1) y_2) dx =$

$$= 0,76 \int_x^{3,16} (8,26 - (x + 1,22) \cdot 4,62) dx. \text{ После интегрирования имеем}$$

$$S_{\omega}^{ct} = -11,29 - 1,99x + 1,76x^2.$$

Секториальный статический момент всей полки  $S_{\omega}^{1-2} = -6,24 \text{ см}^4$ .

– точка расположена в стенке:  $S_{\omega}^{ct} = \int_{A_{ct}} \omega dA = S_{\omega}^{1-2} + \delta \int_y^{y_2} (x_d - x_b) y dy =$

$$= -6,24 + 0,45 \int_y^{4,62} (-1,22 + 3,01)y dy = 2,36 - 0,403y^2.$$

Статический момент отсеченной части  $S_x^{ct} = \int_{A_{ct}} y dA$ :

– точка расположена в полке:  $S_x^{ct} = \int_{A_{ct}} y dA = y_2 t \int_x^{x_1} dx = 4,62 \cdot 0,76 \int_x^{3,16} dx.$

После интегрирования имеем  $S_x^{ct} = 11,09 - 3,51x$ .

Статический момент всей полки  $S_x^{1-2} = 15,4 \text{ см}^3$ .

– точка принадлежит стенке:  $S_x^{ct} = S_x^{1-2} + \delta \int_y^{y_2} y dy = 15,4 + 0,45 \int_y^{4,62} y dy.$

В результате  $S_x^{ct} = 20,3 - 0,225y^2$ .

Момент инерции при свободном кручении (6.22), (11.7)

$$J_t = \sum_{i=1}^3 b_i \delta_i^3 / 3 = (2 \cdot 4,38 \cdot 0,76^3 + 9,24 \cdot 0,45^3) / 3 = 1,56 \text{ см}^4.$$

### 11.7.2. Дифференциальное уравнение углов поворота сечений. Решение уравнения

Момент внешней нагрузки относительно линии центров изгиба

$$M_{z_1} = -pb(b/2 - \delta/2 - x_b + x_d)(l - z) =$$

$$= -4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,6(4,6/2 - 0,45/2 + 3,01 - 1,22)(100 - z) = -7,11 \cdot 10^{-2}(100 - z) \text{ кНсм}.$$

Обозначим  $-M_{z_1}' = m$ . Из предыдущего равенства  $m = -7,11 \cdot 10^{-2} \text{ кН}$ .

Дифференциальное уравнение (11.12) примет вид

$$\varphi^{IV} - \alpha^2 \varphi'' = m / (EJ_{\omega}).$$

Его общее решение (11.14)  $\varphi = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + C_3 z + C_4 + \varphi_{par}$ .

При постоянной правой части частное решение ищем в виде

$\varphi_{par} = az^2$ . Подставив его в уравнение, находим  $a = -m / (2\alpha^2 EJ_{\omega})$ . Те-

перь  $\varphi = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + C_3 z + C_4 - mz^2 / (2\alpha^2 EJ_{\omega}),$

$$\varphi' = \alpha C_1 \text{ch}\alpha z + \alpha C_2 \text{sh}\alpha z + C_3 - mz / (\alpha^2 EJ_{\omega}),$$

$$\varphi'' = \alpha^2 C_1 \text{sh}\alpha z + \alpha^2 C_2 \text{ch}\alpha z - m / (\alpha^2 EJ_{\omega}),$$

$$\varphi''' = \alpha^3 C_1 \text{ch}\alpha z + \alpha^3 C_2 \text{sh}\alpha z.$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0;$$

$$\varphi' = 0 \text{ при } z = 0 \Rightarrow \alpha C_1 + C_3 = 0;$$

$$B = -EJ_{\omega} \varphi'' = 0 \text{ при } z = l \Rightarrow \alpha^2 C_1 \text{sh}\alpha l + \alpha^2 C_2 \text{ch}\alpha l - m / (\alpha^2 EJ_{\omega}) = 0;$$

$$EJ_{\omega} \varphi' - EJ_{\omega} \varphi''' = 0 \text{ при } z = l \Rightarrow \alpha^2 \varphi' - \varphi''' = 0 \Rightarrow C_3 - ml / (\alpha^2 EJ_{\omega}) = 0.$$

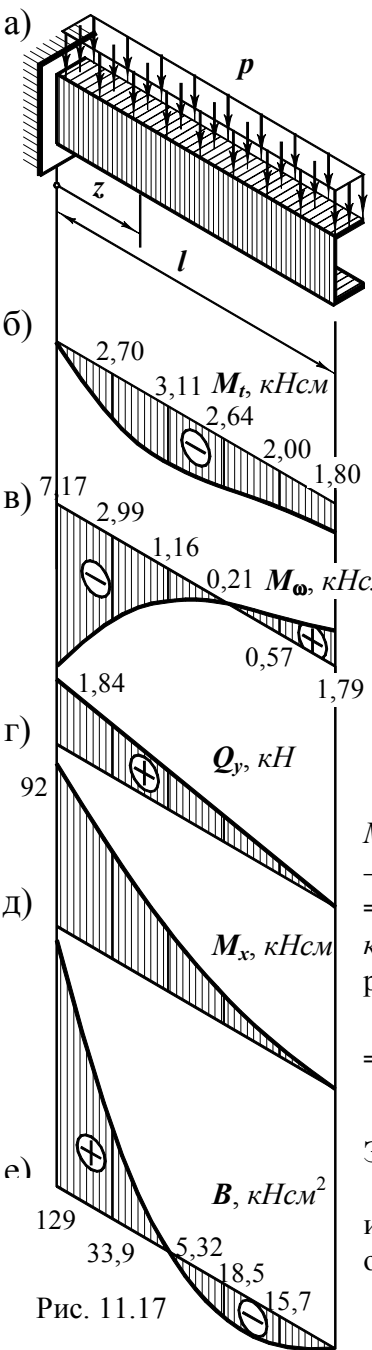
Решение этой системы:  $C_1 = -ml / (\alpha^3 EJ_{\omega});$

$$C_2 = m(1 + \alpha l \text{sh}\alpha l) / (\alpha^4 EJ_{\omega} \text{ch}\alpha l); \quad C_3 = ml / (\alpha^2 EJ_{\omega});$$

$$C_4 = -m(1 + \alpha l \text{sh}\alpha l) / (\alpha^4 EJ_{\omega} \text{ch}\alpha l).$$

Коэффициент (11.13)  $\alpha^2 = GJ_t / (EJ_{\omega}) = 8 \cdot 10^3 \cdot 1,56 / (2 \cdot 10^4 \cdot 345) = 1,809 \cdot 10^{-3} \text{ 1/см}^2$ . Отсюда:  $\alpha = 0,0425 \text{ 1/см}$ ;  $\alpha l = 0,0425 \cdot 100 = 4,25$ ;  $\text{sh}\alpha l = \text{sh}4,25 = 35,04$ ;  $\text{ch}\alpha l = 35,06$ . При этих значениях постоянные интегрирования равны:  $C_1 = 1,341 \cdot 10^{-2}$ ;  $C_2 = -1,351 \cdot 10^{-2}$ ;  $C_3 = -5,70 \cdot 10^{-4} \text{ 1/см}$ ;  $C_4 = 1,351 \cdot 10^{-2}$ .





Угол поворота сечения и его производные описываются выражениями  
 $\varphi = 1,341 \cdot 10^{-2} \text{sh}\alpha z - 1,351 \cdot 10^{-2} \text{ch}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} z + 1,351 \cdot 10^{-2} + 2,849 \cdot 10^{-6} z^2$ ,  
 $\varphi' = 5,699 \cdot 10^{-4} \text{ch}\alpha z - 5,742 \cdot 10^{-4} \text{sh}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} + 5,698 \cdot 10^{-6} z$ ,  
 $\varphi'' = 2,426 \cdot 10^{-5} \text{sh}\alpha z - 2,444 \cdot 10^{-5} \text{ch}\alpha z + 5,698 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $\varphi''' = 1,029 \cdot 10^{-6} \text{ch}\alpha z - 1,037 \cdot 10^{-6} \text{sh}\alpha z$ .

**11.7.3. Обобщенные усилия в стержне.**

**Напряжения в опасном сечении**  
 Нагрузка, изображенная на рис. 11.17 а, вызывает в сечениях стержня обобщенные силы:  
 $M_t$  – момент свободного кручения;  
 $M_\omega$  – изгибно-крутящий момент;  
 $Q_y$  – поперечную силу;  
 $M_x$  – изгибающий момент;  
 $B$  – бимомент.

Момент свободного кручения (6.25)  
 $M_t = GJ\varphi' = 8 \cdot 10^3 \cdot 1,56(5,699 \cdot 10^{-4} \text{ch}\alpha z - 5,742 \cdot 10^{-4} \text{sh}\alpha z - 5,70 \cdot 10^{-4} + 5,698 \cdot 10^{-6} z) = 7,112 \text{ch}\alpha z - 7,166 \text{sh}\alpha z - 7,114 + 7,111 \cdot 10^{-2} z$  кНсм. Эпюра момента изображена на рис. 11.17 б.

Изгибно-крутящий момент  $M_\omega = M_{z_1} - M_t$  по равенству (11.8) –

$M_\omega = 7,166 \text{sh}\alpha z - 7,112 \text{ch}\alpha z$  кНсм. Эпюра  $M_\omega$  приведена на рис. 11.17 в.

Поперечная сила  $Q_y$  (рис. 11.17 г) и изгибающий момент  $M_x$  (рис. 11.17 д) определяются из условий равновесия:

$$Q_y = pb(l-z) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4,6(100-z) = 1,84 \cdot 10^{-2}(100-z) \text{ кН}.$$

$$M_x = pb(l-z)^2/2 = 1,84 \cdot 10^{-2}(100-z)^2/2 \text{ кНсм}.$$

$$\text{Бимомент (11.4) } B = -EJ_\omega \varphi'' = -2 \cdot 10^4 \cdot 345(2,426 \cdot 10^{-5} \text{sh}\alpha z - 2,444 \cdot 10^{-5} \text{ch}\alpha z + 5,698 \cdot 10^{-6}) = 168,6 \text{ch}\alpha z - 167,4 \text{sh}\alpha z - 39,3 \text{ кНсм}^2$$

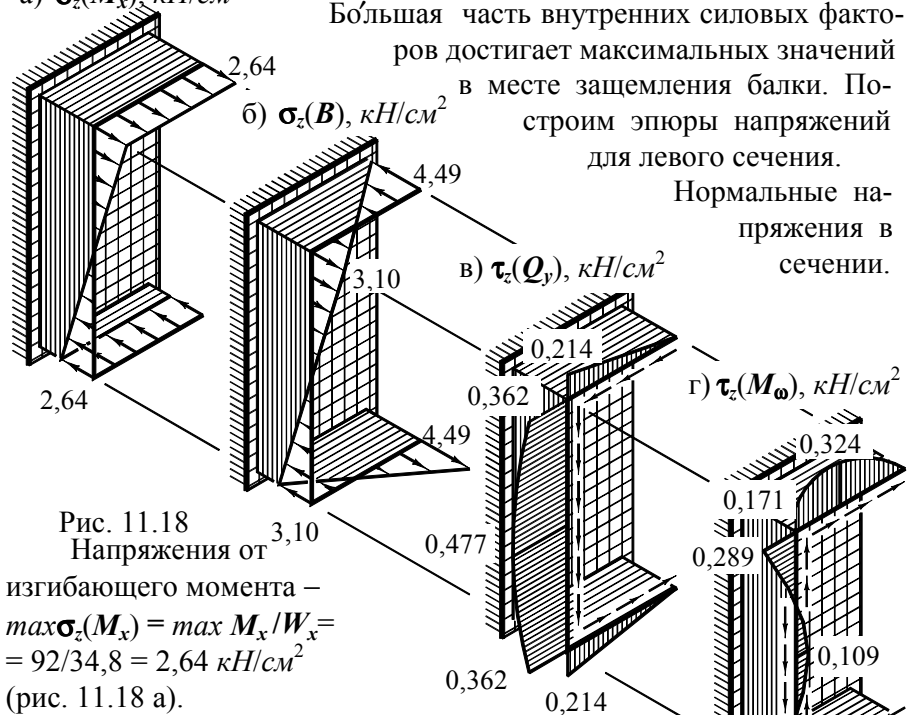


Рис. 11.18 Напряжения от изгибающего момента –  $\max \sigma_z(M_x) = \max M_x/W_x = 92/34,8 = 2,64 \text{ кН/см}^2$  (рис. 11.18 а).

Напряжения от бимомента (рис. 11.18 б):  
 – точка 1:  $\sigma_z^1 = B\omega_1/J_\omega = 129,3(-11,98)/345 = -4,49 \text{ кН/см}^2$  – сжимающие; в точке 4 они такие же по величине, но растягивающие.

– точка 2:  $\sigma_z^2 = B\omega_2/J_\omega = 129,3 \cdot 8,26/345 = 3,10 \text{ кН/см}^2$ ;  $\sigma_z^3 = -\sigma_z^2(B)$ .

Касательные напряжения.  
 Напряжения от поперечной силы (рис. 11.18 в):  
 – точка 2:  $\tau_{zx} = Q_y S_x^{\text{ct}}/(J_x \delta)$ ;  $S_x^{\text{ct}} = S_x^{1-2} = 15,4 \text{ см}^3$ ;  $\tau_{zx} = 1,84 \cdot 15,4 / (174 \cdot 0,76) = 0,214 \text{ кН/см}^2$ ;  $\tau_{zy} = Q_y S_x^{\text{ct}}/(J_x \delta)$ ;  $\tau_{zy} = 1,84 \cdot 15,4 / (174 \cdot 0,45) = 0,362 \text{ кН/см}^2$ .

– максимальные напряжения в точках оси x:  $\max \tau_{zy} = Q_y S_x^{\text{ct}} / (J_x \delta)$ ;  $S_x^{\text{ct}} = 20,3 \text{ см}^3$ ;  $\tau_{zx} = 1,84 \cdot 20,3 / (174 \cdot 0,45) = 0,477 \text{ кН/см}^2$ .

Напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 11.18 г):

– точка расположена в полке:

$$\tau_{zx} = M_{\omega} S_{\omega}^{ct} / (J_{\omega} t); S_{\omega}^{ct} = -11,29 - 1,99x + 1,76x^2, \max S_{\omega}^{ct} = 11,85 \text{ см}^4;$$
$$\max \tau_{zx} = -7,166 \cdot 11,85 / (345 \cdot 0,76) = -0,324 \text{ кН/см}^2;$$

в точке 2  $\tau_{zx} = -7,166 \cdot 6,24 / (345 \cdot 0,76) = -0,171 \text{ кН/см}^2$ ;

– точка принадлежит стенке:

$$\tau_{zy} = M_{\omega} S_{\omega}^{ct} / (J_{\omega} \delta); S_{\omega}^{ct} = 2,36 - 0,403y^2;$$

в точке 2  $S_{\omega}^{ct} = 6,24 \text{ см}^4$ ,  $\tau_{zy} = -7,166 \cdot (-6,24) / (345 \cdot 0,45) = 0,289 \text{ кН/см}^2$ ;

напряжения в точках оси  $x$   $\tau_{zy} = -7,166 \cdot 2,36 / (345 \cdot 0,45) = -0,109 \text{ кН/см}^2$ .

В рассмотренном сечении швеллера момент чистого кручения равен нулю. Для полноты анализа подсчитаем касательные напряжения  $\max \tau_z(M_t)$  в сечении с  $\max M_t$ :

$$\max \tau_z(M_t) = \max M_t \delta_{max} / J_t = 3,11 \cdot 0,76 / 1,56 = 1,52 \text{ кН/см}^2.$$

Напряжения невелики. В месте защемления напряженное состояние опаснее.

Изложенная техническая теория, построенная на более общих предпосылках, обнаруживает качественно новые эффекты в распределении напряжений по сечению и деформировании тонкостенного стержня открытого профиля. В результате она позволяет прогнозировать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций на более высоком теоретическом уровне.

## 12. Устойчивость

### 12.1. Понятие устойчивости

Термин "устойчивость" используется практически во всех областях естествознания. Устойчивость

- движения планет, космических кораблей, ракет и самолетов;
- электронных оболочек атома;
- ламинарного течения жидкости;
- высокотемпературной плазмы;
- биологической клетки;
- системы автоматического регулирования и энергетических систем.

Этот далеко не полный перечень показывает, как широк диапазон применения понятия устойчивости.

В сопротивлении материалов рассматривается устойчивость тех процессов и состояний, которые изучаются в этой дисциплине, – устойчивость *деформированных состояний и равновесия*.

Реальные объекты и их расчетные схемы отличаются друг от друга. В природе не существует идеально упругих тел, абсолютно прямых стержней, статических состояний. Введение этих понятий обусловлено желанием доступными средствами установить связи между наиболее существенными характеристиками внешнего воздействия и параметрами состояния системы. А так как в реальных условиях всегда есть причины, побуждающие к отклонениям от рассматриваемых гипотетических состояний, возникает вопрос о реакции конструкции на малые возмущения внешнего воздействия. Задачи подобного рода рассматриваются в теориях устойчивости.

Под устойчивостью будем понимать способность системы сохранять свое состояние при малых возмущающих воздействиях.

Если малые возмущения вызывают малые отклонения от рассматриваемого состояния или не вызывают их вообще, состояние устойчиво.

Оценивая устойчивость, нельзя говорить о системе вообще. Следует иметь в виду вполне определенное состояние этой системы. Кроме того, необходимо ясно определиться, по отношению к какому классу возмущений проверяется устойчивость. Так например, равновесие весомого шарика на идеально гладкой кривой поверхности (рис. 12.1) в случаях

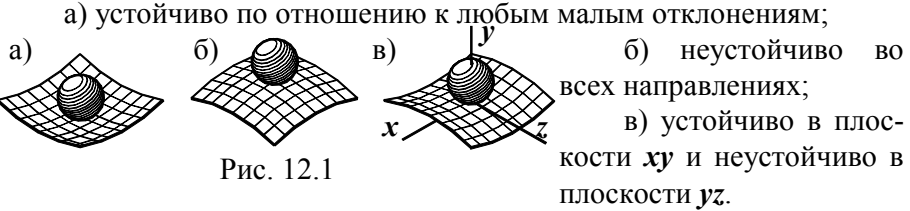


Рис. 12.1

От содержания, вкладываемого в каждом частном случае в понятие устойчивости, зависит выбор метода решения задачи и толкование результатов. Из практики исследований и расчетов конструкций известны случаи, когда нечеткая трактовка задачи приводила к ошибкам в ее решении. Поэтому вопрос об устойчивости выходит за рамки методической, логической и дидактической сфер.

**12.2. Устойчивость прямолинейной формы равновесия центрально сжатого упругого стержня (вывод формулы Эйлера)**

Рассмотрим прямой стержень, сжатый центральной силой  $F$  (рис. 12.2).

Допустим, что от случайного воздействия в стержне появились малые прогибы  $v$ , а вместе с ними и изгибающие моменты  $M_x = -Fv$  (минус – результат правил знаков для моментов и прогибов). При искривлении оси возникает момент упругих сил  $M_{xe} = EJ_x v''$ .  $M_x$  и  $M_{xe}$  – противоборствующие факторы. Первый стремится изгибать стержень, второй – выпрямлять.

Если в некотором сечении стержня  $EJ_x v'' > -Fv$ , то случайно появившаяся кривизна уменьшится. Равновесие стержня в изогнутом положении возможно тогда, когда во всех сечениях будет соблюдаться равенство  $EJ_x v'' = -Fv$ .

Введем обозначение

$$F/(EJ_x) = k^2. \tag{а}$$

Теперь условие равновесия изогнувшегося стержня принимает вид

$$v'' + k^2 v = 0. \tag{б}$$

Задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия свелась к однородному дифференциальному уравнению второго порядка.

Обратим внимание на своеобразие математической формулировки задачи. Нас интересует такое значение силы  $F = F_{cr}$  (она содержится в коэффициенте  $k$ ), при котором сохранится равновесие изогнувшегося стержня. Задача ставится так: найти значение  $k$  и вид функции  $v(z) \neq 0$ , при которых удовлетворяется уравнение (б).

Общее решение уравнения (б) имеет вид  $v = C_1 \text{sink}z + C_2 \text{cosk}z$ . Условия закрепления стержня таковы, что при  $z = 0$  и при  $z = l$  прогиб  $v = 0$ . Из первого условия находим:  $C_2 = 0$  и, следовательно,

$$v = C_1 \text{sink}z. \tag{в}$$

Второе условие приводит к равенству  $C_1 \text{sink}l = 0$ . Оно имеет два качественно различных решения:  $C_1 = 0$  и  $\text{sink}l = 0$ . В первом случае из равенства (в) следует, что  $v \equiv 0$ . Этот вариант не соответствует поставленной задаче, и его отбрасываем. Из второго решения находим:  $kl = n\pi$ , где  $n$  – любое целое число. Учитывая обозначение (а), получаем

$$F_{cr} = n^2 \pi^2 EJ_x / l^2. \tag{г}$$

Практическое значение имеет наименьшая отличная от нуля величина силы  $F_{cr}$ , которая отвечает  $n = 1$ :

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_x / l^2. \tag{12.1}$$

Эта сила носит название критической или эйлеровой<sup>1</sup> силы.

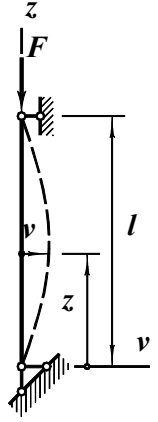


Рис. 12.2

<sup>1</sup> Формула (12.1) была получена в 1744 г. великим математиком Л.Эйлером.

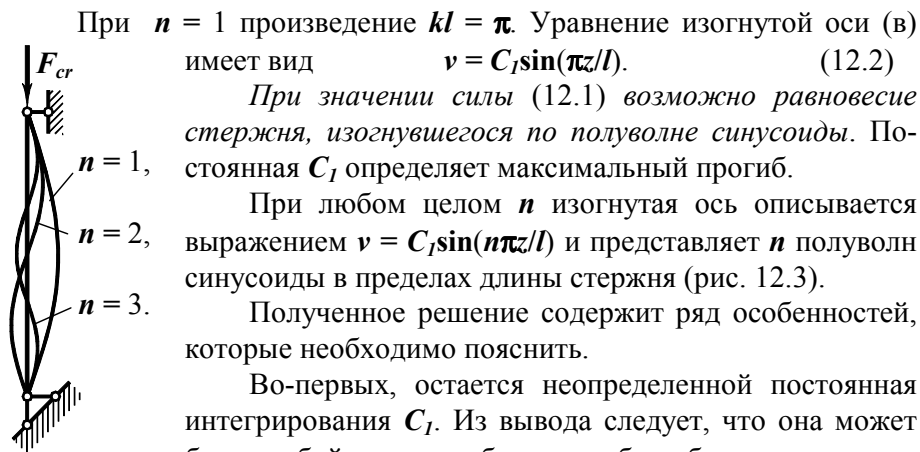


Рис. 12.3

При  $n = 1$  произведение  $kl = \pi$ . Уравнение изогнутой оси (в) имеет вид  $v = C_1 \sin(\pi z/l)$ . При значении силы (12.1) возможно равновесие стержня, изогнувшегося по полуволне синусоиды. Постоянная  $C_1$  определяет максимальный прогиб.

При любом целом  $n$  изогнутая ось описывается выражением  $v = C_1 \sin(n\pi z/l)$  и представляет  $n$  полуволн синусоиды в пределах длины стержня (рис. 12.3). Полученное решение содержит ряд особенностей, которые необходимо пояснить. Во-первых, остается неопределенной постоянная интегрирования  $C_1$ . Из вывода следует, что она может быть любой – при любом прогибе соблюдается равенство моментов сил упругости и критической силы.

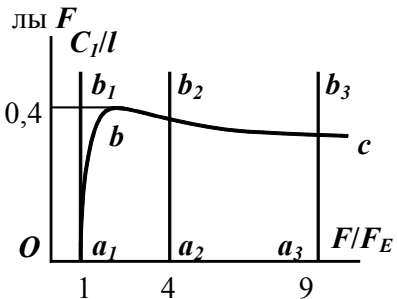


Рис. 12.4

Таким образом, полученное решение описывает лишь форму потери устойчивости, не выявляя зависимости прогиба от величины сжимающей силы.

Второй особенностью полученного решения является совершенно нереальное отражение закритического поведения стержня. Действительно, результат (г) устанавливает бесчисленное множество критических значений сжимающей силы, соответствующих  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При этих значениях стержень может находиться в равновесии, будучи изогнутым. При величинах же силы, отличных от (г), произведение  $kl \neq n\pi$  и, следовательно,  $C_1 = 0$  – стержень прямой. Отмеченные особенности означают, что в процессе возрастания силы стержень

- вначале остается прямым (участок  $Oa_1$  на рис. 12.4),
- при первом критическом значении силы изгибается по одной полуволне синусоиды с произвольным по величине прогибом (прямая  $a_1b_1$ ),
- при дальнейшем увеличении нагрузки вновь выпрямляется ( $a_1a_2$ ).

длит прогиб по двум полуволнам, и снова стержень выпрямляется с ростом силы. Такое поведение стержня противоречит не только опыту, но и здравому смыслу.

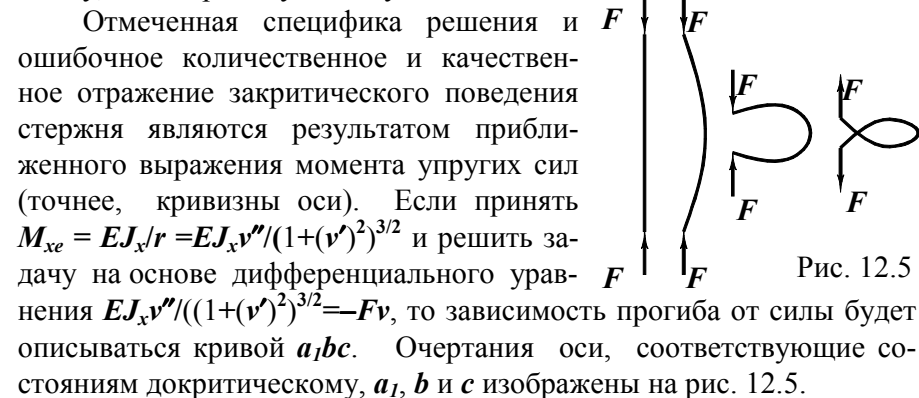


Рис. 12.5

Отмеченная специфика решения и ошибочное количественное и качественное отражение закритического поведения стержня являются результатом приближенного выражения момента упругих сил (точнее, кривизны оси). Если принять  $M_{xe} = EJ_x/r = EJ_x v'' / (1 + (v')^2)^{3/2}$  и решить задачу на основе дифференциального уравнения  $EJ_x v'' / (1 + (v')^2)^{3/2} = Fv$ , то зависимость прогиба от силы будет описываться кривой  $a_1bc$ . Очертания оси, соответствующие состояниям докритическому,  $a_1, b$  и  $c$  изображены на рис. 12.5.

Таким образом, полученное решение задачи об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня верно отражает поведение стержня в докритической стадии, правильно описывает форму потери устойчивости и дает критическое значение силы. Поэтому оно вполне приемлемо для расчетов сжатых элементов конструкций. Отмеченные же недостатки относятся к той области работы, которая в реальных сооружениях обычно не допускается.

### 12.3. Зависимость критического значения силы от условий закрепления стержня

Формула (12.1) выведена для стержня с шарнирными опорами на концах. Необходимо охватить и иные условия закрепления.

Для каждой конкретной схемы задача о критическом значении сжимающей силы может быть решена аналогично описанному выше. В то же время критическую силу можно найти по механико-геометрической аналогии, минуя процедуру составления и решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим, например, стержень, зашпеленный одним концом (рис. 12.6 а). Его ось, изогнувшуюся при потере устойчивости, можно привести зеркальным отражением к виду, изображенному на рис. 12.6 б.

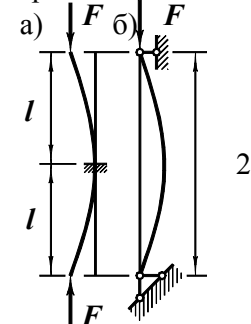


Рис. 12.6

Критические силы у зашпеленного стержня длиной  $l$  и у шарнирно закрепленного длиной  $2l$  одинаковы. Подставив в формулу (12.1)  $2l$  вместо  $l$ , получаем  $F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (2l)^2$ .

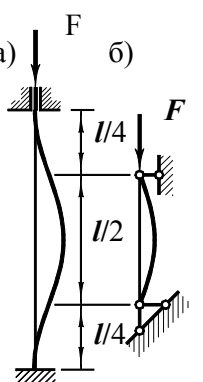


Рис. 12.7

Рассмотрим еще одну схему (рис. 12.7 а). Средняя часть стержня длиной  $l/2$  будет в таких же условиях, как стержень с шарнирными опорами (в точках перегиба моменты равны нулю). Заменяв в формуле (12.1)  $l$  на  $l/2$ , получим  $F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (l/2)^2$ .

Поступая аналогично при других условиях закрепления и обобщая формулы, запишем формулу критической силы в виде

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_x / (\mu l)^2 \tag{12.3}$$

Это обобщенная формула Эйлера для критической силы. В формуле:

$E$  – модуль упругости материала;

$J_x$  – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба;

$l$  – длина стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины.

Произведение  $\mu l$  носит название *приведенной длины*.

На рис. 12.8 показано несколько видов закрепления стержней и даны соответствующие им коэффициенты приведения длины.

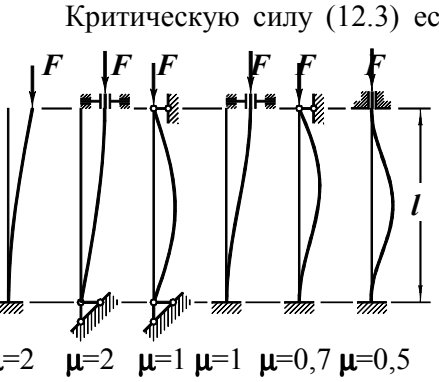


Рис. 12.8

Критическую силу (12.3) естественно следует классифицировать как предельную, определяющую несущую способность сжатого стержня. Полученный результат обнаруживает весьма своеобразную связь критической силы с механическими и геометрическими параметрами стержня. Из формулы (12.3) видно, что критическое значение сжимающей силы

– пропорционально изгибной жесткости,

которая в расчетах на прочность при сжатии не фигурирует;

– обратно пропорционально квадрату длины, которая также не влияет на напряжения при сжатии;

– не зависит от характеристик прочности материала (так, например, два геометрически одинаковых стержня – один из малоуглеродистой стали, другой из высокопрочной потеряют устойчивость при равных силах, поскольку модуль упругости у них практически одинаков). Последний вывод, впрочем, справедлив, если потеря устойчивости происходит при упругих деформациях. Ниже это будет показано.

### 12.4. Пределы применимости формулы Эйлера

До критического состояния сжатый стержень остается прямым. Напряжения в сечениях стержня распределены равномерно. В момент потери устойчивости они равны  $\sigma_{cr} = F_{cr} / A$ . Преобразуем это равенство с помощью формулы (12.3):

$$\sigma_{cr} = F_{cr} / A = \pi^2 EJ_x / ((\mu l)^2 A)$$

Учитывая, что  $J_x / A = i^2$  (10.8), можно записать  $\sigma_{cr} = \pi^2 E i^2 / (\mu l)^2$ .

Обозначим

$$\mu l / i = \lambda \tag{12.4}$$

Здесь  $\lambda$  – безразмерная величина, называемая *гибкостью стержня*. После обозначения (12.4) приходим к выражению

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 \tag{12.5}$$

которое называют *формулой Эйлера для критического напряжения*.

При выводе формулы Эйлера использован закон Гука (моменту сжимающей силы противопоставлен момент упругих сил). Следовательно, формулы (12.1), (12.3) и (12.5) применимы, если потеря устойчивости происходит при упругих деформациях стержня. Область справедливости обсуждаемых результатов ограничивается условием  $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$ , где  $\sigma_{pr}$  – предел пропорциональности материала.

Для удобства практического пользования это условие обычно записывают в ином виде, преобразованном с помощью формулы (12.5):  $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{pr}$ . Отсюда  $\lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_{pr}}$ . Обозначив

$$\pi \sqrt{E / \sigma_{pr}} = \lambda_u \tag{12.6}$$

получаем ограничение на гибкость стержня –

$$\lambda \geq \lambda_u \tag{12.7}$$

Фигурирующая в выражениях (12.6) и (12.7)  $\lambda_u$  носит название *предельной гибкости*.

Стержни, гибкость которых удовлетворяет условию (12.7), называют **стержнями большой гибкости**. При оценке их устойчивости можно использовать формулы Эйлера. В стержнях меньшей гибкости потеря устойчивости сопровождается пластическими деформациями. Критическую силу для стержней малой гибкости определяют иначе.

Как видно по равенству (12.6) предельная гибкость зависит от модуля упругости и предела пропорциональности, а следовательно, не только от материала, но и от его марки. Для некоторых материалов и их марок величины  $\lambda_{ли}$  приведены в справочных таблицах. Однако многие из таблиц устарели и в приближенных практических расчетах можно принять  $\sigma_{пр} \approx R_c$ . Тогда возможность использования формулы Эйлера будет ограничена условием (12.7) при

$$\lambda_{ли} = \pi\sqrt{E/R_c} \quad (12.8)$$

Так например, у стали 18 кп, модуль упругости которой  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, а расчетное сопротивление на сжатие  $R_c = 220$  МПа; предельная гибкость  $\lambda_{ли} = \pi\sqrt{E/R_c} = 3,14\sqrt{2 \cdot 10^5/220} = 95$ . Аналогично можно найти предельные гибкости  $\lambda_{ли}$  для других материалов и их марок.

## 12.5. Экспериментальные данные о потере устойчивости за пределом упругости.

### Эмпирическая формула

12.5.1. Как отмечено выше, формулы Эйлера справедливы, если критическое напряжение не превосходит предела пропорциональности. Между тем элементы реальных конструкций не всегда удовлетворяют условию (12.7). Поэтому необходимо исследование устойчивости при неупругих деформациях.

Результаты опытов (рис. 12.9) показывают, что при потере устойчивости в упругой стадии экспериментальные точки ложатся близко к гиперболе Эйлера (12.5), чем подтверждают ее достаточную точность (определяющий критическое напряжение модуль упругости – сравнительно стабильная константа). У стержней же, теряющих устойчивость при пластических

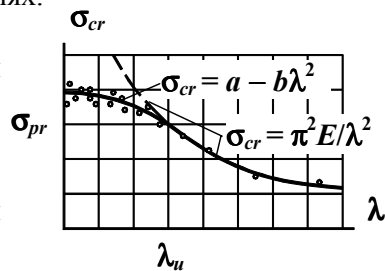


Рис. 12.9

деформациях, экспериментальные результаты сильно разбросаны (это объясняется разбросом диаграмм сжатия) и расположены значительно ниже гиперболы (12.5) (диаграммы сжатия в упруго-пластической стадии расположены значительно ниже прямой Гука).

12.5.2. Для расчетов на устойчивость при неупругих деформациях разными авторами предложены различные эмпирические формулы, основанные на подборе кривых, приближающихся к результатам опытов. Вполне приемлема из них

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda^2, \quad (12.9)$$

где  $a$  и  $b$  – константы, имеющие размерность напряжения.

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  обычно приводят в справочниках по устойчивости. Однако с появлением новых материалов такие справочники не удовлетворяют практические запросы. В приближенных расчетах можно принять  $a = R_{nc}$  (нормативному сопротивлению на сжатие); коэффициент  $b$  найти из условия равенства критических напряжений по формулам (12.5) и (12.9) при предельной гибкости:  $\sigma_{cr} = a - b\lambda_{ли}^2 = R_{nc} - b\lambda_{ли}^2 = \pi^2 E / \lambda_{ли}^2 = R_c$ , откуда

$$b = (R_{nc} - R_c) / \lambda_{ли}^2. \quad (12.10)$$

К недостаткам эмпирических формул следует отнести прежде всего необходимость проведения серии опытов на устойчивость, требующих тщательной постановки испытаний и более сложных установок и образцов. Кроме того, из-за большого разброса диаграмм сжатия требуется большое количество испытаний для статистически достоверного обобщения.

С целью иллюстраций изложенной части теории рассмотрим примеры.

**Пример 12.1.** Стержень (рис. 12.10) сжат силой  $F$ . Длина стержня  $l = 4,8$  м, сечение кольцо с  $D = 100$  мм и  $d = 80$  мм; материал – сталь 18 кп. Найдём критическое значение сжимающей силы.

Осевой момент инерции сечения  $J = \pi D^4(1 - (d/D)^4)/64 = 3,14 \cdot 10^4(1 - 0,8^4)/64 = 290$  см<sup>4</sup>; площадь  $A = \pi D^2(1 - (d/D)^2)/4 = 3,14 \cdot 10^2(1 - 0,8^2)/4 = 28,3$  см<sup>2</sup>; радиус инерции  $i = \sqrt{J/A} = \sqrt{290/28,3} = 3,21$  см.

По рис. 12.8 коэффициент приведения длины  $\mu = 0,7$ . Тогда гибкость  $\lambda = \mu l / i = 0,7 \cdot 480 / 3,21 = 105$ . Она больше предельной

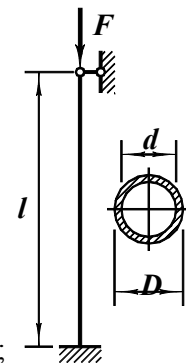
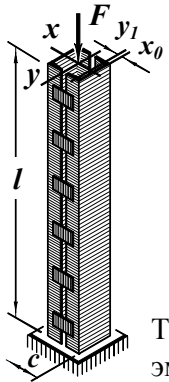


Рис. 12.10

гибкости (см. пример к формуле (12.8), где  $\lambda_u = 95$ ). Для вычисления критической силы можно использовать формулу Эйлера (12.3)  $F_{cr} = \pi^2 EJ / (\mu l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 290 / (0,7 \cdot 480)^2 = 506 \text{ кН}$ .

**Пример 12.2.** Стойка, составленная из двух швеллеров № 27 (рис. 12.11) при  $c = 25 \text{ см}$ , несет груз  $F = 1,6 \text{ МН}$ . Высота  $l = 3 \text{ м}$ ; материал сталь 09Г2. Найдем коэффициент запаса устойчивости  $n_{st}$ .



Радиусы инерции сечения:  $i_x = 10,9 \text{ см}$ ;  
 $i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{2(J_{y1} + (c/2 - x_0)^2 A_1) / (2A_1)} = \sqrt{i_{y1}^2 + (c/2 - x_0)^2} = \sqrt{2,73^2 + (25/2 - 2,47)^2} = 10,4 \text{ см}$ .

Большая гибкость  $\lambda_{max} = \mu l / i_{min} = 2 \cdot 300 / 10,4 = 57,7$ .

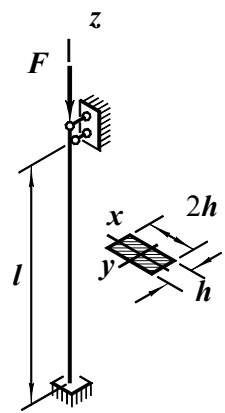
По формуле (12.8) предельная гибкость

$$\lambda_u = \pi \sqrt{E / R_c} = 3,14 \sqrt{2 \cdot 10^5 / 305} = 80,4.$$

Так как  $\lambda_{max} < \lambda_u$ , критическое напряжение определяем по эмпирической формуле (12.9)  $\sigma_{cr} = a - b\lambda^2$ :  $a = R_{nc} = 315 \text{ МПа}$ , по равенству (12.10)  $b = (R_{nc} - R_c) / \lambda_u^2 = (315 - 305) / 80,4^2 = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$ . Теперь  $\sigma_{cr} = 315 - 1,55 \cdot 10^{-3} \cdot 57,7^2 = 310 \text{ МПа}$ .

Критическая сила  $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 31 \cdot 2 \cdot 35,2 = 2180 \text{ кН}$ . Коэффициент запаса устойчивости  $n_{st} = F_{cr} / F = 2180 / 1600 = 1,36$ .

**Пример 12.3.** Стержень закреплен, как показано на рис. 12.12: в плоскости  $zy$  защемление внизу и скользящая заделка вверху; в плоскости  $zx$  нижний конец также защемлен, верхний же свободен. Материал стержня сосна; размеры:  $l = 1,2 \text{ м}$ ;  $h = 6 \text{ см}$ . Найдем допустимую нагрузку с коэффициентом запаса устойчивости  $n_{st} = 3$ .



Гибкости стержня.

Плоскость  $zy$ . Радиус инерции  $i_x = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{2hh^3 / (12 \cdot 2hh)} = h / \sqrt{12} = 6 / 3,46 = 1,73 \text{ см}$ . Гибкость  $\lambda_{zy} = \mu_{zy} l / i_x = 0,5 \cdot 120 / 1,73 = 34,7$ .

Плоскость  $zx$ . Радиус инерции  $i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{h(2h)^3 / (12 \cdot 2hh)} = 2h / \sqrt{12} = 2 \cdot 6 / 3,46 = 3,46 \text{ см}$ .

Гибкость  $\lambda_{zx} = \mu_{zx} l / i_y = 2 \cdot 120 / 3,46 = 69,4$ . Так как  $\lambda_{zx} > \lambda_{zy}$ , расчет ведем для плоскости  $zx$ .

Найдем предельную гибкость  $\lambda_u$  (12.8). У сосны  $E = 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 13 \text{ МПа}$ :

$$\lambda_u = \pi \sqrt{E / R_c} = 3,14 \sqrt{10^4 / 13} = 87.$$

Поскольку  $\lambda_{zx} < 87$ , используем формулу (12.9).

Рис. 12.12

Примем  $a = R_{nc} = 30 \text{ МПа}$ ;  $b = (R_{nc} - R_c) / \lambda_u^2 = (30 - 13) / 87^2 = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}$ . Критическое напряжение  $\sigma_{cr} = a - b\lambda^2 = 30 - 2,25 \cdot 10^{-3} \cdot 69,4^2 = 19,2 \text{ МПа}$ . Критическая сила  $F_{cr} = \sigma_{cr} A = 1,92 \cdot 6 \cdot 12 = 138 \text{ кН}$ .

Допустимое значение сжимающей силы при заданном трехкратном запасе устойчивости  $[F] = F_{cr} / n_{st} = 138 / 3 = 46 \text{ кН}$ .

## 12.6. Критическое значение сжимающей силы при потере устойчивости за пределом упругости.

### Теория приведенного модуля

Задача о критическом значении силы, сжимающей упругопластический стержень, рассматривалась различными авторами с разных позиций. До сих пор не сформировалась единая точка зрения о процессе потери устойчивости сжатого элемента конструкции, происходящей за пределом упругости. Рассмотрим одно из наиболее признанных решений задачи<sup>1</sup>.

Шарнирно закрепленный стержень (рис. 12.13 а) с диаграммой сжатия материала, изображенной на рис. 12.13 б, подвержен силе  $F_{cr}$ . В результате случайного воздействия стержень получил малое отклонение от прямолинейной формы. Найдем значение сжимающей силы, способной удержать стержень в изогнутом состоянии.

Пока стержень был прямым, напряжения в его поперечных сечениях были распределены равномерно. Перед изгибом они имели значение  $\sigma_{cr}$  (рис. 12.13 в). На диаграмме сжатия (рис. 12.13 б) это состояние стержня характеризуется точкой  $a$ .

Рассмотрим поперечное сечение произвольного положения. Из-за искривления оси стержня в сечении возникает изгибающий момент. В одной части сечения напряжения возрастут на  $\Delta\sigma_c$ , в другой уменьшатся на  $\Delta\sigma_t$ . Вместе с ними изменятся и продольные деформации волокон.

В соответствии с гипотезой плоских сечений (рис. 12.13 в; см. также формулу (7.1))  $\Delta\epsilon_c = \Delta\epsilon_t = \Delta\epsilon = y_1 / r = y_1 \nu''$ . (а)

В той части сечения  $A_c$ , где сжимающие напряжения и деформации возрастают,  $\Delta\sigma_c = \text{tg} \alpha_{tg} \cdot \Delta\epsilon$ . (б)

<sup>1</sup> Описываемое здесь решение впервые предложено в 1895 г. Ф.С.Ясинским, профессором Петербургского института инженеров путей сообщения.

Если же напряжения уменьшаются (это происходит в части сечения  $A_t$ ), то по закону упругой разгрузки  $\Delta\sigma_t = \text{tg}\alpha \cdot \Delta\varepsilon$ . (в)

Учитывая, что  $\text{tg}\alpha = E$ , введем обозначение  $\text{tg}\alpha_{\text{tg}} = E_{\text{tg}}$  и будем называть его *касательным модулем*. Используя введенное обозначение и равенство (а), запишем выражения (б) и (в) так:

$$\Delta\sigma_c = E_{\text{tg}} y_l v'', \quad \Delta\sigma_t = E y_l v''. \quad (\text{г})$$

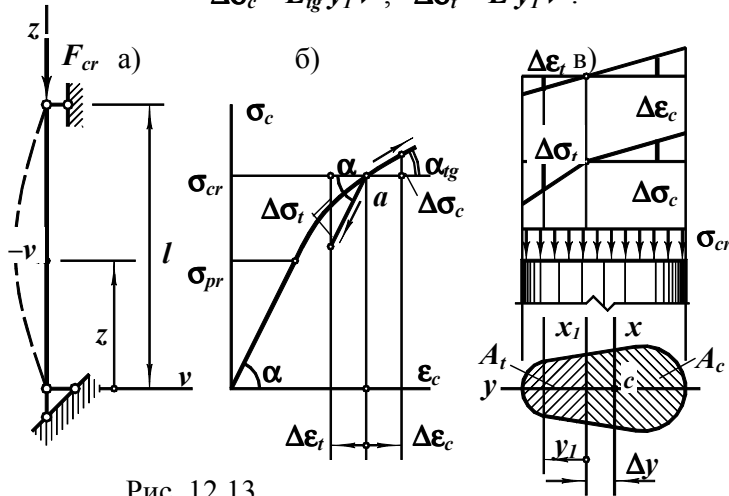


Рис. 12.13

Допустим, что при изгибе стержня сжимающая сила не изменилась. Тогда равнодействующая дополнительных напряжений равна нулю:

$$\Delta N = \int_A \Delta\sigma dA = \int_{A_c} \Delta\sigma_c dA + \int_{A_t} \Delta\sigma_t dA = E_{\text{tg}} v'' \int_{A_c} y_l dA + E v'' \int_{A_t} y_l dA = v'' (E_{\text{tg}} S_c + E S_t) = 0.$$

Отсюда следует, что  $E_{\text{tg}} S_c + E S_t = 0$ . (12.11)

Здесь  $S_c$  и  $S_t$  — статические моменты догружаемой и разгружаемой частей сечения относительно оси  $x_l$ , разделяющей их. Из равенства (12.11) может быть найдено положение оси  $x_l$  (отрезок  $\Delta y$ ). Решение уравнения (12.11) зависит от формы сечения, а также от величины напряжения. Имея равенство (12.11), будем считать, что положение оси  $x_l$  известно.

Равновесие изогнутого стержня возможно, если моменты внешних и внутренних сил равны. Приравняем моменты сил, приложенных к части стержня длиной  $z$ , относительно оси  $x_l$ :

$$F_{cr}(-v + \Delta y) = \sigma_{cr} A \Delta y + \int_A \Delta\sigma y_l dA = 0.$$

Учитывая, что  $F_{cr} = \sigma_{cr} A$ , и разбив интеграл по площади  $A$  на два — по  $A_c$  и  $A_t$ , находим:  $\int_{A_c} \Delta\sigma_c y_l dA + \int_{A_t} \Delta\sigma_t y_l dA + F_{cr} v = 0$ . Подставим в полученное уравнение равенства (г):

$$E_{\text{tg}} v'' \int_{A_c} y_l^2 dA + E v'' \int_{A_t} y_l^2 dA + F_{cr} v = v'' (E_{\text{tg}} J_{x_l}^c + E J_{x_l}^t) + F_{cr} v = 0.$$

Здесь  $J_{x_l}^c$  и  $J_{x_l}^t$  — моменты инерции догружаемой и разгружаемой частей сечения относительно оси  $x_l$ . Итак,

$$v'' (E_{\text{tg}} J_{x_l}^c + E J_{x_l}^t) + F_{cr} v = 0.$$

Поделим левую часть полученного уравнения на  $J_x$  и обозначим

$$(E_{\text{tg}} J_{x_l}^c + E J_{x_l}^t) / J_x = E_{\text{red}}. \quad (12.12)$$

$E_{\text{red}}$  носит название *приведенного модуля*. С учетом введенного обозначения дифференциальное уравнение равновесия принимает вид  $v'' + F_{cr} v / (E_{\text{red}} J_x) = 0$ . Решение уравнения, подобного полученному, и анализ результатов детально рассмотрены в разд. 12.2. Поэтому, не повторяя математических выкладок, запишем обобщенный итог:

$$F_{cr} = \pi^2 E_{\text{red}} J_x / (\mu l)^2; \quad \sigma_{cr} = \pi^2 E_{\text{red}} / \lambda^2. \quad (12.13)$$

Формулы (12.13), определяющие значения критической силы и напряжения, аналогичны формулам Эйлера. Но сюда входит не обычный, а приведенный модуль.

**Пример 12.4.** Порядок определения приведенного модуля проиллюстрируем примером прямоугольного сечения (рис. 12.14).

Равенство (12.11) для этого типа сечения запишется так:  $E_{\text{tg}} (h/2 + \Delta y)^2 / 2 = E (h/2 - \Delta y)^2 / 2$ . Далее,  $J_{x_l}^c = b (h/2 + \Delta y)^3 / 3$ ,  $J_{x_l}^t = b (h/2 - \Delta y)^3 / 3$ ;

$$J_x = b h^3 / 12.$$

Выражение (12.12) после подстановки полученных равенств и исключения  $\Delta y$  примет вид

$$E_{\text{red}} = 4 E E_{\text{tg}} / (\sqrt{E} + \sqrt{E_{\text{tg}}})^2. \quad (12.14)$$

Вычисления приведенного модуля показали, что влияние формы сечения на него невелико. Поэтому формулу (12.14) можно использовать для сечений других форм.

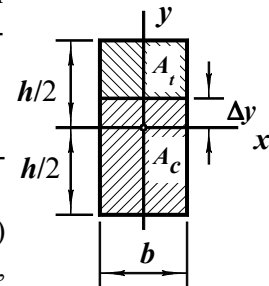


Рис. 12.14



Величина приведенного модуля зависит от критического напряжения (через касательный модуль). Если  $\sigma_{cr} < \sigma_{pr}$ , то  $E_{tg} = E$  и  $E_{red} = E$ . Формулы (12.13) совпадают соответственно с (12.3) и (12.5). Задачу Эйлера можно расценивать как частный случай задачи, рассмотренной здесь. При  $\sigma_{cr} > \sigma_{pr}$  модуль  $E_{tg} < E$ , а отсюда  $E_{red} < E$ . По мере возрастания критического напряжения приведенный модуль уменьшается.

Определение критического напряжения по формуле (12.13) обычно производится методом подбора:

- задаются некоторым значением  $\sigma_{cr}$ ;
- по диаграмме сжатия определяют касательный модуль  $E_{tg}$ ;
- по формуле (12.14), вычисляют приведенный модуль  $E_{red}$ ;
- по равенству (12.13) находят величину критического напряжения  $\sigma_{cr}$ .

Сопоставляя предварительно выбранное и полученное значения  $\sigma_{cr}$ , судят об удачности попытки. При необходимости расчет повторяют.

Теоретические формулы (12.13) обладают тем преимуществом перед эмпирическими, что опираются на экспериментальную диаграмму сжатия, получить которую значительно проще, нежели провести серию опытов на устойчивость.

## 12.7. Диаграмма критических напряжений.

### Расчет сжатых стержней

#### по коэффициенту уменьшения расчетного сопротивления

12.7.1. Формулы (12.5) и (12.13) устанавливают зависимость критического напряжения от гибкости стержня (рис. 12.15, линия со штриховкой).

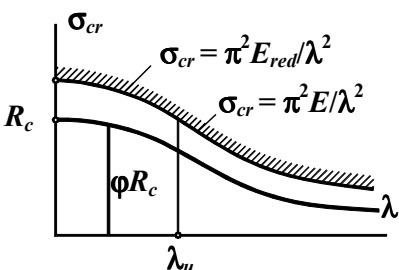


Рис. 12.15 По кривой критических напряжений введением коэффициента запаса строят кривую напряжений, допускаемых в стержне из условия его устойчивости (нижняя линия на рисунке). В нормах расчета и проектирования строительных конструкций ординаты этой кривой обозначают в виде произведения  $\phi R_c$ , где  $R_c$  – расчетное сопротивление

материала на сжатие;  $\phi = \phi(\lambda)$  – безразмерный множитель, называемый *коэффициентом уменьшения расчетного сопротивления*.

По графику видно, что  $1 \geq \phi > 0$ . Величина коэффициента  $\phi$  зависит не только от гибкости, но и от материала стержня. В нормативной и справочной литературе значения этого коэффициента приведены в виде таблиц, графиков или формул.

### 12.7.2. Коэффициенты $\phi$ уменьшения расчетного сопротивления

Таблица 12.1

#### 12.7.2.1. Сталь

Гиб- кость $\lambda$	Марка стали			
	18 кп 18 пс	09Г2, 14Г2, 09Г2С, 15ХСНД, 10Г2С1, 10ХНДП	10ХСНД	15Г2СФ
10	0,987	0,984	0,983	0,982
20	0,962	0,955	0,952	0,949
30	0,931	0,917	0,911	0,905
40	0,894	0,873	0,863	0,854
50	0,852	0,822	0,809	0,796
60	0,805	0,766	0,749	0,721
70	0,754	0,687	0,654	0,623
80	0,686	0,602	0,566	0,532
90	0,612	0,522	0,483	0,447
100	0,542	0,448	0,408	0,369

Гиб- кость $\lambda$	Марка стали			
	18 кп 18 пс	09Г2, 14Г2, 09Г2С, 15ХСНД, 10Г2С1, 10ХНДП	10ХСНД	15Г2СФ
110	0,478	0,381	0,338	0,306
120	0,419	0,321	0,287	0,260
130	0,364	0,276	0,247	0,223
140	0,315	0,240	0,215	0,195
150	0,276	0,211	0,189	0,171
160	0,244	0,187	0,167	0,152
170	0,218	0,167	0,150	0,136
180	0,196	0,150	0,135	0,123
190	0,177	0,136	0,122	0,111
200	0,161	0,124	0,111	0,101

#### 12.7.2.2. Древесина

При  $\lambda < 70$   $\phi = 1 - 8 \cdot 10^{-5} \lambda^2$ ; если  $\lambda \geq 70$ ,  $\phi = 3100/\lambda^2$ .

Величины коэффициентов  $\phi$  принимают такими, чтобы был обеспечен необходимый запас устойчивости. При этом учитываются разбросы диаграмм сжатия и физико-механических характеристик материала, наличие геометрических несовершенств в стержнях, эксцентриситетов прикладываемых сил, начальных напряжений, возникающих при изготовлении элементов конструкций, и т.п. Методика назначения величин коэффициентов  $\phi$  достаточно сложна и рассматривается индивидуально в курсах устойчивости строительных конструкций.

12.7.3. Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид

$$F/A \leq \varphi R_c. \quad (12.15)$$

Оно требует, чтобы напряжения в сечении сжатого стержня не превосходили значения, допускаемого для данного материала и гибкости.

В практических расчетах сжатых элементов строительных конструкций нередко приходится учитывать наличие местных ослаблений в стержне. Под местными подразумеваются такие ослабления, которые имеют небольшую протяженность по длине стержня. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что ослабления подобного рода практически не влияют на величину критической силы. Поэтому в расчетах на устойчивость они не учитываются. В условии (12.15) фигурирует площадь неослабленного сечения. Но при этом наряду с проверкой устойчивости по ограничению (12.15) необходима проверка условия прочности.

**Пример 12.5.** Центрально сжатая стойка высотой  $l = 3$  м выполнена из двутавра № 50 (рис. 12.16), материал сталь 10ХСНД. В стенке двутавра имеется отверстие с  $D = 60$  мм; оси отверстия и двутавра пересекаются. Найдем величину допускаемой сжимающей силы  $[F]$ .

Минимальный радиус инерции сечения  $i_{min} = 3,23$  см.

Наибольшая гибкость  $\lambda_{max} = \mu l / i_{min} = 2 \cdot 300 / 3,23 = 186$ .

По таблице 12.7.2.1 находим  $\varphi = 0,127$ .

Площадь двутавра  $A = 100$  см<sup>2</sup>. Расчетное сопротивление стали  $R_c = 355$  МПа.

Согласно условию устойчивости (12.15)

$$F \leq \varphi R_c A = 0,127 \cdot 35,5 \cdot 100 = 452 \text{ кН}.$$

Рис. 12.16

В ослабленном сечении – центральное сжатие. Проверим выполнение условия прочности. Площадь ослабленного сечения

$$A_n = A - Dd = 100 - 6 \cdot 1 = 94 \text{ см}^2.$$

По условию прочности  $F \leq R_c A_n = 35,5 \cdot 94 = 3337$  кН.

Сила  $F$  не должна превышать 452 кН. Примем  $[F] = 450$  кН.

**Пример 12.6.** Стержень, изображенный на рис. 12.17, сжат силой  $F = 150$  кН. Длина стержня  $l = 1,4$  м; сечение квадрат со стороной  $b$ ; материал сталь 09Г2С. Подберем размер сечения.

При отсутствии аналитической зависимости  $\varphi$  от  $\lambda$  задачи в подобной постановке решают методом последовательных приближений. Один из вариантов расчета таков.

Первая попытка.

Задаемся начальным значением коэффициента  $\varphi_b$ , например,  $\varphi_b = 0,5$  (среднее из возможных величин). Тогда из условия (12.15)

$$A \geq F / (\varphi_b R_c) = 150 / (0,5 \cdot 33,5) = 8,96 \text{ см}^2,$$

$$b = \sqrt{A} \geq \sqrt{8,96} = 3 \text{ см}.$$

Проверим удачность выбора.

Радиус инерции

$$i = \sqrt{J/A} = \sqrt{b^4 / (12 \cdot b^2)} = b / \sqrt{12} = 3 / 3,46 = 0,864 \text{ см}.$$

Гибкость  $\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 140 / 0,864 = 162$ . По таблице (12.7.2.1)

$\varphi_e = 0,183$ . Расхождение велико. Повторяем расчет.

Вторая попытка.

Задаемся  $\varphi_b = 0,3$ . Тогда  $A \geq F / (\varphi_b R_c) = 150 / (0,3 \cdot 33,5) = 14,9$  см<sup>2</sup>,

$b = \sqrt{A} \geq \sqrt{14,9} = 3,86$  см. Округляя, принимаем  $b = 4$  см.

Проверяем:

– радиус инерции  $i = b / \sqrt{12} = 4 / 3,46 = 1,16$  см;

– гибкость  $\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 140 / 1,16 = 120$ ;

– коэффициент  $\varphi_e = 0,321$ .

Значения коэффициента  $\varphi_b$  и  $\varphi_e$  во второй попытке близки.

Левая часть условия устойчивости  $F/A = 150/16 = 9,38$  кН/см<sup>2</sup>; правая часть  $\varphi_e R_c = 0,321 \cdot 33,5 = 10,8$  кН/см<sup>2</sup>. Условие устойчивости выполнено. Считаем вторую попытку окончательной. Итак,  $b = 4$  см.

Выбранная в примере последовательность решения задачи не является единственно возможной. Можно, например, в начале попытки задаваться не коэффициентом  $\varphi$ , а, скажем, размером  $b$ . Тогда очередность действий в пределах одной попытки будет выглядеть так:  $b \rightarrow i \rightarrow \lambda \rightarrow \varphi \rightarrow A \rightarrow b$  с последующим сопоставлением начального и конечного размеров  $b$ . Возможны и другие вычислительные последовательности. Расчет заканчивают тогда, когда выполняется условие устойчивости (12.15) и достигается обусловленная близость левой и правой его частей.

Если зависимость  $\varphi$  от  $\lambda$  задана формулой, необходимость в процедуре последовательных приближений отпадает.

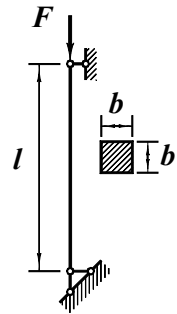


Рис. 12.17

## 12.8. Устойчивость плоской формы изгиба

Предыдущий материал посвящен устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня. Однако потеря устойчивости возможна не только при сжатии, но и при других видах нагружения, в частности, при изгибе. Так, балка, нагруженная моментами на краях (рис. 12.18 а), испытывает чистый прямой изгиб в плоскости  $\eta\xi$ . Пока значения моментов меньше критического, плоская форма изгиба устойчива. Как только моменты достигнут критической величины  $M_{cr}$ , случайные малые отклонения не исчезнут; устойчивой станет иная форма (она показана на рис. 12.18 а).

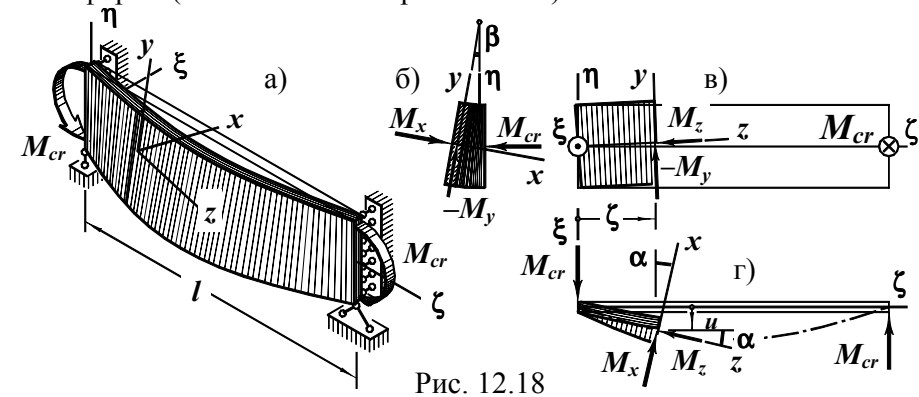


Рис. 12.18

Поставим задачу аналогично Эйлеровой. В балке, испытывающей чистый прямой изгиб, закрепленной, как изображено на рис. 12.18 а, возникли случайные малые отклонения, сопровождающиеся изгибом в горизонтальной плоскости и закручиванием. Найдём критическое значение моментов и новую устойчивую форму равновесия.

На рис. 12.18 б ... г изображены проекции балки до потери устойчивости (тонкие линии) и части балки, перешедшей в новую форму равновесия; моменты изображены векторами.

Моменты восстанавливающих упругих сил –

$$M_y = EJ_y u''; \quad (а)$$

$$M_z = GJ_t \beta'; \quad (б)$$

где  $\beta'$  – относительный угол закручивания.

Внешний момент, способный удержать балку в новом деформированном состоянии, должен удовлетворять условия равновесия.

Просуммируем моменты, приложенные к левой части балки, относительно осей  $y$  и  $z$ :  $-M_y - M_{cr} \sin \beta = 0$  (рис. 12.18 б);  $M_z - M_{cr} \sin \alpha = 0$  (рис. 12.18 г). Учитывая малость перемещений, считаем:  $\sin \beta = \beta$ ;  $\sin \alpha = \tan \alpha = u'$ . Тогда

$$M_y = -M_{cr} \beta; \quad (в)$$

$$M_z = M_{cr} u'. \quad (г)$$

Уравнения (а) ... (г) позволяют решить сформулированную задачу.

Подставляя выражения (а) и (б) в уравнения равновесия (в) и (г), получаем  $u'' + M_{cr} \beta / (EJ_y) = 0$ ;  $GJ_t \beta' / M_{cr} - u' = 0$ . После дифференцирования второго уравнения по  $\zeta$  и суммирования его с первым имеем  $GJ_t \beta'' / M_{cr} + M_{cr} \beta / (EJ_y) = 0$ .

$$\text{Введем обозначение } M_{cr}^2 / (EJ_y GJ_t) = k^2. \quad (д)$$

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид  $\beta'' + k^2 \beta = 0$ .

Общее решение уравнения  $\beta = C_1 \sin k \zeta + C_2 \cos k \zeta$ .

Углы поворота сечений  $\beta = 0$  при  $\zeta = 0$  и при  $\zeta = l$ . Из первого условия следует, что  $C_2 = 0$ , а  $\beta = C_1 \sin k \zeta$ . (е)

Второе условие приводит к равенству  $C_1 \sin kl = 0$ . Отсюда, отбрасывая вариант  $C_1 = 0$ , получаем  $\sin kl = 0$ , что означает

$$kl = \pi. \quad (ж)$$

Учитывая обозначение (д), находим критическую величину изгибающего момента

$$M_{cr} = \pi \sqrt{EJ_y GJ_t} / l. \quad (12.16)$$

Из равенств (е) и (ж) следует

$$\beta = C_1 \sin(\pi \zeta / l). \quad (12.17)$$

По закону Гука (б) крутящий момент  $M_z = C_1 \pi GJ_t \cos(\pi \zeta / l) / l$ .

Подставив полученное выражение в уравнение (в) и проинтегрировав последнее, находим  $u = C_1 \sqrt{GJ_t / (EJ_y)} \sin(\pi \zeta / l) / \pi + C_3$ . Учитывая, что при  $\zeta = 0$  и  $\zeta = l$  прогиб в горизонтальной плоскости  $u(0) = 0$  и  $u(l) = 0$ , устанавливаем, что  $C_3 = 0$ , после чего

$$u = C_1 \sqrt{GJ_t / (EJ_y)} \sin(\pi \zeta / l) / \pi. \quad (12.18)$$

Таким образом, при значении изгибающего момента (12.16) плоская форма изгиба становится неустойчивой к изгибно-крутильным возмущениям. Устойчивым будет равновесие в деформированном состоянии, соответствующем перемещениям (12.17) и (12.18).

Существенно то, что величина критического момента (12.16) зависит от изгибной и крутильной жесткостей, которые на напряжения и деформации при изгибе в плоскости  $zy$  не влияют. Кроме того, в формуле (12.16) нет характеристик прочности материала.

Воспользовавшись методом приведения длины, как это было сделано для сжатых стержней, можно найти критические значения моментов при чистом изгибе по-иному закрепленных балок.

Анализ устойчивости балок в условиях поперечного изгиба приводит к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, более сложным в поиске решения. В специальной и справочной литературе приводятся критические значения внешних сил для некоторых наиболее распространенных схем нагружения.

### 12.9. Заключение к разделу

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что в процессе потери устойчивости нагрузка остается неизменной как по величине, так и по направлению. Это обстоятельство существенно с точки зрения возможности использования полученных решений для анализа работы и расчетов элементов конструкций.

Внешние силы на сжатые или изогнутые элементы стержневых конструкций – это усилия от соседних частей. Геометрические изменения в конструкции сопровождаются изменениями усилий. Поэтому, строго говоря, полученные выше решения не применимы к расчету стержневых систем. Однако, если изменения усилий невелики и слабо влияют на поведение конструкции, ими можно пренебречь. Такое возможно в статически определимых и многих из статически неопределимых системах, при нагрузках гравитационной природы.

Если внешняя нагрузка изменяется в процессе потери устойчивости, поведение сжатых и изогнутых элементов может существенно отличаться от описанного выше. Так, при нагрузке, неизменной по направлению, но возрастающей в процессе изгиба стержня, потеря устойчивости может произойти раньше предсказываемого формулами (12.3) и (12.13), и сопровождаться динамическими эффектами. Если в процессе потери устойчивости сила сохраняет величину, но изменяет направление, возможен переход стержня из состояния покоя в режим движения, неустойчивым становится *равновесие*.

Исследования ученых обнаружили множество разновидностей потери устойчивости, выявили критерии чувствительности деформируемых систем к различным возмущениям. Современная теория устойчивости вооружила инженера средствами прогнозирования реакции конструкции на отклонения внешних воздействий от проектных.

### 13. Понятие о расчете по деформированной схеме

Большинство задач сопротивления материалов решается без учета влияния деформаций конструкции на ее расчетную схему. Обычно вполне обоснованно считают, что из-за малости деформаций геометрическое очертание конструкции до и после нагружения практически одно и то же. Положения точек приложения и линий действия внешних сил остаются неизменными. Неизменными остаются взаимные положения внешних нагрузок и главных центральных осей любого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы в сечениях не зависят от деформаций и перемещений.

Использование таких упрощений расчетной схемы уменьшает трудоемкость расчетов. Задачи в подобных случаях описываются сравнительно простыми математическими уравнениями.

В то же время отметим, что игнорирование влияния перемещений на расчетную схему конструкции не всегда допустимо.

Рассмотрим, например, внецентренно сжатый стержень (рис. 13.1). Пренебрегая искривлением оси, считаем, что изгибающий момент в сечениях  $M_x = Fe$ . Но, строго говоря, плечо силы равно  $e + f - v$ . Если перемещение  $f$  конца стержня окажется соизмеримым с эксцентриситетом  $e$ , то пренебрежение деформациями количественно недопустимо. К тому же добавим, что вносимая предположением погрешность, идет не в запас прочности.

*Специфика расчетов по деформированной схеме состоит в том, что при составлении уравнений равновесия учитывают деформации конструкции.*

Для обсуждаемого внецентренно сжатого стержня при расчете по деформированной схеме следует записать  $M_x = F(e + f - v)$ .

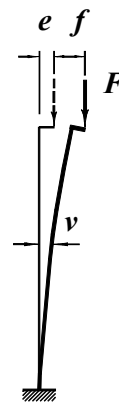


Рис. 13.1

### 13.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси при продольно-поперечном изгибе

Рассмотрим стержень, подверженный поперечной нагрузке и продольной силе (рис. 13.2). При составлении уравнения учтем то, что в изогнутом стержне продольная сила вызывает момент:  $M_x = M_{cx} - Tv$ , (а) где  $M_{cx}$  – изгибающий момент в сечении стержня от поперечных сил. Пренебрегая сближением концов стержня при его изгибе (оно на порядок меньше прогибов), можно считать, что  $M_{cx}$  в сжато-изогнутом стержне изменяется по длине так же как и при отсутствии силы  $T$ .

Согласно закону Гука  $M_x = EJ_x v''$ . (б)

Соединяя выражения изгибающего момента (а) и (б), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси  $EJ_x v'' = M_{cx} - Tv$ . Обозначим  $T/EJ_x = k^2$ . После этого уравнение примет вид

$$v'' + k^2 v = M_{cx}/(EJ_x). \quad (13.1)$$

Решив уравнение (13.1), можно найти прогибы от совместного действия продольной и поперечных сил, а затем внутренние силовые факторы и напряжения.

**Пример 13.1.** Расчетная схема балки изображена на рис. 13.3.

Будем считать  $l, A, J_x, W_x, q$  и  $T$  известными. Найдем  $v_{max}$  и  $max\sigma_z$ .

Изгибающий момент от поперечной нагрузки  $M_{cx} = qz^2/2 - qlz/2$ . Уравнение (13.1) имеет вид

$$v'' + k^2 v = q(z^2 - lz)/(2EJ_x).$$

Его общее решение  $v = C_1 \text{sink}z + C_2 \text{cosk}z + q(z^2 - lz - 2/k^2)/(2k^2 EJ_x)$ .

Постоянные интегрирования найдем из условий закрепления балки: прогиб  $v = 0$  при  $z = 0$  и при  $z = l$ . Из первого условия находим  $C_2 = q/(k^4 EJ_x)$ , а из второго  $C_1 = q(1 - \text{coskl})/(k^4 EJ_x \text{sink}l)$ . Теперь

$$v = q((1 - \text{coskl})\text{sink}z/\text{sink}l - 1 + \text{cosk}z + k^2(z^2 - lz)/2)/(k^4 EJ_x).$$

Наибольший прогиб  $v = v_{max}$  при  $z = l/2$ :

$$v_{max} = q((1 - \text{coskl})/(2\text{cos}(kl/2)) - 1 + \text{coskl}/2 + k^2 l^2/8)/(k^4 EJ_x).$$

Изгибающий момент  $M_x = EJ_x v'' = q((\text{coskl} - 1)\text{sink}z/\text{sink}l - \text{cosk}z + 1)/k^2$ .

$$\text{При } z = l/2 \quad M_x = maxM_x = q((\text{cos}(kl/2) - 1)/(k^2 \text{cos}(kl/2))).$$

Наибольшие нормальные напряжения в среднем сечении балки:

$$max\sigma_z = T/A + maxM_x/W_x.$$

При более сложных нагрузках решение дифференциального уравнения (13.1) становится трудоемким, так как его правая часть описывается разными функциями на разных участках. Наибольшую сложность при этом представляет определение постоянных интегрирования. Кроме того, в общем случае требуется исследование на экстремум выражений прогиба и изгибающего момента. Это препятствует применению метода в практических расчетах.

### 13.2. Приближенный метод расчета сжато-изогнутых стержней

Цель приближенного метода – уменьшение трудоемкости решения уравнения (13.1).

Представим прогиб стержня в виде суммы (рис. 13.4)  $v = v_c + \Delta v$ , (а) где  $v_c$  – прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой;  $\Delta v$  – дополнительный прогиб от момента продольной силы.

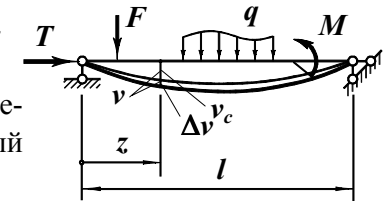


Рис. 13.4

Зададимся приближенным выражением дополнительного прогиба в виде полуволны синусоиды:

$$\Delta v = f \sin(\pi z/l). \quad (б)$$

Подставим выражение (б) в равенство (а), а затем (а) в (13.1):

$$v_c'' - \pi^2 f \sin(\pi z/l)/l^2 + k^2 v_c + k^2 f \sin(\pi z/l) = M_{cx}/(EJ_x).$$

Учитывая, что  $v_c'' = M_{cx}/(EJ_x)$ , и заменяя произведение  $f \sin(\pi z/l)$  на  $\Delta v$ , получаем равенство  $(T - F_E)\Delta v + Tv_c = 0$ , откуда  $\Delta v = Tv_c/(F_E - T)$ . Здесь введено обозначение  $F_E = \pi^2 EJ_x/l^2$  – критическая сила по формуле Эйлера (12.1). Подставив полученное выражение дополнительного прогиба в равенство (а), после преобразований получаем формулу

$$v = v_c/(1 - T/F_E). \quad (13.2)$$

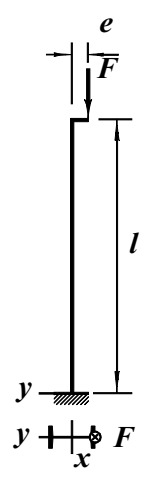
Формула (13.2) позволяет найти прогиб в сжато-изогнутом стержне по прогибу, вызванному только поперечной нагрузкой. Определить последний значительно легче. Во-первых, решение дифференциального уравнения изогнутой балки проще чем сжато-изогнутой, во-вторых, существуют методы, позволяющие найти  $v_c$  в заданном месте балки, минуя дифференциальное уравнение.

Равенство (13.2) справедливо не только для шарнирно опертой балки. Аналогичные решения для иначе закрепленных балок привели к такому же результату. Но под  $F_E$  следует понимать соответствующее критическое значение сжимающей силы, определяемое формулой (12.3):  $F_E = \pi^2 EJ_x / (\mu l)^2$ .

Погрешность приближенной формулы (13.2) зависит от вида поперечной нагрузки и величины сжимающей силы. В литературе отмечают, что при прогибах от поперечной нагрузки, имеющих один знак, и сжимающей силе  $T \leq 0,7F_E$  формула вполне пригодна для практических расчетов.

С целью получения количественной информации о результатах расчетов различными методами рассмотрим пример.

**Пример 13.2.** Стойка высотой  $l = 3,5$  м (рис. 13.5) выполнена из двутавра № 18. На краю сечения ( $e = 9$  см) к ней приложена внецентренная продольная сила  $F$ . Материал – сталь 18 пс ( $R_c = 230$  МПа). Устойчивость в плоскости  $zx$  обеспечена. При этих исходных данных решим такие задачи:



– определим допустимую нагрузку  $[F]$  из расчета на прочность по недеформированной схеме;

– при найденном значении силы  $F$  вычислим  $\max \sigma_z$ , пользуясь точным методом расчета по деформированной схеме;

– выполним то же, что и во втором задании, но приближенным методом.

**Определение допустимой нагрузки из расчета на прочность по недеформированной схеме.**

В сечениях стержня возникают сжимающая продольная сила  $N = F$  и изгибающий момент  $M_x = Fe$ .

При изгибе со сжатием

$$\max \sigma_z = N/A + M_x/W_x = F/A + Fe/W_x.$$

Рис. 13.5 По условию прочности  $\max \sigma_z \leq R_c$ , или  $F/A + Fe/W_x \leq R_c$ , откуда  $F \leq R_c / (1/A + e/W_x)$ . Используя таблицы сортаментов, найдем  $F \leq 23 / (1/23,4 + 9/143) = 218$  кН. Принимаем допустимое значение силы  $[F] = 218$  кН.

### Определение наибольших нормальных напряжений на основе дифференциального уравнения изогнутой оси (точный метод расчета по деформированной схеме)

Принимая во внимание перемещения, вызванные изгибом оси (рис. 13.6), констатируем, что в сечениях стержня возникают сжимающая продольная сила, которую из-за малости прогибов считаем постоянной,  $N = F$ , и изгибающий момент  $M_x = F(f + e - v)$  с наибольшим значением в нижнем сечении:  $\max M_x = F(f + e)$ .

Итак, определение максимального момента сводится к вычислению перемещения  $f$  верхнего конца стойки.

Изгибающий момент в сечениях  $M_x = F(f + e - v)$ . С другой стороны,  $M_x = EJ_x v''$ . Отсюда  $EJ_x v'' + Fv = F(f + e)$ . Если обозначить отношение  $F/EJ_x = k^2$ , уравнение примет вид  $v'' + k^2 v = k^2(f + e)$ .

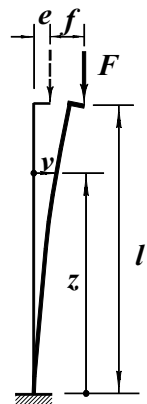


Рис. 13.6

Общее решение дифференциального уравнения –

$$v = C_1 \operatorname{sink}z + C_2 \operatorname{cosk}z + f + e.$$

Углы поворота сечений  $v' = C_1 k \operatorname{cosk}z - C_2 k \operatorname{sink}z$ .

Постоянные интегрирования должны удовлетворять условиям закрепления стержня: при  $z = 0$  прогиб  $v(0) = 0$  и угол поворота  $v'(0) = 0$ . Из второго условия  $C_1 = 0$ ; из первого  $C_2 = -(f + e)$ . Уравнение изогнутой оси стержня –

$$v = (f + e)(1 - \operatorname{cosk}z).$$

Так как при  $z = l$  прогиб  $v(l) = f$ , то  $f = (f + e)(1 - \operatorname{coskl})$ .

Отсюда  $f = e(1 - \operatorname{coskl})/\operatorname{coskl}$ .

Теперь вычисляем:

$$k = \sqrt{F/EJ_x} = \sqrt{218 / (2 \cdot 10^4 \cdot 1290)} = 0,2905 \cdot 10^{-2} \text{ 1/см};$$

$$kl = 0,2905 \cdot 10^{-2} \cdot 350 = 1,017; \operatorname{coskl} = \operatorname{cos}1,017 = 0,526.$$

$$f = e(1 - \operatorname{coskl})/\operatorname{coskl} = 9(1 - 0,526)/0,526 = 8,11 \text{ см}.$$

Зная прогиб наверху, находим

$$\max M_x = F(f + e) = 218(8,11 + 9) = 3730 \text{ кНсм};$$

$$\max \sigma_z = F/A + \max M_x/W_x = 218/23,4 + 3730/143 = 35,4 \text{ кН/см}^2.$$

Напряжение превысило расчетное сопротивление более чем наполовину. Это – результат погрешности определения изгибающего момента по недеформированной схеме.

### Определение наибольших нормальных напряжений приближенным методом расчета по деформированной схеме.

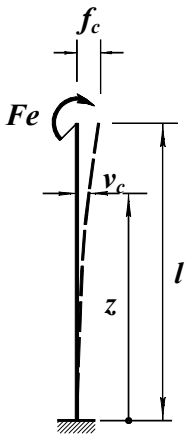


Рис. 13.7

Найдем перемещение верхнего конца стойки по формуле (13.2), которая в данной ситуации имеет вид

$$f = f_c / (1 - F/F_E),$$

где  $f_c$  – прогиб стержня на конце от поперечной изгибающей нагрузки. Роль такой нагрузки выполняет момент силы  $F$  (рис. 13.7):  $M_{cx} = Fe$ .

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в условиях поперечного изгиба (7.23):

$$v_c'' = M_{cx} / EJ_x = Fe / EJ_x.$$

Последовательное двукратное интегрирование приводит к равенствам

$$v_c' = Fez / EJ_x + C_1; \quad v_c = Fez^2 / (2EJ_x) + C_1z + C_2.$$

Из условий закрепления –  $v_c(0) = 0$  и  $v_c'(0) = 0$  находим  $C_1 = C_2 = 0$ . Таким образом, изогнутая ось описывается выражением  $v_c = Fez^2 / (2EJ_x)$ .

Прогиб на конце от поперечной изгибающей нагрузки

$$f_c = v_c(l) = Fe l^2 / (2EJ_x) = 218 \cdot 9 \cdot 350^2 / (2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1290) = 4,66 \text{ см.}$$

Эйлерово значение сжимающей силы (12.3) в плоскости  $yz$

$$F_E = \pi^2 EJ_x / (2l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1290 / (2 \cdot 350)^2 = 520 \text{ кН.}$$

Прогиб на конце при совместном действии момента  $Fe$  и силы  $F$  по используемой формуле

$$f = f_c / (1 - F/F_E) = 4,66 / (1 - 218/520) = 8,02 \text{ см.}$$

Завершение расчета аналогично предыдущему:

$$\max M_x = F(f + e) = 218(8,02 + 9) = 3710 \text{ кНсм};$$

$$\max \sigma_z = F/A + \max M_x / W_x = 218/23,4 + 3710/143 = 35,3 \text{ кН/см}^2.$$

Результаты точного и приближенного методов практически совпали. Трудоемкость же последнего значительно ниже.

В заключение отметим, что возможность вычисления Эйлеровой силы по формуле (12.3) не ограничивается гибкостью стержня (условием (12.7)). Формула (13.2) справедлива для стержней и меньшей гибкости. Область применимости приближенного метода – упругая стадия. Возникающие в стержне напряжения не должны превышать предел пропорциональности.

### 13.3. О применении принципа суперпозиции при расчете сжато-изогнутых стержней

При продольно-поперечном изгибе выражения, связывающие характеристики напряженно-деформированного состояния стержня с внешними силами, вообще говоря, нелинейны. Они не удовлетворяют условию (10.10). Поэтому, также говоря вообще, принцип суперпозиции в расчетах по деформированной схеме применять нельзя. Действительно, если вычислить моменты в стержне отдельно от поперечной нагрузки и продольной силы, будет потеряно слагаемое  $Tv$ . В то же время большие расчетные преимущества, появляющиеся при использовании принципа наложения, побуждают к поиску хотя бы ограниченных возможностей его применения. Они есть.

Рассмотрим балку, нагруженную поперечной  $F_1$  и продольной  $T$  силами (рис. 13.8 а). Дифференциальное уравнение для этого случая имеет вид  $v_1'' + k^2 v_1 = M_{1cx} / (EJ_x)$ . (а) Его решение  $v_1(z)$  его удовлетворяет всем граничным условиям.

Если балка нагружена другой поперечной силой –  $F_2$  и той же продольной (рис. 13.8 б), уравнение аналогично –

$$v_2'' + k^2 v_2 = M_{2cx} / (EJ_x). \quad (б)$$

Решение этого уравнения  $v_2(z)$  также удовлетворяет всем граничным условиям.

Если просуммировать уравнения (а) и (б), получим

$$(v_1'' + v_2'') + k^2 (v_1 + v_2) = (M_{1cx} + M_{2cx}) / (EJ_x). \quad (в)$$

Но  $M_{1cx} + M_{2cx}$  – изгибающий момент от суммарной поперечной нагрузки  $F_1 + F_2$ . Следовательно, уравнение (в) отвечает схеме, изображенной на рис. 13.8 в. Сумма решений уравнений (а) и (б) –  $(v_1 + v_2)$  является решением уравнения (в).

Так как  $M_1 = EJ_x v_1''$ ,  $M_2 = EJ_x v_2''$ , а  $M_1 + M_2 = EJ_x (v_1'' + v_2'')$ , эпюра моментов в балке (в) равна сумме эпюр моментов балок (а) и (б).

Из проведенного анализа следует, что прогибы и моменты в сжато-изогнутом стержне от сложной поперечной нагрузки равны сумме соответственно прогибов и моментов от отдельных поперечных нагрузок, входящих в состав сложной, при условии, что каждая из них действует совместно с продольной силой. На рис. 13.8 это свойство отмечено знаками + и =.

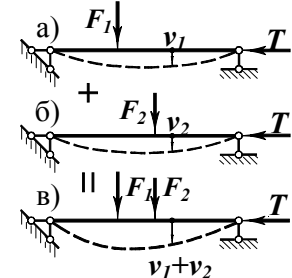


Рис. 13.8

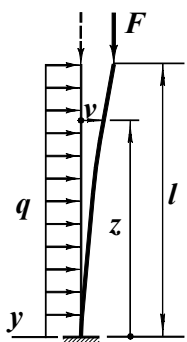
Таким образом, при неизменной продольной силе прогибы и моменты в балке изменяются пропорционально поперечной нагрузке.

Иначе обстоит дело, когда изменяется вся нагрузка. Если она (и поперечные, и продольная) возрастет в  $n$  раз, напряжения, деформации и перемещения в балке возрастут более чем в  $n$  раз. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при определении запасов прочности в условиях продольно-поперечного изгиба.

Обнаруженная возможность наложения решений для сжато-изогнутых стержней позволяет значительно упростить расчеты. Достаточно иметь решения для некоторых типовых наборов поперечных нагрузок, чтобы суммированием получить эпюры прогибов и моментов при сложном поперечном воздействии.

Для иллюстрации специфики расчетов сжато-изогнутых стержней приведем пример.

**Пример 13.3.** Стойка, составленная из двух швеллеров № 24 (рис. 13.9), имеет длину  $l = 4$  м. Материал швеллеров – сталь 18 пс. Стойка подвержена распределенной нагрузке  $q = 2$  кН/м и продольной силе  $F = 600$  кН. Найдем коэффициент запаса прочности  $n_s$  по напряжению в опасной точке.



Прежде всего напомним, что коэффициент запаса показывает, во сколько раз можно увеличить нагрузку до возникновения обусловленного предельного состояния.

В поставленной задаче предельное состояние соответствует равенству  $\max\sigma_z = R_n$ . Поскольку при возрастании нагрузки напряжения растут быстрее ее, коэффициент запаса нельзя определять по отношению

напряжений:  $n_s < R_n / \max\sigma_z$ . Он равен отношению предельной нагрузки к заданной:

$$n_s = F_u / F, \quad (a)$$

где  $F_u$  – предельная нагрузка при пропорциональном увеличении всех действующих сил;  $F$  – заданная нагрузка.

Решение задачи на основе дифференциального уравнения (13.1) очень трудоемко. Оно сведется к трансцендентному уравнению. Воспользуемся приближенным методом.

Изгибающий момент от поперечной нагрузки  $M_{cx} = q(l-z)^2/2$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси  $v_c'' = M_{cx}/(EJ_x) = q(l-z)^2/(2EJ_x)$ . Интегрируя дважды, получаем  $v_c' = -q(l-z)^3/(6EJ_x) + C_1$ ;  $v_c = q(l-z)^4/(24EJ_x) + C_1z + C_2$ . Учитывая, что при  $z=0$  прогиб  $v_c(0) = 0$  и производная  $v_c'(0) = 0$ , находим  $C_1 = ql^3/(6EJ_x)$ ,  $C_2 = -ql^4/(24EJ_x)$ . Прогиб на конце балки  $\max v_c = C_1l + C_2 = ql^4/(8EJ_x)$ .

Критическая сила по формуле Эйлера (12.3)

$$F_E = \pi^2 EJ_x / (2l)^2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 2900 / (2 \cdot 400)^2 = 1790 \text{ кН}.$$

Прогиб от совместного действия продольной и поперечной нагрузок  $v_{max} = \max v_c / (1 - F/F_E) = (ql^4/(8EJ_x)) / (1 - F/F_E)$ .

Наибольший изгибающий момент  $\max M_x = ql^2/2 + F \cdot v_{max} = ql^2/2 + Fql^4/(8EJ_x(1 - F/F_E))$ . Напряжение в опасной точке  $\max\sigma_z = F/A + \max M_x / W_x = F/A + (ql^2/2 + Fql^4/(8EJ_x(1 - F/F_E))) / W_x$ . (б)

При действующей нагрузке  $\max\sigma_z = 600/(2 \cdot 30,6) + (0,02 \cdot 400^2/2 + 600 \cdot 0,02 \cdot 400^4 / (8 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 2900(1 - 600/1790))) / (2 \cdot 242) = 9,804 + (1600 + 3,072 \cdot 10^{11} / (9,28 \cdot 10^8 \cdot 6648)) / (2 \cdot 242) = 9,804 + (1600 + 498) / (2 \cdot 242) = 14,14 \text{ кН/см}^2$ .

Если увеличить нагрузку в  $n_s$  раз,  $\max\sigma_z$  достигнет нормативного сопротивления стали  $R_n = 235$  МПа. Используя равенство (б), получаем уравнение

$$\max\sigma_z = n_s F/A + (n_s ql^2/2 + n_s F n_s ql^4 / ((8EJ_x)(1 - n_s F/F_E))) / W_x = R_n.$$

После подстановки числовых значений оно приобретает вид

$$13,101n_s + 0,684n_s^2 / (1 - 0,3352n_s) = 23,5$$

и приводит к квадратному уравнению  $20,9782n_s - 3,7104n_s^2 - 23,5 = 0$ .

Корни этого уравнения  $n_s = 4,11$  и  $n_s = 1,54$ . Первому из них соответствует предельная нагрузка  $q_u = n_s q = 4,11 \cdot 2 = 8,22$  кН/м,  $F_u = n_s F = 4,11 \cdot 600 = 2466$  кН. Предельное значение сжимающей силы оказалось больше критического. Поэтому первый корень отбрасываем. Согласно второму решению  $n_s = 1,54$ ;  $q_u = n_s q = 1,54 \cdot 2 = 3,08$  кН/м и  $F_u = n_s F = 1,54 \cdot 600 = 924$  кН. Итак, коэффициент запаса равен 1,54 (при действующей нагрузке отношение  $R_u / \max\sigma_z = 23,5 / 14,14 = 1,66$  – больше действительного запаса прочности).

Необходимость расчетов по деформированной схеме возникает не только в стержневых системах, но и в конструкциях, содержащих пластины и оболочки. Для них разработаны соответствующие методы с соблюдением принципиальных положений, проиллюстрированных выше.



## 14. Динамическое действие нагрузок

### 14.1. Понятие о динамическом нагружении

Большинство нагрузок, действующих на сооружения, изменяются во времени. Вместе с ними изменяются напряжения, деформации и перемещения. Если движения точек происходят с ускорениями, возникают силы инерции. От них появляются дополнительные напряжения и деформации.

В тех случаях, когда силы инерции малы и ими можно пренебречь, нагружение считают статическим – в каждый момент времени каждая точка находится в состоянии равновесия. *Если силами инерции пренебречь нельзя, нагружение называют динамическим.*

Характер изменения нагрузок во времени может быть чрезвычайно разнообразным. Не всегда даже удается установить с нужной точностью их параметры. Для упрощения и унификации расчетных методов динамические нагрузки разделяют на различные идеализированные категории.

Одна группа – *это нагрузки, вызванные монотонным движением с ускорением.* К ним относятся, например, силы инерции при прямолинейном ускоренном движении, при вращении и т.п.

Другая группа – *вибрационные нагрузки.* Для них характерна периодичность действия, соизмеримая с периодами колебаний конструкции.

Третья группа – *ударные нагрузки* – нагрузки, действующие в течение короткого промежутка времени.

Приведенная классификация не охватывает всего многообразия динамических нагрузок. Возможны воздействия, имеющие комплексный характер и в перечисленные группы не вписывающиеся.

Расплывчатость границ между отдельными категориями нагрузок порождает пересечение областей применимости расчетных методов, соответствующих воздействиям той или иной группы. Подобные затруднения обычно разрешаются с использованием конкретных условий задачи.

### 14.2. Учет сил инерции при заданном движении. Простейшие расчеты на динамическое воздействие

14.2.1. Классическая задача о прочности твердого деформируемого тела в условиях динамического воздействия выглядит так. Известны законы движения всех точек тела:

$$\mathbf{u} = (x, y, z, t), \quad \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad \mathbf{w} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t),$$

где  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  – перемещения точки;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты;  $t$  – время.

Принципиальная схема последующих действий ясна:

– двукратным дифференцированием перемещений по времени определяются ускорения точек и зависимость сил инерции от координат и времени;

– устанавливаются зависимости напряжений от тех же переменных;

– методами математического анализа определяется момент времени и координаты опасной точки.

Однако, несмотря на принципиальную ясность, обсуждаемая задача может оказаться чрезмерно громоздкой из-за сложности определения напряжений по силам инерции и трудностей математического анализа.

В практических ситуациях удается установить законы движения лишь нескольких точек тела, нередко даже одной. Тогда определение сил инерции производится с учетом свойств упругой системы, индивидуальных особенностей объекта на основе приемлемых предположений.

Знакомство с таким подходом при решении задач продолжим на конкретных примерах.

**Пример 14.1.** С помощью троса с ускорением  $a$  поднимают груз массой  $m$  (рис. 14.1). Найдем силу, растягивающую трос.

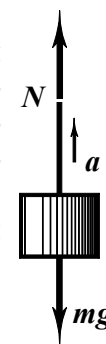


Рис. 14.1

Пренебрегая силами инерции в тросе и возможными вертикальными колебаниями груза в процессе подъема, с помощью принципа Даламбера запишем  $N - ma - mg = 0$  ( $g$  – ускорение свободного падения). Отсюда  $N = m(a + g)$ . По найденной силе могут быть вычислены напряжения в тросе и его деформации.



Рис. 14.2  
Продольная сила  $N = \int_z^l dF = \int_z^l \rho A z \omega^2 dz = \rho A \omega^2 (l^2 - z^2)/2$ . Эпюра продольной силы показана на рис. 14.2 в. Наибольшая сила в сечении на оси вращения.

Напряжения в опасном сечении  $\max \sigma_z = \max N/A = \rho \omega^2 l^2 / 2$ .  
В аналогичном плане могут быть решены и другие задачи, связанные с напряжениями и деформациями при заданном движении стержня.

**14.3. Механическая модель упругой конструкции в задачах динамики.**

**Коэффициент жесткости системы**

14.3.1. Деформируемое тело представляет собой бесчисленное множество материальных точек. Следовательно, деформируемое тело является системой с бесконечным числом степеней свободы. Расчетные уравнения для подобной системы практически нереализуемы. Поэтому в сопротивлении материалов и других дисциплинах, разрабатывающих методы практического расчета реальных конструкций, используются упрощенные модели.

Рассматриваемый объект обычно заменяют системой с конечным числом параметров, определяющих ее деформированное состо-

яние. Для этого выбирают представительные точки и через их перемещения выражают характеристики состояния конструкции. Число степеней свободы такой системы равно сумме степеней свободы представительных точек.

Количество и положения назначаемых точек зависят от поставленной задачи. Мотивы, по которым производят такой выбор, будут описаны ниже.

Не затрагивая пока вопрос о выборе числа степеней свободы и местах представительных точек, познакомимся с процедурой определения параметров механической модели на конкретных примерах.

**Пример 14.3.** Смоделируем изгибаемую балку (рис. 14.3 а) системой с одной степенью свободы.

Выберем представительную точку посередине пролета. У нее одна степень свободы – возможность вертикального перемещения. Сила, приложенная посередине балки, вызывает прогибы (результаты записаны по формуле (7.26)).

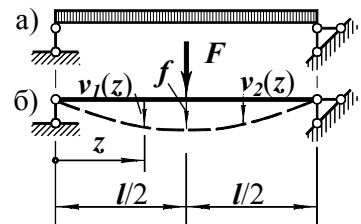


Рис. 14.3

$$v_1(z) = Fz(3l^2 - 4z^2)/(48EJ_x) \text{ при } z \leq l/2;$$

$$v_2(z) = F(z(3l^2 - 4z^2) + 8(z - l/2)^3)/(48EJ_x) \text{ при } z \geq l/2.$$

Прогиб под силой  $f = v(l/2) = Fl^3/(48EJ_x)$ . Отсюда  $F = 48EJ_x f/l^3$ .

Заменив силу в выражениях прогибов, получаем

$$v(z) = fz(3l^2 - 4z^2)/l^3 \text{ при } z \leq l/2;$$

$$v(z) = f(z(3l^2 - 4z^2) + 8(z - l/2)^3)/l^3 \text{ при } z \geq l/2.$$

Вертикальные перемещения всех точек балки выражены через прогиб в центре.

Внутренние силовые факторы  $M_x(z) = EJ_x v''(z)$  и  $Q_y(z) = -M_x'(z)$  также могут быть выражены через прогиб  $f$  и координату  $z$ :

$$M_x(z) = -24EJ_x fz/l^3, Q_y(z) = 24EJ_x f/l^3 \text{ при } z \leq l/2;$$

$$M_x(z) = 24EJ_x f(z - l)/l^3, Q_y(z) = -24EJ_x f/l^3 \text{ при } z \geq l/2.$$

По изгибающему моменту и поперечной силе несложно выразить и напряжения в балке.

Таким образом, геометрический параметр  $f$  выбранной механической модели определяет напряженно-деформированное состояние балки. Если он изменяется во времени, то синхронно с ним изменяются напряжения, деформации и перемещения.

**Пример 14.4.** Ту же балку (рис. 14.3 а, 14.4 а) смоделируем системой с двумя степенями свободы.

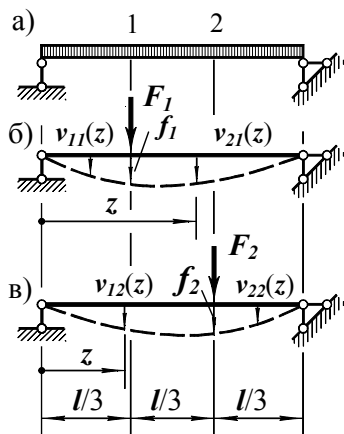


Рис. 14.4

Выберем точки 1 и 2, каждая из которых обладает одной степенью свободы.

Сила  $F_1$  (рис. 14.4 б) вызывает прогибы  $v_{11}(z) = F_1 z(5l^2 - 9z^2)/(81EJ_x)$  при  $z \leq l/3$ ;  $v_{21}(z) = F_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3)/(162EJ_x)$  при  $z \geq l/3$ .

Прогиб  $f_1 = v_{11}(l/3) = 4F_1 l^3/(243EJ_x)$ . Отсюда  $F_1 = 243EJ_x f_1/(4l^3)$ . После замены силы в выражениях прогибов имеем

$$v_{11}(z) = 3f_1 z(5l^2 - 9z^2)/(4l^3) \text{ при } z \leq l/3;$$

$$v_{21}(z) = 3f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3)/(8l^3) \text{ при } z \geq l/3.$$

Аналогично находим (рис. 14.4 в)

$$v_{12}(z) = F_2 z(8l^2 - 9z^2)/(162EJ_x) \text{ при } z \leq 2l/3;$$

$$v_{22}(z) = F_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3)/(162EJ_x) \text{ при } z \geq 2l/3;$$

$$f_2 = v_{12}(2l/3) = 4F_2 l^3/(243EJ_x); F_2 = 243EJ_x f_2/(4l^3).$$

После исключения силы  $F_2$

$$v_{12}(z) = 3f_2 z(8l^2 - 9z^2)/(8l^3) \text{ при } z \leq 2l/3;$$

$$v_{22}(z) = 3f_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3)/(8l^3) \text{ при } z \geq 2l/3.$$

Учитывая диапазоны справедливости, из двух групп решений устанавливаем, что прогибы

– на левом участке, где  $0 \leq z \leq l/3$ ,

$$v(z) = v_{11}(z) + v_{12}(z) = 3z(f_1(5l^2 - 9z^2) + f_2(8l^2 - 9z^2)/2)/(4l^3);$$

– на средней трети пролета при  $l/3 \leq z \leq 2l/3$

$$v(z) = v_{21}(z) + v_{12}(z) = 3(f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3) + f_2 z(8l^2 - 9z^2))/(8l^3);$$

– на правом отрезке, когда  $2l/3 \leq z \leq l$ ,

$$v(z) = v_{21}(z) + v_{22}(z) = 3(f_1(z(10l^2 - 18z^2) + 27(z - l/3)^3) + f_2(z(8l^2 - 9z^2) + 27(z - 2l/3)^3))/(8l^3).$$

При заданных  $f_1$  и  $f_2$  эти выражения однозначно определяют напряженно-деформированное состояние балки.

14.3.2. Если необходимо отразить инерционные свойства конструкции, в выбранные точки системы помещают элементы, обладающие массами. Так, на рис. 14.5 показана механическая модель консольной балки. В ней одна представительная точка. Помещенный же в нее элемент имеет две степени свободы ( $f$  и  $\alpha$ ) и отражает инерционность при вертикальных перемещениях и повороте.

Последовательность выражения характеристик состояния конструкции через параметры перемещений, введенных в модель элемента подобна проиллюстрированной в примерах 14.3 и 14.4.

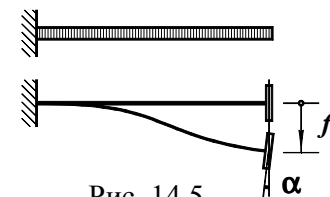


Рис. 14.5

Связь параметров степеней свободы выбранных точек или элементов с перемещениями точек системы устанавливается на основе деформационных свойств конструкции. Обычно (и это проиллюстрировано примерами) принимают, что динамические и статические перемещения геометрически подобны. Это автоматически переходит в подобие эпюр усилий, напряжений, деформаций и перемещений.

14.3.3. Любая точка деформируемой системы не может перемещаться свободно. Ее перемещения сопровождаются изменениями усилий. Спротивляемость деформируемой системы перемещениям точки характеризуется **коэффициентом жесткости**.

*Коэффициент жесткости представляет собой силу, приходящуюся на единицу перемещения по своему направлению:*

$$c = F/f, \quad (14.1)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости;  $F$  – сила;  $f$  – перемещение точки приложения силы.

Коэффициент жесткости зависит от

- положения точки;
- направления перемещения;
- вида перемещения (линейное или угловое).

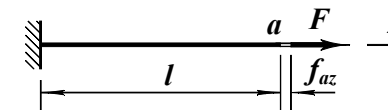


Рис. 14.6

Приведем примеры.

**Пример 14.5.** Найдем коэффициент горизонтальной жесткости  $c_{az}$  на правом конце стержня, изображенного на рис. 14.6.

Горизонтальная сила  $F$  вызывает перемещение конца стержня на  $f_{az}$ . Но  $f_{az}$  равно удлинению  $\Delta l$ . По закону Гука удлинение стержня

$\Delta l = Fl/(EA)$ . В итоге  $c_{az} = F/f_{az} = F/\Delta l = EA/l$ . Размерность коэффициента жесткости – сила/перемещение (например,  $H/M$ ).

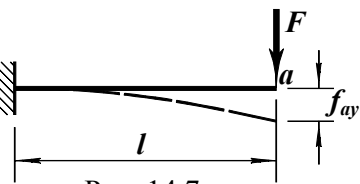


Рис. 14.7

**Пример 14.6.** Найдем коэффициент жесткости того же стержня (рис. 14.6, 14.7), в той же точке, но в вертикальном направлении –  $c_{ay}$ .

Вертикальная сила  $F$  вызывает прогиб  $f_{ay} = Fl^3/(3EJ_x)$  (см. формулу (7.24)).

Коэффициент поперечной жесткости на конце консольной балки  $c_{ay} = F/f_{ay} = 3EJ_x/l^3$ .

В конструкциях из линейно упругого материала и малых перемещениях коэффициент жесткости полностью определяется физико-геометрическими параметрами модели (при заданном месте и направлении смещения). Поэтому любую подобную конструкцию независимо от вида нагружения можно рассматривать как условную пружину с заданной жесткостью. Такая абстракция вводит задачи динамики строительных конструкций в круг простых объектов, изучаемых в физике и теоретической механике.

### 14.4. Колебания упругих систем

Проблема колебаний строительных сооружений является очень важной с практической точки зрения и весьма сложной с теоретических позиций. Нередки случаи, когда конструкция, обладающая большим запасом прочности при статическом воздействии, оказывается непригодной для восприятия периодических сил.

С целью качественного знакомства с реакцией упругой конструкции, выведенной из состояния покоя, рассмотрим ее поведение в режиме движения при разных сопутствующих условиях.

Многие качественные эффекты могут быть обнаружены на простейших моделях конструкции – системах с одной степенью свободы. Не желая усложнять аналитический процесс, ограничимся ими. Естественно, не все особенности могут быть вскрыты такими моделями. Изучение колебаний в последующих спецкурсах дополнит те начальные сведения, которые будут получены ниже.

### 14.4.1. Свободные колебания

Если упругая конструкция на ограниченном промежутке времени подверглась динамическому воздействию, после чего предоставлена самой себе, в ней возникнут колебания. Колебания, происходящие при отсутствии внешнего силового воздействия, называются *свободными или собственными*.

Характер движения зависит от многих факторов. Рассмотрим некоторые частные случаи на модели с одной степенью свободы.

#### 14.4.1.1. Свободные колебания без сопротивления движению

Пусть упругая система в ненапряженном состоянии имеет очертание, показанное на рис. 14.8 а. Если на нее положить груз, конструкция деформируется и в состоянии равновесия будет иметь вид, изображенный на рис. 14.8 б.

Допустим, что в результате внешнего воздействия система выведена из равновесия и предоставлена самой себе. Выявим вид и характеристики движения тела.

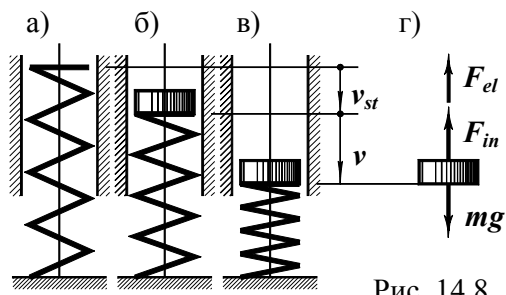


Рис. 14.8

В произвольный момент времени (рис. 14.8 в) на рассматриваемое тело действуют силы (рис. 14.8 г):  $mg$  – тяжести;  $F_{in}$  – инерции;  $F_{el}$  – упругости деформируемой конструкции.

Сила инерции  $F_{in} = m\ddot{v}$  ( $\ddot{v}$  – вторая производная по времени:  $\ddot{v} = d^2v/dt^2$ ). Сила упругости  $F_{el} = c(v_{st} + v)$  ( $c$  – коэффициент жесткости системы). Поскольку  $F_{in} + F_{el} - mg = 0$ , то  $m\ddot{v} + c(v_{st} + v) - mg = 0$ .

Преобразуем записанное уравнение к канонической форме. Введем обозначение  $c/m = \omega^2$ , а также учтем, что  $cv_{st} = mg$ . В итоге приходим к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \tag{14.2}$$

Общее решение этого уравнения  $v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ . Если обозначить  $C_1/C_2 = \text{ctg} \varphi$ , получим

$$v = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{14.3}$$

Выражение (14.3) свидетельствует о том, что при отсутствии

сопротивления упругая система, выведенная из состояния покоя и предоставленная самой себе, будет совершать простые гармонические колебания (рис. 14.9).



Согласно введенному выше обозначению круговая частота

$$\omega = \sqrt{c/m}. \quad (14.4)$$

Период колебаний

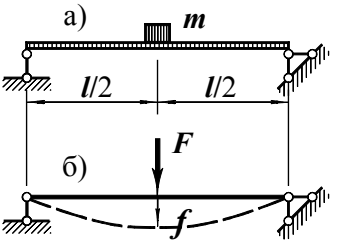
$$T = 2\pi/\omega. \quad (14.5)$$

Небезынтересно влияние параметров системы на характеристики колебаний. Формулы (14.4) и (14.5) показывают, что

- с ростом массы тела снижается частота колебаний;
- увеличение жесткости упругой системы повышает частоту.

Противоборствующими факторами, определяющими и поддерживающими колебательное движение, являются силы инерции и силы упругости. В процессе смены их соотношения происходит изменение характера и направления движения.

**Пример 14.7.** Посередине стальной балки длиной  $l = 6$  м из двутавра № 50 закреплен груз массой  $m = 14300$  кг (рис. 14.10 а).



В результате удара он получил начальную скорость  $\dot{v} = 0,7$  м/с. Пренебрегая массой балки, найдем

- частоту, период и амплитуду свободных колебаний;
- диапазоны изменения прогибов под грузом и  $\max\sigma_z$  в балке.

Согласно формуле (7.26 при  $b = l/2$ ) прогиб под силой  $f = Fl^3/(48EJ_x)$ . Коэффициент жесткости (14.1)

$$c_y = F/f = 48EJ_x/l^3 = 48 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 39727 \cdot 10^{-8} / 6^3 = 17660 \text{ кН/м.}$$

Круговая частота свободных колебаний (14.4)

$$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{17660/14,3} = 35 \text{ 1/с.}$$

Период колебаний (14.6)  $T = 2\pi/\omega = 2 \cdot 3,14/35 = 0,179$  с.

Уравнение свободных колебаний (14.4)  $v = A \sin(\omega t + \varphi)$ .

Примем за начало отсчета времени тот момент, когда груз получил силовой импульс. В этом случае начальные условия: перемещение  $v(0) = 0$ ; скорость  $\dot{v}(0) = 0,7$  м/с. Из первого условия следует:  $A \sin \varphi = 0$ , откуда  $\varphi = 0$ .

Скорость движения  $\dot{v} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ . Второе условие приводит к равенству  $\dot{v}(0) = A\omega$ , т.е.  $A = \dot{v}(0)/\omega = 0,7/35 = 0,02$  м = 2 см.

Статический прогиб от груза

$$v_{st} = mg/c = 14300 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} / 17660 = 0,0079 \text{ м} = 0,79 \text{ см.}$$

Таким образом, прогиб будет изменяться в диапазоне  $v_{st} \pm A$  – от  $0,79 - 2 = -1,21$  см до  $0,79 + 2 = 2,79$  см.

При статическом действии груза напряжения в среднем сечении  $\max\sigma_z^{st} = \max M_x/W_x = mgl/(4W_x) = 140 \cdot 600 / (4 \cdot 1589) = 13,2$  кН/см<sup>2</sup>.

Поскольку в рассматриваемом варианте теории колебаний одноименные эпюры в статическом и динамическом состояниях подобны и отличающимися лишь масштабным коэффициентом, диапазоны изменения напряжений и прогибов под силой аналогичны.

Если прогибы посередине балки колеблются от

$$v_{st} - A = (1 - A/v_{st}) v_{st} = (1 - 2/0,79) v_{st} = -1,53 v_{st}$$

до  $v_{st} + A = (1 + A/v_{st}) v_{st} = (1 + 2/0,79) v_{st} = 3,53 v_{st}$ ,

то и напряжения в рассматриваемых точках будут изменяться от

$$-1,53 \max\sigma_z^{st} = -1,53 \cdot 13,2 = -20,2 \text{ кН/см}^2$$

до  $3,53 \max\sigma_z^{st} = 3,53 \cdot 13,2 = 46,6 \text{ кН/см}^2$ .

**14.4.1.2. Свободные колебания**

**при сопротивлении, пропорциональном скорости**

На рис. 14.11 а ... в изображена упругая система

- в недеформированном состоянии (рис. 14.11 а);
- в состоянии статического равновесия с телом массой  $m$  (рис. 14.11 б);
- в произвольный момент времени (рис. 14.11 в);

Рис. 14.11

Силы, действующие на движущееся тело в произвольный момент времени показаны на рис. 14.11 г: инерции  $F_{in} = m\ddot{v}$ , упругости  $F_e = c(v_s + v)$  и сопротивления<sup>1</sup>  $F_{res}$ , отражающая потери энергии, связанные с внешним и внутренним трением, препятствием среды и т.п. Природа процессов, обуславливающих рассеяние энергии при движении, сложна и не всегда ясна. Обычно силу сопротивления считают пропорциональной скорости движения  $\dot{v}$ :  $F_{res} = r\dot{v}$  ( $r$  – коэффициент сопротивления, имеющий размерность Нс/м).

Условие равновесия  $F_{in} + F_{res} + F_{el} - mg = 0$  принимает вид дифференциального уравнения  $m\ddot{v} + r\dot{v} + c(v_{st} + v) - mg = 0$ . Обозначив  $r/m = 2\alpha$  и  $c/m = \omega^2$ , а также учитывая равенство  $cv_{st} = mg$ , приходим к канонической форме

$$\ddot{v} + 2\alpha\dot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (14.6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид  $Z^2 + 2\alpha Z + \omega^2 = 0$ . Корни характеристического уравнения  $Z_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$ . Общее решение  $v = B_1 e^{Z_1 t} + B_2 e^{Z_2 t}$ .

Рассмотрим частные случаи, поскольку здесь возможны две качественно различные ситуации:  $\alpha < \omega$  и  $\alpha \geq \omega$ .

Первая ситуация:  $\alpha < \omega$  (сила сопротивления мала).

В этом случае решение уравнения (14.6) принимает вид

$$v = e^{-\alpha t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t).$$

После замены постоянных  $C_1$  и  $C_2$  на  $A_r$  и  $\varphi_r$  его можно записать так:

$$v = A_r e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_r). \quad (12.8)$$

В рассматриваемом случае

тело также совершает колебания. Но эти колебания затухающие (рис. 14.12). Амплитуда со временем уменьшается. В итоге система практически останавливается в положении статического равновесия.

Круговая частота колебаний

$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (14.9)$$

меньше чем при колебаниях без сопротивления. Период – больше:

$$T_r = 2\pi/\omega_r. \quad (14.10)$$

Факт затухания колебательного процесса определяется множителем  $e^{-\alpha t}$  в выражении (14.8). Чем больше  $\alpha$ , тем выше скорость уменьшения амплитуд. По этой причине  $\alpha$  носит название *коэффициента затухания*.

В литературе по динамике сооружений приведены такие данные: для стальных мостов  $\alpha = (0,018 \dots 0,08)\omega_r$ ; для деревянных  $\alpha = (0,022 \dots 0,01)\omega_r$ ; железобетонных  $\alpha = (0,032 \dots 0,016)\omega_r$ . При динамических расчетах сооружений на грунтовых основаниях (сейсмостойкость сооружений; вибрацию фундаментов)  $\alpha = (0,4 \dots 0,06)\omega_r$ . Для большинства строительных конструкций  $\alpha < \omega_r$ . Свободные колебания затухают.

Учитывая слабое влияние  $\alpha$  на  $\omega_r$ , в практических расчетах строительных конструкций обычно принимают  $\omega_r \approx \omega$ ,  $T_r \approx T$ .

Количественной мерой скорости затухания колебаний является отношение отклонений тела в два момента, отличающихся на период:  $v(t)/v(t+T) = A_r e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_r) / (A_r e^{-\alpha(t+T)} \sin(\omega(t+T) + \varphi_r)) = e^{\alpha T}$ . Отсюда  $\ln(v(t)/v(t+T)) = \alpha T$ . Обозначим

$$\alpha T = d_{ln}. \quad (14.11)$$

В теории колебаний  $d_{ln}$  носит название *логарифмического декремента затухания*.

Для формирования количественного представления о затухающих колебательных процессах приведем пример.

**Пример 14.8.** Обратимся к балке, рассмотренной в предыдущем примере 14.7. Определим, как скоро затухнут колебания, возникшие в ней. Логарифмический декремент затухания от рассеяния энергии в балке  $d_{ln} = 0,085$ . Колебания примем прекратившимися, если амплитуда уменьшилась в 10 раз.

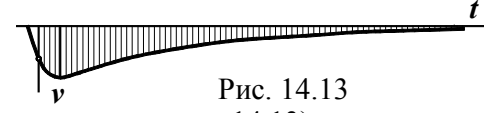
Отношение амплитуд в моменты времени, отличающиеся на период,  $A_r(t)/A_r(t+T) = e^{d_{ln}} = e^{0,085} = 1,089$ . Через  $n$  периодов отношение амплитуд  $A_r(t)/A_r(t+nT) = 1,089^n$ . Колебания затухнут (в оговоренном выше смысле), если  $1,089^n \geq 10$ . Отсюда  $n > 27$ . Приняв период колебаний  $T_r = 0,179$  с, находим время возвращения балки к статическому состоянию  $nT_r = 27 \cdot 0,179 \approx 5$  с.

<sup>1</sup> От англ. *decrement* – уменьшение.

Вторая ситуация:  $\alpha \geq \omega$ .

Если силы сопротивления велики, так что  $\alpha \geq \omega$ , колебания не возникают. Тело, получившее импульс, вначале по инерции отклоняется от исходного положения (участок роста перемещения на рис. 14.13), затем монотонно возвращается обратно под действием сил упругости (асимптотическая ветвь на рисунке).

Рис. 14.13



Предпосылка о том, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела, обусловлена возможностью привлечения к количественному анализу простого дифференциального уравнения (14.6). Между тем во многих случаях сопротивление среды весьма неопределенно и многофакторно. Математические сложности, возникающие при уточнении влияния сил сопротивления на характер движения, серьезно затрудняют анализ колебательных процессов. Поэтому практические оценки обычно базируются на полученных выше качественных и количественных соотношениях.

#### 14.4.2. Вынужденные колебания

Колебания, происходящие под действием переменных во времени сил, носят название *вынужденных*.

Рассмотрим поведение упругой конструкции, подверженной переменной во времени силе  $F = F(t)$ . На рис. 14.14 изображены:

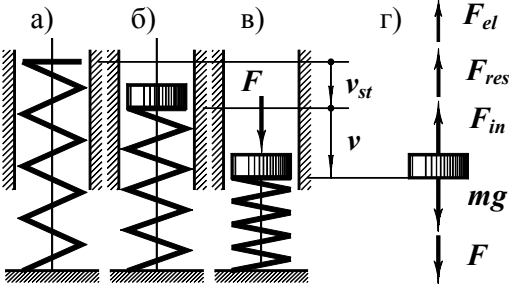


Рис. 14.14

– движущееся тело в произвольный момент  $t$  (рис. 14.14 в);  
– силы, действующие на тело в это мгновение (г).

Условие динамического равновесия  $F + mg - F_{in} - F_{res} - F_{el} = 0$  после преобразований, аналогичных приведенным выше, принимает вид

$$\ddot{v} + 2\alpha\dot{v} + \omega^2 v = F/m. \quad (14.12)$$

Общее решение уравнения (14.12) состоит из двух частей:

$$v = v_{gen} + v_{par}, \quad (14.13)$$

где  $v_{gen}$  – общее решение однородного уравнения;

$v_{par}$  – частное решение уравнения (14.12)<sup>1</sup>.

Общее решение  $v_{gen}$  получено выше. Оно описывает затухающие свободные колебания (14.8). Частное решение  $v_{par}$  зависит от вида функции  $F = F(t)$ . Таким образом, *при действии возмущающей силы тело совершает одновременно два движения. Одно из них – собственные колебания, другое определяется характером изменения силы.*

Изучение видов движения при действии переменной силы начнем с наиболее простого и распространенного случая.

##### 14.4.2.1. Колебания при действии гармонической силы

Пусть возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_a \sin \theta t, \quad (a)$$

где  $F_a$  – амплитудное значение силы  $F$ ;

$\theta$  – круговая частота ее изменения.

Частное решение уравнения (14.12) в этом случае имеет вид

$$v_{par} = D_1 \sin \theta t + D_2 \cos \theta t.$$

Постоянные  $D_1$  и  $D_2$  после подстановки  $v_{par}$  в уравнение (14.12) и приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях выражаются так:

$$D_1 = F_a(\omega^2 - \theta^2) / (m((\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2)); \quad (б)$$

$$D_2 = -2\alpha\theta F_a / (m((\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2)). \quad (в)$$

Введя обозначение  $D_2/D_1 = \operatorname{tg} \psi$ , частному решению можно придать вид

$$v_{par} = A_f \sin(\theta t + \psi), \quad (14.14)$$

где амплитуда вынужденных колебаний<sup>2</sup>

$$A_f = F_a / (m\omega^2 \sqrt{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2/\omega^4}). \quad (г)$$

Уравнение движения тела –

$$v = A_e e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_e) + A_f \sin(\theta t + \psi). \quad (14.15)$$

<sup>1</sup> Индексы от англ. *general* – общий; *particular* – частный.

<sup>2</sup> Индекс от англ. *forced oscillation* – вынужденные колебания.

При действии гармонической возмущающей силы тело совершает периодическое движение, состоящее из

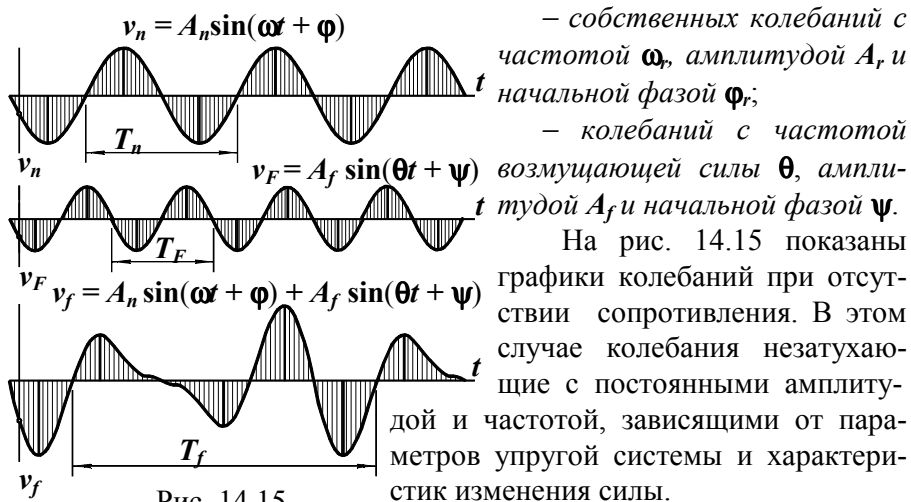


Рис. 14.15

Рис. 14.16 иллюстрирует колебания в условиях сопротивления.

В процессе движения можно выделить два этапа. Вначале колебания нестабильны: амплитуда переменна – сказываются собственные колебания. Этот этап называют *неустановившимся режимом*

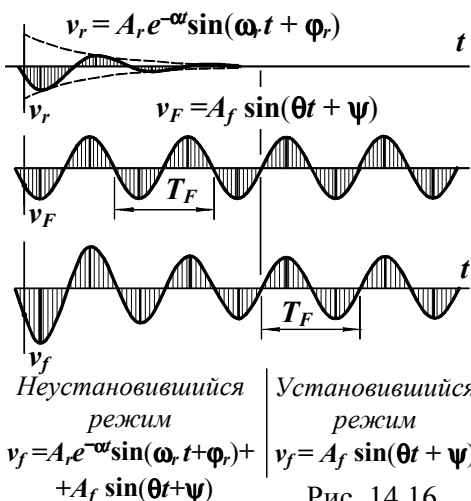


Рис. 14.16

Установившийся режим

### 14.4.2.2. Резонанс при гармоническом воздействии

Сопоставим мгновенные значения силы и перемещения. Из равенств (а) и (14.14) видно, что моменты времени, в которые сила и перемещение достигают наибольших значений, не совпадают. Вынужденные колебания происходят со сдвигом фаз  $\psi$ .

По равенствам (б) и (в) находим

$$\operatorname{tg} \psi = D_2 / D_1 = -2\alpha\theta / (\omega^2 - \theta^2) = -2(\alpha/\omega)(\theta/\omega) / (1 - (\theta/\omega)^2).$$

Исследуем полученное выражение.

Если сопротивления движению нет ( $\alpha = 0$ ), то при

–  $\theta < \omega$  угол  $\psi = 0$ : сдвига фазы нет – направления силы и перемещения совпадают; одновременно они обращаются в нуль, одновременно достигают экстремальных значений;

–  $\theta > \omega$  угол  $\psi = -\pi$  – направления силы и перемещения противоположны; одновременно обращаются в нуль, но в тот момент, когда сила достигает наибольшего значения, перемещение становится минимальными, и наоборот.

Иллюстрацией отмеченному служит таблица 14.1.

Таблица 14.1

Соотношения мгновенных значений силы и перемещения при отсутствии сопротивления

$\theta/\omega$	Фаза $\theta t$							
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
$< 1$								
1								
$> 1$								



При колебаниях с сопротивлением ( $\alpha > 0$ ) характерны три ситуации:

- первая,  $\theta < \omega$  угол  $\psi < 0$  – колебания отстают от возмущающей силы; сдвиг фаз менее  $\pi/2$ ;
- вторая, когда  $\theta = \omega$ , отставание составляет  $\pi/2$ ;
- третья, при  $\theta > \omega$  тело не успевает за силой более чем на  $\pi/2$ .

Таким образом, при наличии сопротивления движению (в реальных конструкциях это всегда так) колеблющееся тело не успевает за силой. Чем выше частота возмущающей силы, тем больше отставание. Зависимость сдвига фаз  $\psi$  от отношения частот  $\theta$  и  $\omega$  при разных коэффициентах

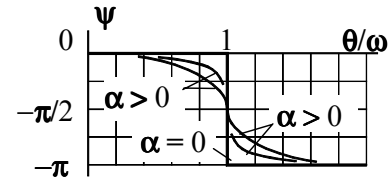


Рис. 14.17

затухания  $\alpha$  отражена на рис. 14.17. Колебания с сопротивлением проиллюстрированы также таблицей 14.2.

Таблица 14.2

**Соотношения мгновенных значений силы и перемещения при сопротивлении колебаниям**

$\theta/\omega$	Фаза $\theta t$							
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
$< 1$								
1								
$> 1$								

Преобразуем выражение (г) амплитуды вынужденных колебаний к виду, удобному для практического применения. В этом равенстве  $F_a/(m\omega^2) = F_a/c = v_{st}$  – статическое перемещение от  $F_a$ . Тогда

$$1/\sqrt{(1-\theta^2/\omega^2)^2+4\alpha^2\theta^2/\omega^4} = k_{din} \quad (14.16)$$

есть **динамический коэффициент**, показывающий, во сколько раз наибольшее перемещение превышает его статическое значение от амплитудной величины возмущающей силы. После введения этого понятия равенство (г) можно записать так:

$$A_f = k_{din} v_{st} \quad (14.17)$$

Величина динамического коэффициента зависит от отношений  $\alpha/\omega$  и  $\theta/\omega$ . Эти зависимости приведены на рис. 14.18. При отсутствии сопротивления ( $\alpha = 0$ ) и равенстве частот свободных и вынужденных колебаний  $k_{din}$  обращается в бесконечность. Если  $\alpha > 0$  (колебания с сопротивлением), динамический коэффициент ограничен, но в зоне совпадения частот принимает наибольшее значение.

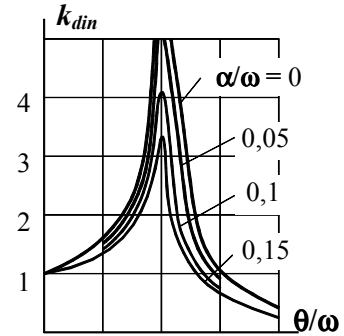


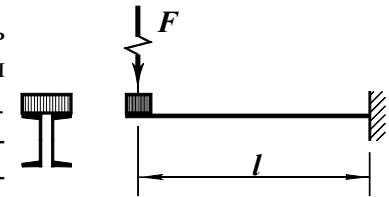
Рис. 14.18

Увеличение амплитуды при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний носит название **резонанса**.

Если в дорезонансном диапазоне динамический коэффициент превышает единицу, то в области  $\theta > \omega$  он резко уменьшается. Деформационный эффект действия высокочастотных сил становится практически неощутимым.

Из используемой в теории предпосылки о подобии статических и динамических перемещений, следует подобие эпюр напряжений. Поэтому  $\sigma_{din} = k_{din} \sigma_{st}$ , где  $\sigma_{st}$  – напряжение от статического действия амплитудной силы.

**Пример 14.9.** Электродвигатель массой  $m = 200$  кг ( $2$  Н·с<sup>2</sup>/см) укреплен на конце консольной балки (рис. 14.19). Его ротор вращается со скоростью  $n = 500$  об/мин. При работе двигателя возникает возмущающая сила  $F$ ,



изменяющаяся по гармоническому закону с амплитудным значением  $F_a = 600$  Н. Коэффициент сопротивления  $r = 8$  Н·с/см. Найдем наибольшее нормальное напряжение в балке, если она выполнена из двух швеллеров № 14; длина  $l = 1,6$  м. Материал сталь.

Рис. 14.19

Коэффициент поперечной жесткости балки в месте установки двигателя  $c_y = 3EJ_x/l^3 = 3 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 491/160^3 = 14,4 \text{ кН/см}$ .

Частота собственных колебаний  $\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{14400/2} = 84,8 \text{ 1/с}$ .

Частота возмущающей силы  $\theta = \pi n/30 = 3,14 \cdot 500/30 = 52,3 \text{ 1/с}$ .

Коэффициент затухания  $\alpha = r/(2m) = 8/(2 \cdot 2) = 2 \text{ 1/с}$ .

Динамический коэффициент  $k_{din} = 1/\sqrt{(1-\theta^2/\omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2/\omega^4} = 1/\sqrt{(1-52,3^2/84,8^2)^2 + 4 \cdot 2^2 \cdot 52,3^2/84,8^4} = 1,61$ .

Нормальные напряжения  $max\sigma_z = maxM_x/W_x = (mg + k_{din}F_a)l/W_x = (2 \cdot 981 + 1,61 \cdot 600)160/(2 \cdot 70,2) = 3340 \text{ Н/см}^2 = 3,34 \text{ кН/см}^2$ .

**14.4.2.3. Колебания в условиях резонанса**

Ознакомимся теперь со спецификой колебаний при совпадении частот собственных колебаний и возмущающей силы. При этом рассмотрим самый неблагоприятный случай – колебания без сопротивления ( $\alpha = 0$ ).

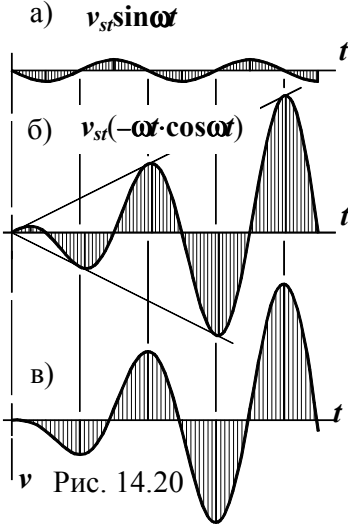
Уравнение движения тела без сопротивления имеет вид

$$\ddot{v} + \omega^2 v = (F_a/m) \sin \theta t.$$

Его общее решение  $v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + D_1 \sin \theta t + D_2 \cos \theta t$  с коэффициентами частного решения  $D_1 = v_{st}/(1-\theta^2/\omega^2)$  и  $D_2 = 0$ . Введя начальные условия  $v = 0$  и  $\dot{v} = 0$  при  $t = 0$ , запишем его так:

$$v = v_{st}(\sin \theta t - (\theta/\omega) \sin \omega t)/(1-\theta^2/\omega^2).$$

В рассматриваемых условиях резонанса оно представляет собой неопределенность типа 0/0. Применяя



правило Лопиталья, получаем

$$v = v_{st}(\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t)/2.$$

Таково уравнение колебаний при резонансе. Первое слагаемое в нем представляет периодическую ограниченную функцию (рис. 14.20 а). Второе – периодическую функцию с амплитудой, возрастающей пропорционально времени (рис. 14.20 б). Таким образом, амплитуда при резонансе растет постепенно. Требуется некоторое время, чтобы “раскачать” систему. График изменения суммарного перемещения показан на рис. 14.20 в.

В реальных условиях из-за сопротивления движению не происходит неограниченного роста амплитуды. Тем не менее факт увеличения напряжений, деформаций и перемещений при резонансе неоспорим и его необходимо учитывать при расчете конструкций.

Одновременно отметим, что при больших перемещениях становится сомнительной правомерность применения дифференциальных уравнений движения. Сомнительны и сделанные на их основе выводы.

Степень достоверности результатов расчетов конструкции обычно оценивают, анализируя, насколько реальные условия ее работы согласуются с предпосылками примененной теории.

**14.4.2.4. Некоторые частные случаи действия возмущающей силы**

Рассмотрим три вида неперiodического силового воздействия. Во всех случаях будем считать, что коэффициент затухания  $\alpha = 0$ , а система до приложения нагрузки находилась в состоянии покоя.

Линейный рост силы (рис. 14.21 а).

Сила растет по закону  $F = Ft$ .

Частное решение уравнения (14.12) имеет вид  $v_{par} = Ft/(m\omega^2) = Ft/c$ .

Общее решение:  $v = A \sin(\omega t + \phi) + Ft/c$ .

Используя условия: при  $t = 0$  начальные



Рис. 14.21

перемещение  $v = 0$  и скорость  $\dot{v} = 0$ , последовательно находим  $\phi = 0$ ,  $A = -F/(c\omega)$ . Итак,  $v = (F/c)(t - (\sin \omega t)/\omega)$ . График движения тела показан на рис. 14.21 б. Перемещение представляет собой сумму линейно возрастающей статической части  $Ft/c$  и синусоидальной динамической добавки с амплитудой  $F/(c\omega)$ . Из графика движения видно, что полное перемещение (а следовательно, напряжения и деформации) в отдельные моменты времени превышают мгновенные статические значения.

Постоянная внезапно приложенная нагрузка (рис. 14.22 а).

Сила постоянна:  $F = F_a$ .

Частное решение уравнения (14.12) –  $v_{par} = F_a / (m\omega^2) = F_a / c = v_{st}$ .

Общее решение  $v = A \sin(\omega t + \varphi) + v_{st}$ . При оговоренных начальных условиях оно будет иметь вид  $v = v_{st}(1 - \cos \omega t)$ .

При внезапном приложении силы, остающейся в дальнейшем постоянной, тело совершает гармонические колебания около положения статического равновесия (рис. 14.22 б). Наибольшее перемещение при этом в два раза превышает статическое. Динамический коэффициент  $k_{din} = 2$ .

Действие постоянной нагрузки в течение короткого промежутка времени (рис. 14.23 а).

Этот случай можно свести к предыдущему. Представим, что при  $t = 0$  к телу внезапно приложена постоянная сила  $F_a$ , в дальнейшем остающаяся неизменной. В момент  $t = t_0$  на него подействовала такая же сила навстречу первой (рис. 14.23 б). Теперь очевидно, что тело будет участвовать в двух движениях (рис. 14.23 в). Разность их (рис. 14.23 г) и есть зависимость перемещения от времени.

Нетрудно заметить, что величина наибольшего перемещения после разгрузки зависит от продолжительности импульса. Неблагоприятная длительность – полупериод собственных колебаний. При ней динамический коэффициент  $k_{din} = 2$ .

Рассмотренные частные случаи действия непериодических сил не только дают представление о поведении упругой системы, но и иллюстрируют методику анализа процессов изменения напряжений, деформаций и перемещений при динамических воздействиях.

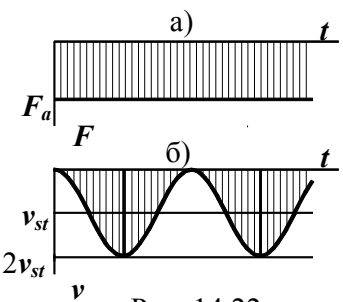


Рис. 14.22

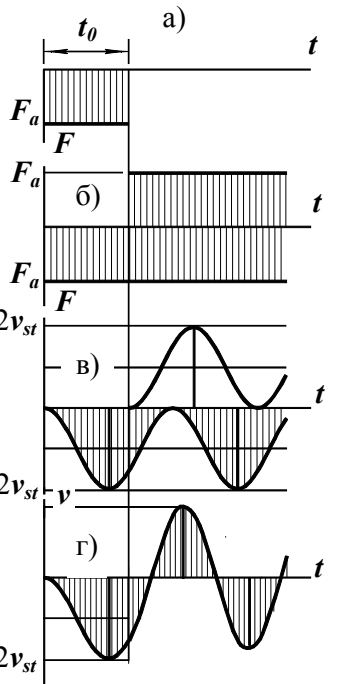


Рис. 14.23

Используя описанные приемы, можно воспроизвести поведение конструкции при других видах возмущающих сил.

## 14.5. Ударное воздействие

*Под ударом будем понимать внезапное изменение скорости тела, вызванное быстрым изменением сил.*

Задача о напряжениях, деформациях и перемещениях, возникающих в упругой конструкции при ударе, может быть решена методами теории колебаний – установлен закон движения тела, найдены моменты времени, когда характеристики напряженно-деформированного состояния достигают экстремумов. Однако в практических расчетах достаточно воспроизвести самое опасное состояние конструкции, не анализируя весь процесс движения. Поэтому в расчетах на удар часто применяют энергетический метод, позволяющий определить максимальные значения динамических сил, а по ним – напряжений, деформаций и перемещений.

Энергетический метод основан на законе сохранения энергии в форме баланса механических ее составляющих.

Метод опирается на следующие предпосылки:

– удар *неупругий*, т.е. соударяемые тела после соприкосновения движутся совместно;

– *контактное взаимодействие упруго*, т.е. энергия пластического деформирования в месте контакта соударяемых тел не учитывается;

– *волны деформаций распространяются мгновенно*, т.е. эпюры статических и динамических перемещений подобны;

– *конструкция испытывает упругие деформации*;

– *силы внутреннего сопротивления и сопротивления среды не учитываются*.

На основе перечисленных предпосылок удастся сформировать достаточно простые методы прогнозирования напряжений, деформаций и перемещений в конструкции, подверженной удару.

### 14.5.1. Напряжения и деформации в невесомой конструкции при ударе.

#### Динамический коэффициент

Методику составления уравнения энергетического баланса и способ сведения динамической задачи к задаче статической рассмотрим на примере удара падающего тела по невесомой упругой системе (рис. 14.24).

На рисунке отражены три состояния упругой конструкции:

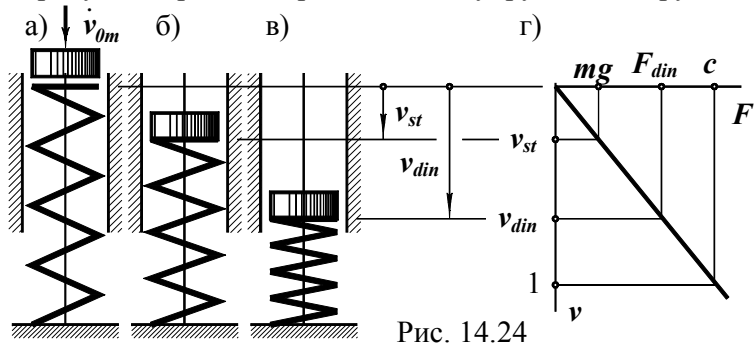


Рис. 14.24

- начальное недеформированное (рис. 14.24 а);
- деформированное при статическом действии тела (рис. 14.24 б);
- при максимальных деформациях после удара (рис. 14.24 в).

В первый момент времени, когда падающее тело коснулось конструкции, но еще не вызвало ее деформаций, механическая энергия равна<sup>1</sup>

$$K + P = m\dot{v}_{0m}^2/2 + P.$$

Здесь  $K$  – кинетическая энергия ударяющего тела;  $P$  – его потенциальная энергия положения (по отношению к некоторому воображаемому уровню);  $m$  – масса падающего тела;  $\dot{v}_{0m}$  – скорость тела в момент соударения.

После контакта с упругой системой скорость движения тела уменьшается и в некоторый момент (рис. 14.24 в) достигает нуля – тело на мгновение останавливается перед началом движения вверх. Механическая энергия в этом состоянии

$$P - mg \cdot v_{din} + F_{din} v_{din} / 2,$$

где  $P - mg \cdot v_{din}$  – потенциальная энергия положения тела (по отношению к тому же уровню);  $F_{din}$  – условная динамическая сила;  $v_{din}$  – динамическое перемещение;  $F_{din} v_{din} / 2$  – потенциальная энергия деформации упругой конструкции (рис. 14.24 г; ее геометрическим образом является площадь заштрихованного треугольника).

<sup>1</sup> От англ. *kinetic energy* – кинетическая энергия; *potential energy* – потенциальная энергия.

Приравняв значения энергии в рассмотренные моменты времени, приходим к уравнению энергетического баланса

$$m\dot{v}_{0m}^2/2 + P = P - mgv_{din} + F_{din}v_{din}/2.$$

$$\text{Введем обозначение } F_{din}/mg = v_{din}/v_{st} = k_{din}, \quad (14.18)$$

в котором  $k_{din}$  – динамический коэффициент;  $v_{st}$  – статическое перемещение точки соударения от спокойно лежащего тела.

После несложных алгебраических преобразований условие баланса энергии принимает форму квадратного уравнения относительно динамического коэффициента  $k_{din}^2 - 2k_{din} - \dot{v}_{0m}^2/(gv_{st}) = 0$ .

$$\text{Из него} \quad k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \dot{v}_{0m}^2/(gv_{st})} \quad (14.19)$$

(отрицательный корень уравнения отбрасываем).

Теперь задача расчета на ударное воздействие сведена к статической задаче. Например, напряжения при ударе  $\sigma_{din} = k_{din}\sigma_{st}$ , где  $\sigma_{st}$  – напряжения от статического действия силы, равной весу упавшего тела.

**Пример 14.10.** На конец двутавровой консольной балки длиной  $l = 3$  м падает тело массой  $m = 200$  кг с высоты  $h = 4$  см (рис. 14.25). Двутавр № 24.

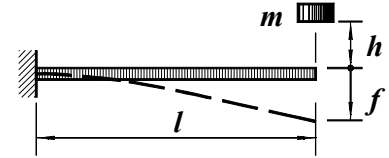


Рис. 14.25

Найдем прогиб на конце и нормальные напряжения от удара.

Квадрат скорости тела  $\dot{v}_{0m}^2 = 2gh$ .

$$\begin{aligned} \text{Статический прогиб на конце } f_{st} &= mgl^3/(3EJ_x) = \\ &= 200 \cdot 9,81 \cdot 3^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}) = 0,0026 \text{ м} = 0,26 \text{ см}. \end{aligned}$$

Динамический коэффициент

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \dot{v}_{0m}^2/(gv_{st})} = 1 + \sqrt{1 + 2h/f_{st}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4/0,26} = 6,64.$$

Максимальный прогиб на конце балки

$$f_{din} = k_{din} f_{st} = 6,64 \cdot 0,26 = 1,73 \text{ см}.$$

$$\begin{aligned} \text{Максимальное напряжение от удара } \max \sigma_{din} &= k_{din} \cdot \max \sigma_{st} = \\ &= k_{din} mgl/W_x = 6,64 \cdot 200 \cdot 9,81 \cdot 3 / (289 \cdot 10^{-6}) = 13,5 \text{ кН/см}^2. \end{aligned}$$

#### 14.5.2. Учет массы деформируемой системы при расчете на удар

Нередко в расчетах на удар приходится учитывать массу конструкции. В таких случаях в точку соударения помещают тело массой

$m_{red}$  (рис. 14.26)<sup>1</sup>. Оно отражает инерционные свойства конструкции, которую по-прежнему рассматривают как невесомую. Найдем динамический коэффициент при расчете на удар по этой схеме.

На рис. 14.26 изображены состояния упругой системы:

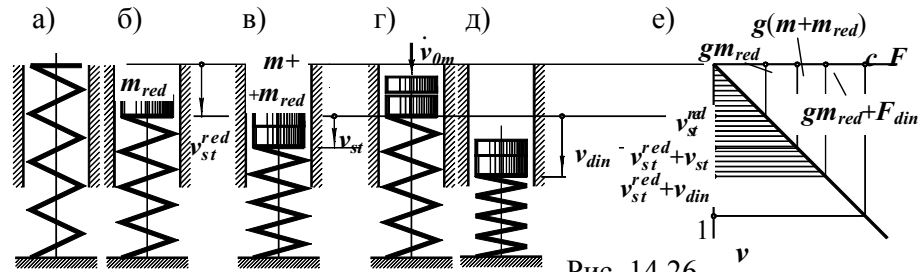


Рис. 14.26

- естественное ненапряженное (рис. 14.26 а);
- статическое деформированное телом, имитирующим массу конструкции (рис. 14.26 б);
- деформированное при статическом действии двух тел –  $m$  и  $m_{red}$  (рис. 14.26 в);
- в момент соударения (рис. 14.26 г);
- в момент остановки упавшего тела (рис. 14.26 д).

Если падающее тело непосредственно перед соударением имеет скорость  $\dot{v}_{0m}$ , то скорость совместного движения тел можно найти по закону сохранения количества движения:

$$m\dot{v}_{0m} = (m_{red} + m)\dot{v}_1,$$

откуда  $\dot{v}_1 = m\dot{v}_{0m}/(m_{red} + m)$ .

Механическая энергия при этом равна

$$(m_{red} + m)\dot{v}_1^2/2 + P + m_{red}g v_s^{red},$$

или  $m^2\dot{v}_{0m}^2/(2(m_{red} + m)) + P + m_{red}g v_s^{red}/2$ .

Последние слагаемые в выражениях энергии – потенциальная энергия деформации упругой конструкции от тела массой  $m_{red}$ .

В момент максимальной деформации энергия равна

$$P - (m_{red} + m)g v_{din} + (m_{red}g + F_{din})g(v_s^{red} + v_{din})/2.$$

Иллюстрацией к записи последнего слагаемого – потенциальной энергии деформации – служит рис. 14.26 е.

<sup>1</sup> Индекс от англ. *reduction* – приведение; о выборе  $m_{red}$  – ниже.

Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$m^2\dot{v}_{0m}^2/(2(m_{red} + m)) + P + m_{red}g v_s^{red}/2 = P - (m_{red} + m)g v_{din} + (m_{red}g + F_{din})g(v_s^{red} + v_{din})/2.$$

После преобразований с использованием обозначений (14.18) и соотношения  $F_{din}/v_{din} = m_{red}g/v_{st}^{red}$  (см. рис. 14.26 е) приходим к квадратному уравнению  $k_{din}^2 - 2k_{din} - m\dot{v}_{0m}^2/(v_{st}(m_{red} + m)g) = 0$ .

Из него  $k_{din} = 1 + \sqrt{1 + m\dot{v}_{0m}^2/(v_{st}(m_{red} + m)g)}$ . (14.20)

Сопоставление результатов (14.19) и (14.20) показывает, что учет массы деформируемой конструкции приводит к меньшему значению динамического коэффициента.

Из тех же формул видно, что динамический коэффициент всегда больше единицы. В частном случае, когда  $\dot{v}_{0m}^2 = 0$ ,  $k_{din} = 2$ . Это соответствует внезапному приложению постоянной нагрузки, рассмотренному выше, и полностью согласуется с результатом, полученным методами теории колебаний.

Эффект ударного воздействия в значительной мере зависит от жесткости конструкции. Чем она жестче (меньше  $v_{st}$ ), тем больше  $k_{din}$ . Так, статические напряжения в гладком стержне, изображенном на рис. 14.27 а, и опасном сечении стержня с местной выточкой (рис. 14.27 б) одинаковы. Динамические же напряжения во втором случае (рис. 14.27 б) будут больше, так как у него меньше статическое перемещение от веса падающего тела.

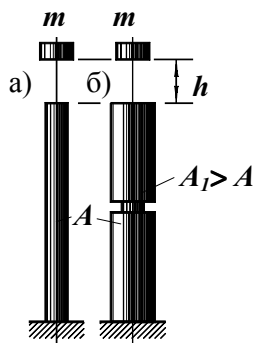


Рис. 14.27

Другой пример (рис. 14.28). Груз, падающий в точку а балки, вызовет большие динамические напряжения нежели такой же груз, падающий с такой же высоты, но в точку b. Это объясняется тем что

- коэффициент жесткости балки в точке а –  $c_{ay}$  в 8 раз больше чем  $c_{by}$  (прогиб пропорционален кубу расстояния от точки до защемления);
- статические напряжения в первом случае (удар в точке а) всего в два раза меньше чем во втором.

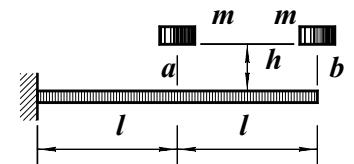


Рис. 14.28

Благодаря простоте, энергетический метод удобен для практических расчетов на удар. Однако точность результатов при этом невысока. Формулы (14.19) и (14.20) дают представление о количественном порядке напряжений, деформаций и перемещений при ударе. Попытки уточнить результаты на расчетных схемах, полнее отражающих динамические свойства конструкции и процесса соударения, приводят к большим трудностям. Невозможно элементарными средствами выявить напряженно-деформированное состояние в зоне контакта и характер изменения его во времени; большие затруднения возникают при учете волнового процесса распространения напряжений и деформаций; трудно поддается анализу и описанию рассеяние энергии при ударе. Поэтому на практике изложенные методы нашли широкое применение. Используя их, следует иметь в виду данный критический анализ.

### 14.5.3. Понятие о коэффициенте приведения массы

Как было отмечено выше, учет инерционных свойств упругой конструкции воспроизводится введением в место удара элемента, обладающего массой. Естественно возникает вопрос о критерии соответствия точечной массы и массы конструкции. Вообще говоря, такой критерий выбирают в зависимости от поставленной задачи и предпосылок, в рамках которых она решается. Распространенным и часто используемым является эквивалент по кинетической энергии, иногда – по количеству движения. Не исключено использование и других эквивалентов. Возможно применение разных критериев на разных этапах одной задачи.

В тех механических моделях, где инерционные свойства упругой конструкции отображены одним весомым элементом, его масса  $m_{red}$  определяется по формуле,

$$m_{red} = k_{red} m_{str}$$

где  $k_{red}$  – коэффициент приведения массы;

$m_{str}$  – масса конструкции.

Численное значение коэффициента определяется выбранным критерием отображения.

Методику определения коэффициента приведения массы проиллюстрируем примерами.

**Пример 14.11.** Допустим, что при расчете на растягивающий удар (рис. 14.29) потребовалось учесть массу стержня. Место удара – нижний конец. Найдем коэффициент приведения массы к точке удара. В качестве критерия примем кинетическую энергию.

Представим стержень, изображенный на рис. 14.29 а, невесомой моделью с точечной массой на нижнем конце (рис. 14.29 б).

От вертикальной силы  $F$ , приложенной на свободной конце, перемещение произвольного сечения  $w = Fz / (EA)$ , а конца стержня  $f = Fl / (EA)$ .

Отсюда  $w = fz/l$ . Скорости движения  $\dot{w} = \dot{f}z/l$ .

Кинетическая энергия стержня

$$K_{str} = \int_0^l \rho A (\dot{w})^2 dz / 2 = \int_0^l \rho A (\dot{f}z/l)^2 dz / 2 = \\ = \rho A l (\dot{f})^2 / 6 = m_{str} (\dot{f})^2 / 6.$$

Точечная масса, двигаясь по тому же закону, что и конец стержня, обладает кинетической энергией  $K_m = m_{red} (\dot{f})^2 / 2 = k_{red} m_{str} (\dot{f})^2 / 2$ . Из равенства энергий движения  $K_{str} = K_m$  находим коэффициент приведения массы  $k_{red} = 1/3$ .

**Пример 14.12.** Найдем коэффициент приведения массы к концу балки, подверженной удару на свободном конце (рис. 14.30). Критерий тот же – кинетическая энергия.

От силы  $F$ , приложенной на конце, (см. пример 7.9)

$$v = F(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/(EJ_x); f = Fl^3/(3EJ_x).$$

Из этих равенств  $v = 3f(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/l^3$ . Скорость движения точек оси балки  $\dot{v} = 3\dot{f}(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/l^3$ . Кинетическая энергия

$$K_{str} = \int_0^l \rho A (\dot{v})^2 dz / 2 = \int_0^l \rho A (3\dot{f}(z^3/6 - l^2z/2 + l^3/3)/l^3)^2 dz / 2 = 33 m_{str} (\dot{f})^2 / 280.$$

У точечной массы  $K_m = m_{red} (\dot{f})^2 / 2 = k_{red} m_{str} (\dot{f})^2 / 2$ . Из равенства кинетических энергий следует, что  $k_{red} = 33/140$ .

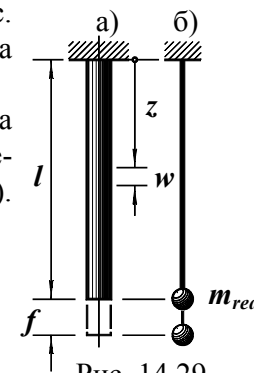


Рис. 14.29

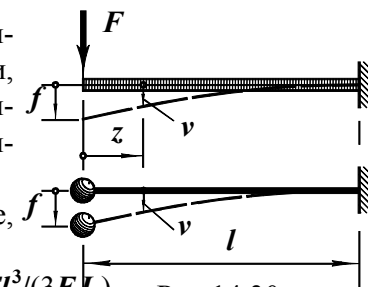
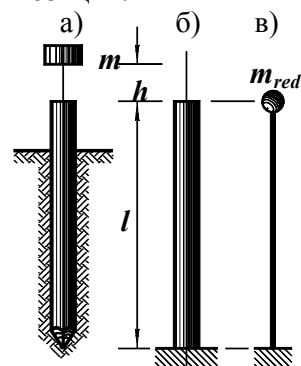


Рис. 14.30

Продемонстрированные примеры показывают, что коэффициент приведения массы зависит от

- точки удара;
- направления движения ударяющего тела;
- критерия эквивалентности.

Овладев техникой вычисления коэффициента  $k_{red}$ , можно в каждом конкретном случае, используя дополнительные данные анализируемой ситуации, обоснованно назначить критерий приведения, определить числовое значение коэффициента и дать количественный прогноз результата ударного воздействия нагрузки. Известны случаи, когда такой прогноз приходилось давать, просчитывая конструкцию с разными критериями приведения, – анализируя процесс с разных позиций.



**Пример 14.13.** Сосновую сваю длиной  $l = 6$  м и диаметром  $d = 24$  см забивают копровым молотом массой  $m = 300$  кг, падающим с высоты  $h = 0,5$  м (рис. 14.31 а). Расчетное сопротивление сосны на сжатие  $R = 13$  МПа; плотность древесины  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Проверим сваю на прочность.

Примем простейшую расчетную схему (рис. 14.31 б), полагая, что при ударе нижний конец не смещается (окончание процесса забивания), и пренебрегая трением грунта по боковой поверхности сваи (это предположение вносит ошибку, увеличивающую напряжения). В расчете учтем массу сваи. Механическая модель изображена на рис. 14.31 в.

Статические сжимающие напряжения в свае:  $\sigma_{st} = N/A$ .

$$N = mg = 300 \cdot 9,81 = 2943 \text{ Н. } A = (\pi d^2/4) = 3,14 \cdot 0,24^2/4 = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

$$\sigma_{st} = 2943/(4,52 \cdot 10^{-2}) = 6,51 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,0651 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент (14.20)

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{m v_{0m}^2}{v_{st}(m_{red} + m)g}}.$$

Вычислим входящие в него:

- скорость молота перед ударом  $v_{0m} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5} = 3,13$  м/с.
- статическое перемещение –

$$v_{st} = \Delta l = NI/(EA) = 2943 \cdot 6 / (10^{10} \cdot 4,52 \cdot 10^{-2}) = 3,91 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0391 \text{ мм.}$$

– приведенную массу –

$$m_{red} = k_{red} m_{str} = k_{red} \rho A l = 0,333 \cdot 800 \cdot 4,52 \cdot 10^{-2} \cdot 6 = 72,3 \text{ кг.}$$

$$\text{Теперь } k_{din} = 1 + \sqrt{1 + 300 (3,13)^2 / (3,91 \cdot 10^{-5} (72,3 + 300) 9,81)} = 145.$$

Динамические напряжения

$$\sigma_{din} = \sigma_{st} \cdot k_{din} = 0,0651 \cdot 145 = 9,41 \text{ МПа.}$$

Напряжения меньше расчетного сопротивления, разрушения сваи в процессе ее забивания не произойдет (в примере оценено состояние ствола сваи, головка не рассматривалась; сделанный вывод, естественно, этим и ограничивается).

## 14.6. Прочность материалов

### при циклически изменяющихся напряжениях

Многие сооружения, элементы строительных конструкций и машин подвержены циклически изменяющимся напряжениям. Это

- высотные сооружения типа башен, труб, мачт, антенн, подверженных ветровым нагрузкам;
- авто- и железнодорожные мосты, подкрановые балки, элементы погрузочно-разгрузочных эстакад, воспринимающих воздействия подвижных составов;
- движущиеся элементы подъемно-транспортных и строительных машин и т.д.

Прочность таких конструкций не может быть оценена методами статического расчета. Для них требуются специальные экспериментальные исследования и методы расчетов.

#### 14.6.1. Понятие об усталостном разрушении

Конструкции, подверженные циклическим нагрузкам, разрушаются, как правило, при напряжениях, меньших тех, которые способны выдерживать от статического воздействия. Специфичен и характер разрушения:

- отсутствие остаточных деформаций;
- на поверхности излома обычно две области – постепенно развивающейся трещины и мгновенного хрупкого отрыва.

Первые исследователи этого явления предполагали, что под действием циклических напряжений в материале происходят физико-механические изменения он – “устаёт”. Хотя в последующем такое толкование процесса опровергнуто, этот термин укоренился

в

практике. Под **усталостью** материала в настоящее время понимают процесс накопления повреждений при циклических напряжениях, заканчивающийся хрупким разрушением.

Способность материала воспринимать переменные напряжения, не разрушаясь, носит название **выносливости**.

Для количественного прогнозирования поведения элементов конструкций в рассматриваемых условиях необходимо ввести новые характеристики воздействия и прочности материалов.

**14.6.2. Основные виды и характеристики циклов напряжений**

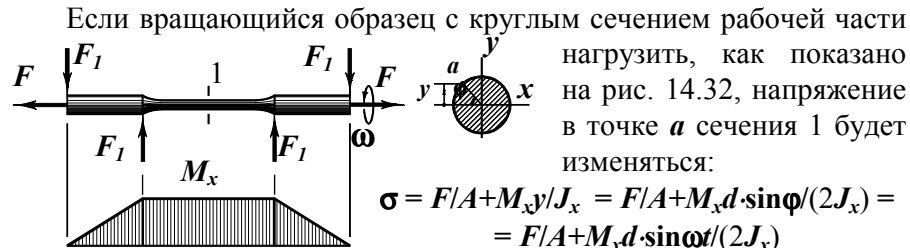


Рис. 14.32 (*d* – диаметр сечения, *J* – осевой момент инерции  $\omega$  – угловая скорость вращения образца).

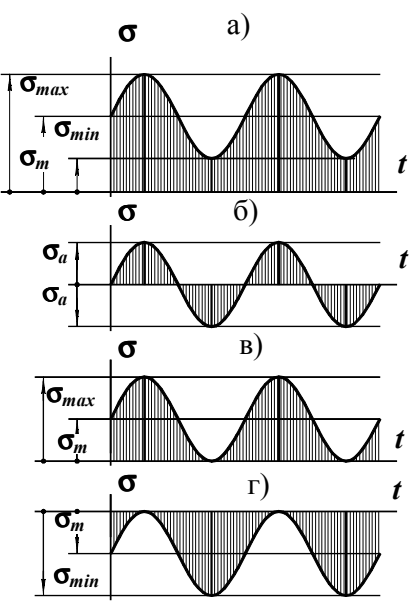


Рис. 14.33

Изменение напряжения за один период называется **циклом напряжений**. График зависимости напряжения от времени показан на рис. 14.33 а. Экстремальные значения напряжений равны

$$\sigma_{max} = F/A + M_x d / (2J_x),$$

$$\sigma_{min} = F/A - M_x d / (2J_x).$$

Они являются количественными характеристиками цикла.

Среднее напряжение и амплитуда цикла соответственно равны

$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2,$$

$$\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2. \quad (14.21)$$

В зависимости от отношения

$$\sigma_{min} / \sigma_{max} = r_{as}, \quad (14.22)$$

которое носит название **коэффициента асимметрии цикла**, циклы

делят на знакопостоянные ( $r_{as} > 0$ ) и знакопеременные ( $r_{as} < 0$ ). Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии называют **подобными**.

Если  $r_{as} = -1$ , цикл называется **симметричным** (рис. 14.33 б), в противном случае **асимметричным**.

Частными видами асимметричных циклов являются такие, у которых  $r_{as} = 0$  при  $\sigma_{min} = 0$  или  $1/r_{as} = 0$  при  $\sigma_{max} = 0$ . Они называются **отнулевыми** или **пульсационными**). Графики отнулевых циклов показаны на рис. 14.33 в, г.

Принято считать, что усталостная прочность не зависит от закона изменения напряжения во времени и частоты цикла. В таком случае для оценки выносливости конструкции достаточно характеризовать цикл напряжений лишь двумя величинами –  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  или  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ .

Перейдем к количественным характеристикам выносливости материала и конструкции.

**14.6.3. Понятие о пределе выносливости**

Определение механических характеристик выносливости материала производят на специальных машинах и вращающихся образцах, подобных изображенному на рис. 14.32. Варируя силами *F* и *F*<sub>1</sub>, задают различные значения  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  и определяют количество циклов *N* до разрушения. Наконец, устанавливают такие значения  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$ , при которых разрушение не происходит при любом *N*. **Количественной характеристикой усталостной прочности является предел усталости, или предел выносливости.**

Пределом выносливости называют наибольшее  $\sigma_{max}$  (или  $\sigma_{min}$ , если оно по величине превышает  $\sigma_{max}$ ), которое образец выдерживает неограниченное число циклов.

Обозначают предел выносливости  $\sigma_r$ , где *r* – коэффициент асимметрии цикла. При этом указывают численное значение *r*. Частные случаи обозначений предела выносливости:

- $\sigma_{-1}$  – при симметричном цикле;
- $\sigma_0$  – при отнулевом.

График, показывающий связь числа циклов до разрушения с максимальным напряжением носит название **кривой выносливости**



(кривой усталости; диаграммы Вёлера<sup>1</sup>). Кривая усталости для симметричного цикла показана на рис. 14.34.

У большинства черных металлов кривая выносливости асимптотически приближается к горизонтали. Поэтому для них термин “предел выносливости” имеет безусловный смысл. У цветных металлов и закаленных до высокой твердости сталей такого предела нет. В подобных случаях вводят понятие *условного предела выносливости* – напряжения, которое образец может воспринимать в течение  $10^8$  циклов.

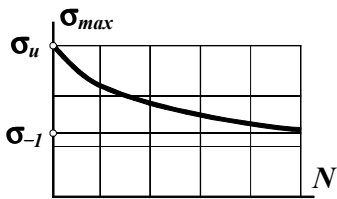


Рис. 14.34

#### 14.6.4. Диаграмма усталостной прочности.

##### Запас выносливости образца

Совокупность кривых усталости позволяет очертить область, ограничивающую безопасные значения характеристик циклов. Такую область строят в координатах  $\sigma_m - \sigma_a$  (рис. 14.35) и называют *диаграммой усталостной прочности (пределных амплитуд, выносливости)*. Если точка, соответствующая некоторому циклу напряжений со средним напряжением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$ , располагается внутри диаграммы, усталостного разрушения не произойдет. Близость отображающей точки к границе характеризует степень опасности цикла.

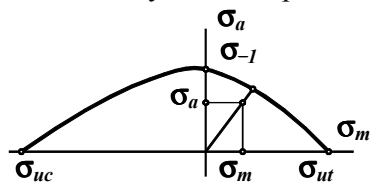


Рис. 14.35

Если точка, соответствующая некоторому циклу напряжений со средним напряжением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$ , располагается внутри диаграммы, усталостного разрушения не произойдет. Близость отображающей точки к границе характеризует степень опасности цикла.

Построение диаграммы усталостной прочности требует многочисленных и длительных испытаний. Поэтому на практике используют приближенные ее варианты. Широкое применение получила диаграмма (рис. 14.36), построенная по трем точкам, соответствующим пределам выносливости при симметричном (точка *c*) и отнулевом (точка *d*) циклах, а также статическому разрушению (точка *g*).

Через точки *c*, *d* и *g* проводят прямые *c(d)f*, *gf* под  $45^\circ$  к оси абсцисс до пересечения. Уравнения прямых:

$$-cf: \sigma_{ua} = \sigma_{-1} + (1 - 2 \sigma_{-1} / \sigma_0) \sigma_{um}; \quad (14.23)$$

<sup>1</sup> Вёлер (1819–1914) – немецкий ученый и инженер, с работ которого началось экспериментальное изучение усталости материалов.

$$-fg: \sigma_{ua} = \sigma_{ut} - \sigma_{um}. \quad (14.24)$$

В формулах (14.23) и (14.24)  $\sigma_{ua}$  и  $\sigma_{um}$  – предельные значения амплитуды и среднего напряжения.

Если образец подвержен циклическому напряжению с  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ , характеризуемому точкой *h*, степень безопасности нагружения может быть оценена отношением отрезков *Of/Oh*. Это отношение носит название *коэффициента запаса выносливости образца*.

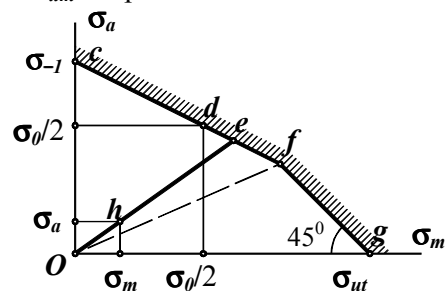


Рис. 14.36

Обозначим его  $n_{es}$ . Он показывает, во сколько раз характеристики подобного предельного цикла выше чем у заданного.

Когда отображающая точка *h* лежит выше прямой *Of*, определяющей границей является прямая *cf*. Коэффициент запаса выносливости по равенству (14.33)  $n_{es} \sigma_a = \sigma_{-1} + (1 - 2 \sigma_{-1} / \sigma_0) n_{es} \sigma_m$  равен

$$n_{es} = \sigma_{-1} / (\sigma_a - (1 - 2 \sigma_{-1} / \sigma_0) \sigma_m). \quad (14.35)$$

Когда ниже, – по равенству (14.34)

$$n_{es} = \sigma_{ut} / (\sigma_a + \sigma_m). \quad (14.36)$$

Действительным является меньший из этих двух значений. Методика определения коэффициента запаса образца проиллюстрирована для положительного (растягивающего) среднего напряжения цикла. Если оно сжимающее, вычисление  $n_{es}$  аналогично описанному.

*Элемент* реальной конструкции, подверженный циклическому напряжению, обладает обычно меньшим запасом выносливости чем *образец*. Рассмотрим эту сторону обсуждаемого воздействия.

#### 14.6.5. Основные факторы, влияющие на предел выносливости

Предел выносливости зависит от многих геометрических, технологических и других особенностей конструктивного элемента. Остановимся на наиболее важных из них: концентрации напряжений, качестве поверхности, абсолютных размерах.

##### Влияние концентрации напряжений

Усталостные трещины развиваются, как правило, в местах концентрации напряжений. Влияние этой особенности оценивают *коэффициентом чувствительности q*. Он зависит от механических

характеристик материала и *теоретического коэффициента концентрации*  $\alpha_\sigma$ . Чем выше предел прочности  $\sigma_u$ , тем больше коэффициент чувствительности. У высокопрочных сталей  $q \approx 1$ , у углеродистых  $q \approx 0,6 \dots 0,8$ . У чугуна  $q \approx 0$ . Графики зависимости коэффициента чувствительности от предела прочности при разных значениях теоретического коэффициента концентрации приведены на рис. 14.37.

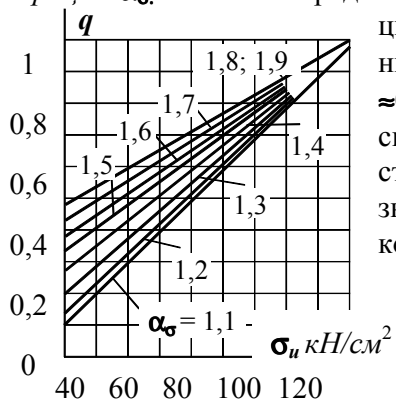


Рис. 14.37

счет реальных свойств материала.

#### Влияние качества поверхности детали

Качество поверхности детали сильно влияет на предел выносливости. Степень влияния чистоты поверхности зависит от прочности материала. Иллюстрацией отмеченного служит рис. 14.38. Если принять за 100 % предел выносливости образца с полированной поверхностью (прямая 1), то при более грубой обработке усталостная прочность будет ниже. Степень снижения усиливается с ростом предела прочности.

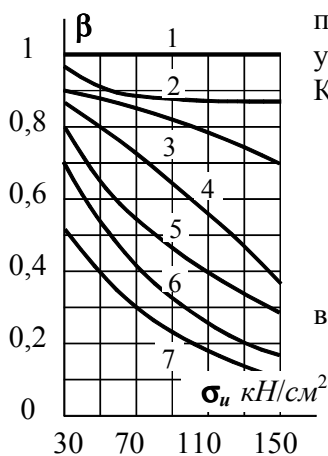


Рис. 14.38

В расчетах на выносливость качество поверхности оценивают *коэффициентом поверхностной чувствительности*  $\beta$ .

У высокопрочных сталей  $q \approx 1$ , у углеродистых  $q \approx 0,6 \dots 0,8$ . У чугуна  $q \approx 0$ . Графики зависимости коэффициента чувствительности от предела прочности при разных значениях теоретического коэффициента концентрации приведены на рис. 14.37.

В расчетах на выносливость фигурирует так называемый *эффективный коэффициент концентрации*  $k_\sigma = 1 + q \cdot (\alpha_\sigma - 1)$ , (14.27) снижающий эффект концентрации за

#### Влияние абсолютных размеров детали

Размеры детали также являются важным фактором, влияющим на предел выносливости. В расчетах он представлен *масштабным коэффициентом*  $\alpha_m$ . Числовое значение коэффициента  $\alpha_m$  зависит не только от размеров детали, но и от материала, качества обработки поверхности, наличия источников концентрации напряжений. Как пример, на рис. 14.39 приведены графики зависимости масштабного коэффициента от диаметра вала, работающего в условиях изгиба с кручением. Кривые относятся

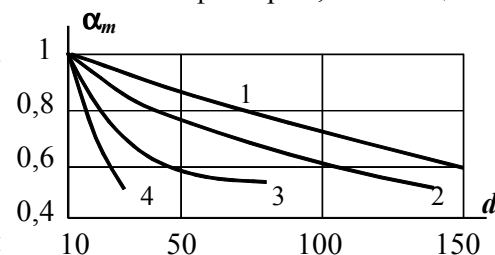


Рис. 14.39

Кривые относятся

- 1 – углеродистая сталь при отсутствии местных напряжений;
- 2 – легированная сталь без концентрации напряжений и углеродистая сталь при умеренной концентрации;
- 3 – легированная сталь при наличии концентраторов;
- 4 – стали с сильной концентрацией напряжений.

#### 14.6.6. Расчет на прочность при циклических напряжениях

Условие прочности при переменных напряжениях требует, чтобы *фактический коэффициент запаса выносливости* был не менее допустимого:

$$n_{es} = [n_{es}]. \quad (14.28)$$

Фактический коэффициент определяют по коэффициенту запаса образца, внося в него коррективы, учитывающие

- концентрацию напряжений;
- чистоту поверхности,
- размеры детали.

Поправочные коэффициенты вносят в амплитудную часть цикла напряжений. С учетом названных поправок формулы фактического коэффициента запаса выносливости имеют вид

$$n_{es} = \sigma_{-1} / (k_\sigma \sigma_a / (\beta \alpha_m) - (1 - 2\sigma_{-1} / \sigma_\theta) \cdot \sigma_m)$$

или 
$$n_{es} = \sigma_{ut} / (k_\sigma \sigma_a / (\beta \alpha_m) + \sigma_m). \quad (14.29)$$

Как и прежде, действителен меньший коэффициент запаса.

Формулы (14.29), строго говоря, справедливы для одноосного напряженного состояния. Их можно обобщить на чистый сдвиг – простой вид напряженного состояния, легко реализуемый в лабораторных условиях. При сложном напряженном состоянии оценка запаса выносливости оказывается весьма сложной. В настоящее время для практических расчетов при плоском напряженном состоянии используют формулу перехода

$$n_{es} = n_{es\sigma} n_{es\tau} / \sqrt{n_{es\sigma}^2 + n_{es\tau}^2}, \quad (14.30)$$

где  $n_{es}$  – искомый коэффициент запаса выносливости;  $n_{es\sigma}$  – коэффициент запаса при одноосном напряженном состоянии;  $n_{es\tau}$  – то же при чистом сдвиге.

Попытку теоретического разрешения проблемы прочности материалов и конструкций при циклических напряжениях в настоящее время нельзя считать завершенной. Механизмы усталостного разрушения определяются особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Фундаментальные гипотезы сопротивления материалов, в частности, предпосылка о континуальности не способны вскрыть эти особенности. Привлечение аппарата физики твердого тела также оставляет некоторые вопросы усталости нерешенными. Поэтому приходится идти по пути накопления экспериментальных результатов, введения эмпирических поправок. Отсутствие стройной теории делает производимые расчеты весьма приближенными, требующими внимательного и критического осмысления в каждом конкретном случае.

## 15. Основы безмоментной теории тонких осесимметрично нагруженных оболочек вращения

Тело, два размера которого одного порядка ( $H$  и  $D$  на рис. 15.1) и значительно больше третьего ( $h$ ), называется **оболочкой**. Оболочка – распространенный элемент зданий и сооружений, нередко самостоятельный строительный объект (покрытия, емкости для хранения жидких, газообразных или сыпучих материалов, трубопроводы и т.п.). По этой причине расчет оболочек представляет не только теоретический, но и практический интерес.

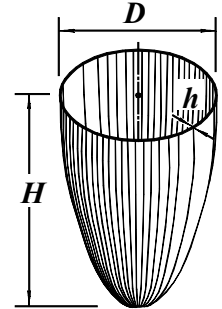


Рис. 15.1

### 15.1. Основные геометрические понятия

Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется **срединной поверхностью**. У оболочки вращения срединная поверхность является поверхностью вращения (рис. 15.2).

Линия пересечения плоскости, проходящей через ось оболочки, со срединной поверхностью называется **меридианом** или **образующей** (1).

Линия пересечения плоскости, перпендикулярной оси оболочки, со срединной поверхностью носит название **параллели**. Она ограничивает **параллельный круг** (2) радиусом  $r$ .

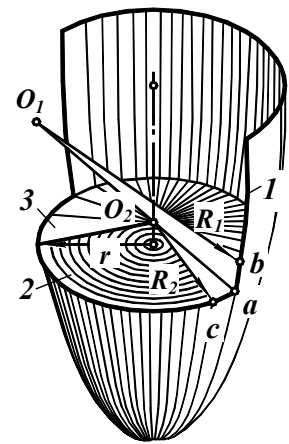


Рис. 15.2

Радиус кривизны меридиана называют *первым главным радиусом* ( $O_1a$ ), он обозначен  $R_1$ . *Второй главный радиус* кривизны срединной поверхности ( $O_2a$ ) обозначен  $R_2$ .

Оболочку считают тонкой, если  $h/R_1 \leq 0,05$ ;  $h/R_2 \leq 0,05$ .

Сечение оболочки конической поверхностью, вершина которой находится на оси вращения, а образующие перпендикулярны срединной поверхности, называется *нормальным коническим сечением*. Нормальное коническое сечение в теории оболочек играет такую же роль, как поперечное сечение в теории стержней.

Подобно тому, как стержень задается осью и поперечным сечением, оболочка – срединной поверхностью и толщиной стенки.

## 15.2. Исходные предпосылки.

### Виды напряженных состояний оболочек

Техническая теория тонких оболочек опирается на две фундаментальные предпосылки:

а) – справедлива гипотеза о неизменности нормали (отрезки, прямые и перпендикулярные срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и перпендикулярными срединной поверхности после деформации);

б) – справедлива гипотеза о ненадавливании слоев (между слоями, параллельными срединной поверхности, нормальные напряжения не возникают).

Гипотезы о неизменности нормали и ненадавливании слоев в теории оболочек – аналог гипотез плоских сечений и ненадавливании волокон в теории стержней.

К исходным предпосылкам можно отнести и вид напряженного состояния, в котором находится оболочка. Различают три вида напряженных состояний:

– безмоментное (рис. 15.3 а), когда напряжениями от изгибающих моментов можно пренебречь по сравнению с напряжениями от растяжения (сжатия);

– моментное (рис. 15.3 б), при котором преобладают изгибные напряжения;

– смешанное (рис. 15.3 в), если и те, и другие напряжения одного порядка.

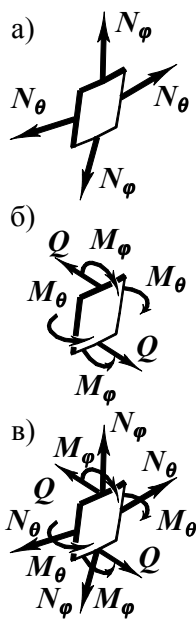


Рис. 15.3

Существенно, что вид напряженного состояния в теории оболочек введен в разряд предпосылок, а не является результатом исследования. Это объясняется чрезмерной громоздкостью теории, построенной на общих предпосылках. Следствием такого методического построения теории является необходимость определения области ее корректности.

### 15.3. Усилия в оболочке по безмоментной теории

Рассмотрим тонкую оболочку (рис. 15.1, 15.2) под осесимметричной нагрузкой. Напряжения и деформации в этом случае также осесимметричны – все меридиональные сечения находятся в одинаковых условиях. Допустим, что напряженное состояние оболочки – безмоментное: нормальные напряжения равномерно распределены по толщине стенки.

Отделим нормальным коническим сечением часть оболочки (рис. 15.4). На нее действуют равнодействующая внешней нагрузки  $Z$  и меридиональные силы  $N_\phi$  (размерность  $N_\phi$  сила/длина). Проецируя силы на ось вращения, имеем  $2\pi r N_\phi \sin\phi - Z = 0$ . Отсюда

$$N_\phi = Z / (2\pi r \sin\phi).$$

Учитывая, что  $r = R_2 \sin\phi$ , получаем

$$N_\phi = Z / (2\pi R_2 \sin^2\phi). \quad (15.1)$$

Это уравнение называют уравнением равновесия зоны.

Определение равнодействующей  $Z$  обычно не составляет больших трудностей. Тем не менее в общем случае ее можно найти так (рис. 15.5):

$$Z = \int_0^\phi (p \cdot \cos\psi - t \cdot \sin\psi) (R_1 d\psi) (2\pi R_2 \sin\psi).$$

В упорядоченном виде

$$Z = 2\pi \int_0^\phi (p \cdot \cos\psi - t \cdot \sin\psi) R_1 R_2 \sin\psi d\psi. \quad (15.2)$$

Еще раз подчеркнем, что в конкретных задачах несложно выполнить операции, положенные в основу получения равенств (15.1) и (15.2). Поэтому не следует рассматривать их, как формулы.

Полезнее из вывода усвоить способ определения сил  $N_\phi$ .

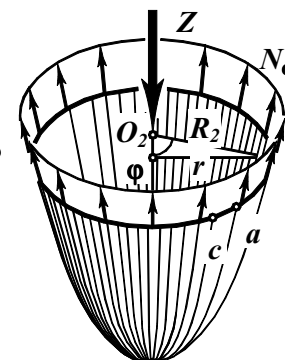


Рис. 15.4

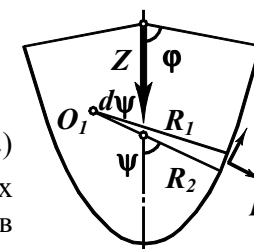


Рис. 15.5

Рассмотрим теперь равновесие бесконечно малого элемента оболочки, выделенного двумя парами радиальных плоскостей и нормальных конических сечений (рис. 15.6). На него действуют меридиональные и окружные силы с интенсивностями  $N_\varphi$  и  $N_\theta$ , а также внешняя нагрузка, заданная компонентами  $p$  и  $t$  (размерностями сила/площадь). Спроецируем силы на направление  $p$ :  $p(R_1 d\varphi)(R_2 d\theta) - 2N_\theta \sin(d\theta/2)(R_1 d\varphi) - N_\varphi \sin(d\varphi/2)(R_2 d\theta) - (N_\varphi + dN_\varphi) \sin(d\varphi/2)(R_2 d\theta) = 0$ .

После упрощений (приведения подобных членов, приравнивания малого угла его синусу, отбрасывания пренебрежимо малых слагаемых и деления на произведение  $R_1 R_2$ ) условие равновесия принимает вид

$$N_\varphi/R_1 + N_\theta/R_2 = p. \quad (15.3)$$

Это – уравнение Лапласа.

Уравнения (15.1) ... (15.3) позволяют найти усилия в сечениях оболочки.

При равномерном распределении по толщине стенки нормальные напряжения

$$\sigma_\varphi = N_\varphi/h, \quad \sigma_\theta = N_\theta/h. \quad (15.4)$$

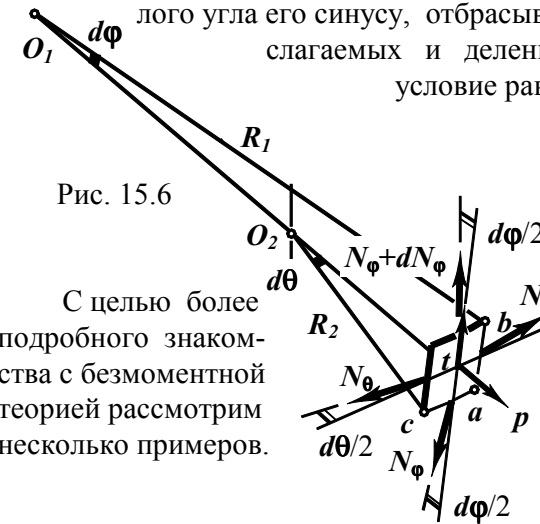


Рис. 15.6

С целью более подробного знакомства с безмоментной теорией рассмотрим несколько примеров.

**Пример 15.1.** Найдем усилия в сферической оболочке радиуса  $R_0$ , подверженной газовому давлению  $p_0$  (рис. 15.7 а).

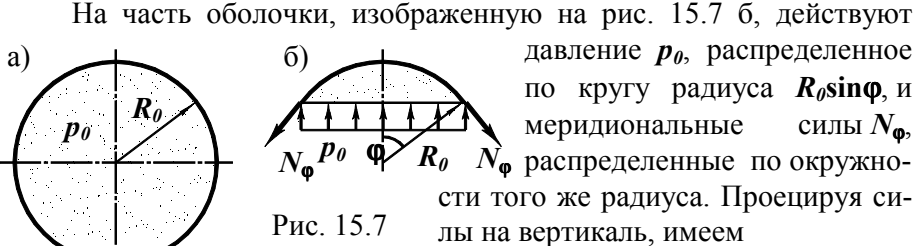


Рис. 15.7

На часть оболочки, изображенную на рис. 15.7 б, действуют давление  $p_0$ , распределенное по кругу радиуса  $R_0 \sin\varphi$ , и меридиональные силы  $N_\varphi$ , распределенные по окружности того же радиуса. Проецируя силы на вертикаль, имеем  $p_0 \pi (R_0 \sin\varphi)^2 - N_\varphi \sin\varphi \cdot 2\pi (R_0 \sin\varphi) = 0, \Rightarrow N_\varphi = p_0 R_0 / 2$ . Обратимся теперь к уравнению (15.3). У сферы  $R_1 = R_2 = R_0$ . Уравнение (15.3) примет вид  $N_\varphi + N_\theta = p_0 R_0$ . Из него  $N_\theta = p_0 R_0 / 2$ . Итак, в сферическом сосуде при газовом давлении силы  $N_\theta = N_\varphi = p_0 R_0 / 2$  независимо от угла  $\varphi$ .

**Пример 15.2.** Цилиндрическая оболочка под гидростатическим давлением (рис. 15.8 а);  $\gamma$  – объемный вес жидкости. Найдем усилия в стенке.



Рис. 15.8

На часть оболочки, изображенную на рис. 15.8 б, действуют: – вес жидкости  $\gamma \pi R_0^2 z$ ; – давление  $p = \gamma z$ ; – усилия  $N_\varphi$ . Приравнявая нулю сумму вертикальных сил:  $\gamma \pi R_0^2 z - p \pi R_0^2 + N_\varphi 2\pi R_0 = 0$ , видим, что  $N_\varphi = 0$ . Меридиональных сил в стенке нет.

Воспользуемся теперь уравнением (15.3). У цилиндрической оболочки радиус кривизны меридиана  $R_1$  бесконечно большой. Вторым главным радиус  $R_2 = R_0$ . Поэтому  $N_\theta = p R_0$ , или  $N_\theta = \gamma z R_0$ . Окружная сила линейно возрастает с ростом  $z$ . Эпюра  $N_\theta$  изображена на рис. 15.8 в.

**Пример 15.3.** Покрытие в форме конической оболочки опирается на кольцевой шарнир, представленный семейством меридиональных стерженьков (рис. 15.9 а). Размеры:  $H = 3$  м,  $R_0 = 8$  м. На покрытие действует снеговая нагрузка  $p_0 = 1$  кН/м<sup>2</sup> горизонтальной поверхности. Найдем усилия в стенке.

Из равновесия верхней части (рис. 15.9 б) следует  $p_0 \pi r^2 + N_\varphi \sin\alpha \cdot 2\pi r = 0$ , т.е.  $N_\varphi = -p_0 r / (2 \sin\alpha)$ . Меридиональное усилие линейно возрастает от вершины к основанию. Эпюра  $N_\varphi$  изображена на рис. 15.9 г слева.

Для определения  $N_\theta$  привлечем уравнение (15.3). У конуса  $R_1$  бесконечно большой. Следовательно,  $N_\theta = p R_2$ . Вторым главным радиус кривизны (рис. 15.9 б)  $R_2 = r / \sin\alpha$ .

При выводе уравнения (15.3) предполагалось, что  $p$  – нормальное к срединной поверхности давление на единицу ее площади. Определим его.

Вертикальное давление на единицу площади срединной поверхности  $p_1 = p_0 \cos\alpha$  (рис. 15.9 в). Перпендикулярная меридиану

составляющая  $p = p_0 \cos^2 \alpha$ . Учитывая, что давление направлено внутрь оболочки, принимаем  $p = -p_0 \cos^2 \alpha$ . Теперь

$$N_\theta = -p_0 \cos^2 \alpha \cdot r / \sin \alpha.$$

Сила  $N_\theta$  также линейно возрастает от вершины к основанию. Эпюра  $N_\theta$  изображена на рис. 15.9 г справа.

Приведенные примеры свидетельствуют, что определение усилий в оболочке по безмоментной теории – несложная статически разрешимая задача. Это способствует использованию названной теории в практических расчетах. Естественно возникает вопрос об условиях существования безмоментного напряженного состояния. Как показали теоретические исследования, для этого необходимо, чтобы геометрические параметры оболочки, опорные устройства и внеш-

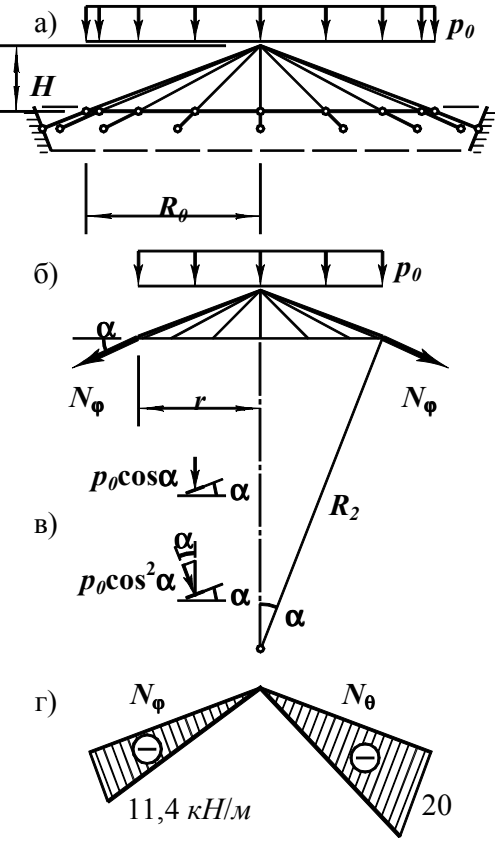


Рис. 15.9

няя нагрузка удовлетворяли определенным требованиям. Эти требования таковы.

Геометрические параметры оболочки (толщина стенки, главные радиусы кривизны срединной поверхности) должны быть описаны единими непрерывными функциями без разрывов в первой производной.

Опорные устройства должны исключать перемещения, касательные к меридиану, и не препятствовать перемещениям, перпендикулярным к срединной поверхности.

Нормальная составляющая внешнего давления должна описываться единой непрерывной функцией с непрерывной первой производной. Касательная же часть может быть и разрывной в меридиональном направлении, но, естественно, равномерно распределенной по параллели.

Из приведенного перечня требований видно, что возможности нарушения безмоментного напряженного состояния достаточно широки. Рис. 15.10 иллюстрирует места возникновения изгибных напряжений (они выделены кружками).

### 15.4. Заключение к разделу

Выше рассмотрены простейшие задачи из теории оболочек. В целом же теория весьма многообразна и достаточно сложна. Объясняется это, главным образом, многообразием внешних воздействий и геометрических особенностей оболочек. Так, внешние воздействия могут быть:

- в виде механических нагрузок и температурных полей;
- осесимметричные и произвольные;
- распределенные, сосредоточенные и т.п.

По геометрическим особенностям оболочки подразделяют на:

- оболочки вращения и произвольные;
- тонкие и толстые;
- пологие и большой высоты;
- положительной, отрицательной кривизны и т.д.

Каждое сочетание качеств требует формирования по сути индивидуальной теории и нередко вовлекает специальный математический аппарат.

Программы строительных вузов не предоставляют достаточно времени для углубленного изучения теории оболочек. Да, пожалуй, в этом и нет необходимости. Студент, инженер, получивший фундаментальную подготовку по математике, механике и сопротивлению материалов, вполне может самостоятельно освоить соответствующий раздел теории оболочек, если такая потребность возникнет.

---

---

## 16. Основы теории упругости

Теории упругости, пластичности и ползучести – три научные направления механики твердого деформируемого тела. Задачи, которые ставят перед собой названные дисциплины, во многом схожи:

- описать связь напряжений и деформаций для элементарного параллелепипеда;

- сформировать математическую модель задачи о напряженно-деформированном состоянии твердого тела;

- на тестовых задачах исследовать и продемонстрировать влияние изучаемой физической особенности материала на напряженно-деформированное состояние; при этом, как правило, не считаются с математическими трудностями решения;

- очертить область актуальности дисциплины;

- получить практически значимые решения, которыми бы мог воспользоваться инженер.

Схожи и основные фундаментальные предпосылки:

- тело наделяют свойством сплошной непрерывной среды;

- материал считают однородным;

- деформации полагают малыми;

- рассматривают статическое нагружение.

Общность предпосылок приводит к тому, что в разрешающих уравнениях обсуждаемых дисциплин фигурируют одинаковые статические и идентичные геометрические уравнения. Различны физические модели материала и, следовательно, физические уравнения.

В теории упругости такие уравнения формируют на основе закона Гука (с учетом анизотропии материала или без учета).

В задачах теории пластичности рассматривают тело, нагруженное за предел упругих деформаций. Однако игнорируют развитие деформаций во времени – полагают, что деформации изменяются лишь тогда, когда изменяется нагрузка.

Теория ползучести главное внимание уделяет процессу развития деформаций во времени и исследует поведение тел, воспринимающих длительные нагрузки.

От сопротивления материалов названные науки отличаются, главным образом, объектами изучения. Теории упругости, пластичности и ползучести не ограничиваются стержневыми элементами, а рассматривают и пластинки, и оболочки, и массивные тела.

Очерченные границы между ветвями механики деформируемого тела в известной степени условны. Есть задачи, лежащие в пограничной области, объединяющие дисциплины в многогранный цикл наук о поведении элементов конструкций под нагрузкой.

**16.1. Задача теории упругости.**

**Плоская задача и ее разновидности**

Задача теории упругости формулируется так. Даны

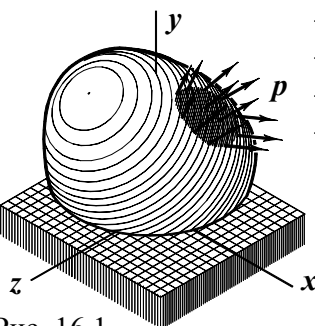


Рис. 16.1 – перемещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  в теле, считая его упругим.

- форма и размеры тела (рис. 16.1);
  - материал;
  - условия закрепления;
  - вид и величина внешней нагрузки  $p$ .
- Требуется найти
- напряжения  $\sigma_x(x, y, z)$ ,  $\sigma_y(x, y, z)$ ,  $\sigma_z(x, y, z)$ ,  $\tau_{xy}(x, y, z)$ ,  $\tau_{yz}(x, y, z)$ ,  $\tau_{zx}(x, y, z)$ ;
  - деформации  $\epsilon_x(x, y, z)$ ,  $\epsilon_y(x, y, z)$ ,  $\epsilon_z(x, y, z)$ ,  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ ,  $\gamma_{yz}(x, y, z)$ ,  $\gamma_{zx}(x, y, z)$ ;

Сформулированная таким образом задача теории упругости носит название **пространственной** (объемной, трехмерной).

Частным случаем пространственной является **плоская** (двумерная) **задача**, в которой напряжения и деформации являются функциями двух геометрических координат, например,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\sigma_z(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ ;  $\epsilon_x(x, y)$ ,  $\epsilon_y(x, y)$ ,  $\epsilon_z(x, y)$ ,  $\gamma_{xy}(x, y)$ .

В плоской задаче объект анализа – пластинка, нагруженная в своей плоскости (рис. 16.2).

Плоскую задачу разделяют на две разновидности:

- **плоское напряженное состояние**;
- **плоскую деформацию**.

На рис. 16.3 изображена расчетная схема несущей стены. На ее боковых поверхностях нагрузки нет. Если по толщине пластины давления  $p$  распределены равномерно, то в среднем вертикальном сечении по свойству симметрии

напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  (из-за малости толщины можно принять и  $\sigma_z = 0$ ). Продолжая такое деление, приходим к выводу, пластинка находится в плоском напряженном состоянии.

На рис. 16.4 показана плотина, подверженная гидростатическому давлению. Условно ее можно считать бесконечной. При равномерном по длине плотины давлении все элементарные отрезки находятся в одинаковых условиях. Достаточно рассмотреть один из них. Из-за большой длины исключены линейные деформации  $\epsilon_z$ . Поскольку любое вертикальное сечение делит плотину на симметричные части, по закону симметрии касательные напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Элементарная пластинка находится в условиях плоской деформации.

Обратим внимание на то, что при плоском напряженном состоянии деформированное состояние объемно, так как поперечная деформация  $\epsilon_z \neq 0$ . Аналогично при плоской деформации напряженное состояние объемное, поскольку из-за взаимного давления пластин друг на друга между ними возникают нормальные напряжения  $\sigma_z$ .

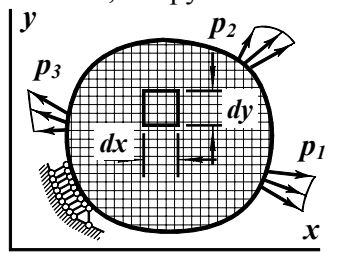


Рис. 16.2

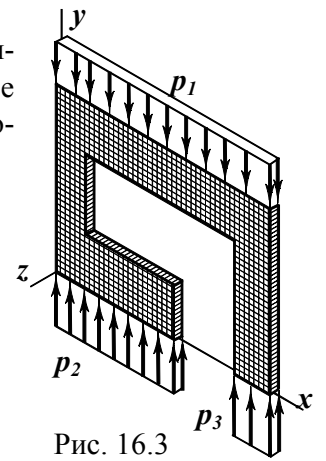


Рис. 16.3

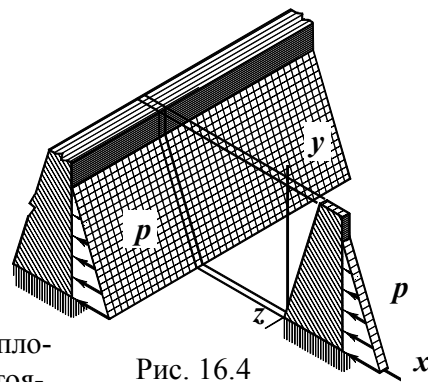


Рис. 16.4



## 16.2. Уравнения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах

В предыдущих разделах было неоднократно отмечено, что решающая система уравнений содержит статические, геометрические и физические условия. Сформируем каждую из них.

### 16.2.1. Статические уравнения

Они содержат условия равновесия точек произвольного положения и точек, расположенных на границе пластинки (граничные условия для напряжений).

#### 16.2.1.1. Уравнения равновесия

Запишем условия равновесия элементарного параллелепипеда (рис. 16.5), выделенного из пластинки, изображенной на рис. 16.2. Внешние силы, действующие на него со стороны отброшенных частей пластинки, представлены нормальными и касательными напряжениями. Кроме того, будем считать, что в составе внешних сил есть  $X$  и  $Y$ , распределенные по объему (их размерность  $H/m^3$ ).

Приравняем нулю сумму горизонтальных сил:




Рис. 16.5

$$\begin{aligned}
 & \sigma_y + (\partial\sigma_y/\partial y)dy + \tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz + \\
 & + (\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx) dydz + (\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial x)dx) dydz + \\
 & + (\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy) dx dz + X dx dy dz = 0.
 \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, деления на произведение  $dx dy dz$  и записи аналогичного уравнения для вертикальных сил получаем

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + X = 0; \quad \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y = 0. \quad (16.1)$$

Поскольку уравнения равновесия имеют дифференциальную форму, к ним необходимо добавить граничные условия.

#### 16.2.1.2. Граничные условия для напряжений

Если бесконечно малый элемент выделить на границе пластинки, он в общем случае будет иметь форму трехгранной призмы (рис. 16.6).

Условия равновесия – равенство нулю суммы горизонтальных сил и равенство нулю суммы вертикальных сил требуют, чтобы

$$-\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz + p_x ds dz = 0; \quad -\sigma_y dx dz - \tau_{xy} dy dz + p_y ds dz = 0.$$

Сократив на  $dz$ , поделив на  $ds$ , приняв во внимание, что  $dx/ds = \cos\alpha_{ny}$  и  $dy/ds = \cos\alpha_{nx}$ , приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \cos\alpha_{nx} + \tau_{yx} \cos\alpha_{ny} &= p_x; \\
 \tau_{xy} \cos\alpha_{nx} + \sigma_y \cos\alpha_{ny} &= p_y.
 \end{aligned} \quad (16.1)$$

Здесь  $n$  – внешняя нормаль к границе пластинки. Уравнения (16.1) и равенства (16.1) – группа статических условий задачи.

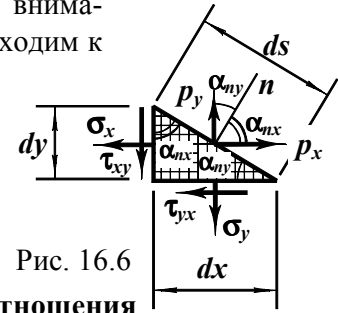


Рис. 16.6

### 16.2.2. Геометрические соотношения

Геометрические уравнения задачи также состоят из двух групп:

- зависимостей деформаций от перемещений;
- условий закрепления пластинки (граничных условий).

#### 16.2.2.1. Зависимость деформаций от перемещений

Установим связь деформаций в точке с ее перемещениями. Ориентируясь на расчет строительных конструкций, будем считать линейные и угловые перемещения малыми.

Пусть взаимно перпендикулярные малые отрезки  $ab$  и  $ac$  до деформации пластинки занимали положения, показанные сплошными линиями на рис. 16.7. После деформации они переместились соответственно в положения  $a_1b_1$  и  $a_1c_1$ .

Пренебрегая влиянием разности поперечных перемещений концов отрезка на его удлинение, имеем

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= (u + (\partial u/\partial x)dx - u)/dx = \partial u/\partial x; \\
 \epsilon_y &= (v + (\partial v/\partial y)dy - v)/dy = \partial v/\partial y; \\
 \gamma_{xy} &= \theta_x + \theta_y = \text{tg}\theta_x + \text{tg}\theta_y = \\
 &= (v + (\partial v/\partial x)dx - v)/dx + (u + (\partial u/\partial y)dy - u)/dy = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y.
 \end{aligned}$$

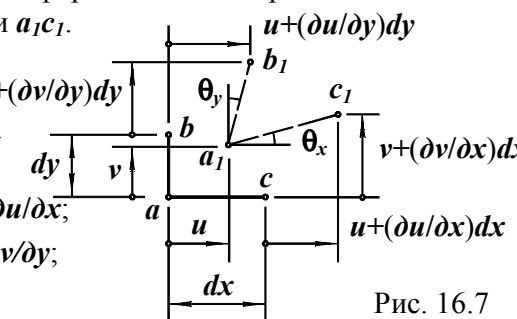


Рис. 16.7

Итак, зависимость линейных и угловой деформаций в точке от ее перемещений выглядит следующим образом (соотношения Коши<sup>1</sup>):

$$\epsilon_x = \partial u/\partial x; \quad \epsilon_y = \partial v/\partial y; \quad \gamma_{xy} = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y. \quad (16.2)$$

<sup>1</sup> Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик, уделявший много внимания теории упругости. Он доказал справедливость линейных соотношений (16.2) при малых перемещениях и поворотах, чем существенно облегчил решение многих задач механики твердого тела.

### 16.2.2.2. Геометрические граничные условия

Дифференциальные соотношения (16.2) могут быть разрешены единственным образом, если к ним добавлены ограничения на перемещения, отражающие условия закрепления пластинки. Конкретный вид ограничений определяется согласно расчетной схеме. Здесь лишь укажем на необходимость введения геометрических граничных условий и отметим, что неподвижность пластинки может быть обеспечена, например, постановкой трех линейных связей.

### 16.2.3. Физические зависимости

В теории упругости связь напряжений и деформаций устанавливается на основе закона Гука.

#### 16.2.3.1. Плоское напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии изотропного тела обобщенный закон Гука имеет вид (9.3).

$$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E; \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E; \quad \epsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E.$$

Разрешив их относительно напряжений, получаем

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/(1 - \nu^2); \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/(1 - \nu^2).$$

Добавив зависимость относительного сдвига от касательного напряжения (6.1):  $\gamma = \tau/G$  и выразив модуль сдвига  $G$  через модуль продольной упругости  $E$  (9.5):  $G = E/(2(1 + \nu))$ , получаем

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/(1 - \nu^2); \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/(1 - \nu^2); \quad \tau_{xy} = E\gamma_{xy}/(2(1 + \nu)). \quad (16.3)$$

#### 16.2.3.2. Плоская деформация

В этой разновидности плоской задачи закон Гука (9.2)

$\epsilon_x = (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))/E; \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))/E; \quad \epsilon_z = (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))/E = 0$  после выражения напряжений через деформации с учетом отсутствия поперечного расширения принимает форму

$$\sigma_x = E((1 - \nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y)/((1 + \nu)(1 - 2\nu));$$

$$\sigma_y = E((1 - \nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x)/((1 + \nu)(1 - 2\nu));$$

$$\sigma_z = \nu E(\epsilon_x + \epsilon_y)/((1 + \nu)(1 - 2\nu)).$$

Если ввести новые физические константы

$$E_I = E/(1 - \nu^2); \quad \nu_I = \nu/(1 - \nu), \quad (16.4)$$

записанным равенствам можно придать вид

$$\sigma_x = E_I(\epsilon_x + \nu_I\epsilon_y)/(1 - \nu_I^2); \quad \sigma_y = E_I(\epsilon_y + \nu_I\epsilon_x)/(1 - \nu_I^2); \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Однотипная структура первых двух равенств, записанных здесь и в выражениях (16.3), дает возможность объединить расчетные уравнения для обеих разновидностей плоской задачи. Но для плоской деформации использовать константы (16.4).

Учитывая отмеченную возможность объединения задач, в дальнейшем будем рассматривать плоское напряженное состояние.

Плоская задача теории упругости свелась к

– двум условиям равновесия (16.1), содержащим три неизвестных функции:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  (с учетом парности касательных напряжений);

– трем геометрическим зависимостям (16.2) с пятью новыми неизвестными:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  и  $v$ .

– трем физическим зависимостям (16.3) без дополнительных неизвестных.

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из восьми уравнений с восемью функциями, описывающими напряженно-деформированное состояние пластинки.

Решение совместной системы восьми уравнений, в которой пять дифференциальных, – весьма трудоемкая процедура. С целью уменьшения математических трудностей систему предварительно преобразуют. При этом стремятся уменьшить число совместных уравнений. В зависимости от того, какие функции фигурируют в окончательной совместной системе, различают два вида решений:

– в перемещениях;

– в напряжениях.

Рассмотрим их.

### 16.3. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях

С помощью равенств (16.2) исключим деформации из физических уравнений (16.3):

$$\sigma_x = E(\partial u/\partial x + \nu\partial v/\partial y)/(1 - \nu^2);$$

$$\sigma_y = E(\partial v/\partial y + \nu\partial u/\partial x)/(1 - \nu^2);$$

$$\tau_{xy} = E(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)/(2(1 + \nu)). \quad (16.5)$$

Теперь равенства (16.5) подставим в уравнения равновесия (16.1). После преобразований получим

$$\begin{aligned} E_1 \delta^2 u / \partial x^2 + G \delta^2 v / \partial y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 v / \partial x \partial y + X &= 0; \\ E_1 \delta^2 v / \partial x^2 + G \delta^2 v / \partial y^2 + (G + \nu E_1) \delta^2 u / \partial x \partial y + Y &= 0. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Уравнения (16.6) являются условиями равновесия, записанными в перемещениях.

В статические граничные условия (16 а) следует подставлять напряжения, выраженные через перемещения (16.5):

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial x + \nu \partial v / \partial y) \cos \alpha_{nx} / (1 - \nu^2) + (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) \cos \alpha_{ny} / (2(1 + \nu)) &= p_x / E; \\ (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) \cos \alpha_{nx} / (2(1 + \nu)) + (\partial v / \partial y + \nu \partial u / \partial x) \cos \alpha_{ny} / (1 - \nu^2) &= p_y / E. \end{aligned}$$

Способ закрепления пластинки (геометрические граничные условия) также следует записывать через перемещения и их производные.

При решении плоской задачи теории упругости в перемещениях удалось снизить число совместных уравнений до двух – (16.6). Хотя решение этой системы не просто, тем не менее, по сравнению с первоначальным вариантом восьми уравнений трудоемкость намного снизилась и перешла на уровень вполне реализуемых. Некоторые методы решения подобных уравнений будут показаны ниже.

Определив перемещения из уравнений (16.6), напряжения и деформации можно найти по равенствам (16.5) и (16.2), дифференцируя соответствующим образом функции  $u$  и  $v$ .

## 16.4. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях

### 16.4.1. Преобразования системы уравнений

Второй путь упрощения системы (16.1) ... (16.3) – исключение из нее деформаций и перемещений – решение в напряжениях.

Продифференцируем равенства (16.2):

$$\begin{aligned} \delta^2 \epsilon_x / \partial y^2 = \delta^3 u / \partial x \partial y^2; \quad \delta^2 \epsilon_y / \partial x^2 = \delta^3 v / \partial x^2 \partial y; \\ \delta^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y = \delta^3 u / \partial x \partial y^2 + \delta^3 v / \partial x^2 \partial y. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части полученных равенств, видим, что

$$\delta^2 \epsilon_x / \partial y^2 + \delta^2 \epsilon_y / \partial x^2 = \delta^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y. \quad (16.7^1)$$

<sup>1</sup> Уравнение (16.7) получено Сен-Венаном. Для односвязных пластинок (без отверстий) оно является необходимым и достаточным. В пластинках же с отверстиями к равенству (16.7) нужно добавить дополнительное условие однозначности перемещений. Подробно об этом см. в более полных учебниках.

Полученное равенство является условием совместности деформаций (неразрывности деформаций; сплошности тела). Геометрический смысл его состоит в том, что контакты между элементарными параллелепипедами в процессе деформации нигде не нарушаются – пластинка, сплошная до деформации, осталась сплошной и в деформированном состоянии.

Подставим в условие (16.7) закон Гука (9.3) и (6.1), учитывая связь между модулями  $E$  и  $G$  (9.5):

$$\delta^2 (\sigma_x - \nu \sigma_y) / \partial y^2 + \delta^2 (\sigma_y - \nu \sigma_x) / \partial x^2 = 2(1 + \nu) \delta^2 \tau_{xy} / \partial x \partial y. \quad (а)$$

Продифференцировав первое равенство условий равновесия (16.1) по  $x$ , второе по  $y$  и просуммировав их, получаем

$$-2 \delta^2 \tau_{xy} / \partial x \partial y = \delta^2 \sigma_x / \partial x^2 + \delta^2 \sigma_y / \partial y^2 + \delta X / \partial x + \delta Y / \partial y. \quad (б)$$

Если объемные силы распределены по пластинке равномерно, то производные  $\delta X / \partial x = \delta Y / \partial y = 0$ . Ограничимся такими силами  $X$  и  $Y$ . Подставив равенство (а) в выражение (б), получаем условие совместности деформаций, выраженное через напряжения (уравнение Леви<sup>1</sup>):

$$\delta^2 (\sigma_x + \sigma_y) / \partial x^2 + \delta^2 (\sigma_x + \sigma_y) / \partial y^2 = 0. \quad (16.8)$$

Дифференциальный оператор  $\delta^2 / \partial x^2 + \delta^2 / \partial y^2$  называется гармоническим оператором Лапласа, обозначается  $\delta^2 / \partial x^2 + \delta^2 / \partial y^2 = \nabla^2$  (символ носит название *набла-два*). В сокращенной форме условие совместности деформаций примет вид

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (16.8)$$

Итак, решение плоской задачи теории упругости в напряжениях свелось к системе трех дифференциальных уравнений:

– двух уравнений равновесия (16.1)

– и условия совместности деформаций (16.8).

Статические граничные условия (16 а) не требуют каких-либо преобразований. Запись же геометрических ограничений на перемещения наложенными на пластинку связями достаточно затруднительна, так как напряжения выражаются через производные  $u$  и  $v$ . По этой причине решение в напряжениях возможно, если известны все силы, действующие на пластинку, – когда она внешне статически определима.

<sup>1</sup> Морис Леви (1838–1910) – французский механик, преподаватель, ученый. Его научные интересы охватывали широкий круг проблем теории упругости.

В том варианте, который зафиксирован выше, решение в напряжениях уступает решению в перемещениях, поскольку

- сводится к большему числу уравнений;
- требует сложных преобразований и решений для выражения геометрических граничных условий через напряжения.

Тем не менее этот путь оказывается перспективным в направлении смягчения первого недостатка – уменьшения числа уравнений.

### 16.4.2. Функция напряжений. Рамная аналогия

16.4.2.1. Дальнейшие и существенные упрощения задачи возможны за счет введения так называемой *функции напряжений* (функции Эйри<sup>1</sup>).

Если вместо трех функций  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$  ввести специально подобранную одну  $\varphi(x, y)$  такую, что

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2; \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2; \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y - Xy - Yx, \quad (16.9)$$

то условия равновесия (16.1) будут выполнены всегда. Действительно,  $\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + X = \partial^3 \varphi / \partial x \partial y^2 - \partial^3 \varphi / \partial x \partial y^2 - X + X = 0$ ;

$$\partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + Y = -\partial^3 \varphi / \partial x^2 \partial y - Y + \partial^3 \varphi / \partial x^2 \partial y + Y = 0.$$

Функцию напряжений нужно найти из условия совместности деформаций (16.8). Подставив выражения (16.9) в условие (16.8), получаем

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial x^2) = 0.$$

Но так как  $\partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial x^2 = \nabla^2 \varphi$ , то записанное выше условие можно записать короче:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (16.10)$$

или в развернутом виде

$$\partial^4 \varphi / \partial x^4 + 2 \partial^4 \varphi / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \varphi / \partial y^4 = 0. \quad (16.10)$$

Дифференциальный оператор  $\partial^4 / \partial x^4 + 2 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$  носит название *бигармонического оператора Лапласа* и обозначается  $\nabla^4$  (символ называется *набла-четыре*). Теперь уравнение (16.10) можно записать и так

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (16.10)$$

Уравнение (16.10) носит название *условия совместности деформаций, выраженного через функцию напряжений*.

Таким образом, плоскую задачу, решаемую в напряжениях, удалось свести к одному дифференциальному уравнению (16.10).

<sup>1</sup> Джордж Биддэлл Эйри (1801–1892) – английский математик и астроном. Предложил ввести функцию напряжений (в варианте  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ) в 1862 г.

16.4.2.2. Поскольку напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  определяются по функции  $\varphi$  дифференцированием (16.9), появляется возможность некоторого произвола в выборе ее выражения. Установим меру этого произвола.

Пусть даны две функции  $\varphi_1(x, y)$  и  $\varphi_2(x, y)$ , отличающиеся линейным трехчленом:  $\varphi_1 = \varphi_2 + Ax + By + C$ . Тогда напряжения (16.9)

$$\text{– по } \varphi_1: \sigma_x = \partial^2 \varphi_1 / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi_1 / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi_1 / \partial x \partial y - Xy - Yx;$$

$$\text{– по } \varphi_2: \sigma_x = \partial^2 \varphi_2 / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi_2 / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi_2 / \partial x \partial y - Xy - Yx.$$

Но при двукратном дифференцировании трехчлен  $Ax + By + C$  исчезает. Вторые производные  $\partial^2 \varphi_1 / \partial y^2 = \partial^2 \varphi_2 / \partial y^2$ ,  $\partial^2 \varphi_1 / \partial x^2 = \partial^2 \varphi_2 / \partial x^2$ ,  $\partial^2 \varphi_1 / \partial x \partial y = \partial^2 \varphi_2 / \partial x \partial y$ .

Добавление линейного трехчлена к функции напряжений, на напряжениях не отражается:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(\varphi) = \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(\varphi + Ax + By + C). \quad (a)$$

Это свойство функции  $\varphi$  позволяет упростить отдельные этапы ее применения.

16.4.2.3. Обратимся теперь к форме статических граничных условий (16 а), записанных через функцию напряжений.

Вновь рассмотрим пластинку, на границе которой задана нагрузка  $p_x$  и  $p_y$  (рис. 16.8). Ограничимся случаем, когда объемных сил нет:  $X = 0$ ,  $Y = 0$ .

Выберем начальную точку  $a_0$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$ . От нее будем отсчитывать координату  $s$ , определяющую положение точки на контуре пластинки. Условимся считать положительным такое направление обхода, при котором пластинка остается слева.

Учитывая возможность линейной коррекции функции напряжений (а), постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  подберем так, чтобы в точке  $a_0$  выполнялись равенства  $\varphi_{x_0, y_0} = 0$ ,  $(\partial \varphi / \partial x)_{x_0, y_0} = 0$ ,  $(\partial \varphi / \partial y)_{x_0, y_0} = 0$ .

Условия (16 а) в произвольной точке  $a_1(x_1, y_1; s_1)$  имеют вид

$$\sigma_x \cos \alpha_{nx} + \tau_{yx} \cos \alpha_{ny} = p_x; \quad \tau_{xy} \cos \alpha_{nx} + \sigma_y \cos \alpha_{ny} = p_y.$$

При выбранном правиле знаков для координаты  $s$  (см. рис. 16.9) положительному  $ds$  соответствует положительное  $dy$  и отрицательное  $dx$ . Направление нормали к границе определяется углами с

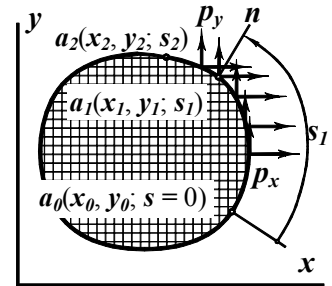


Рис. 16.8

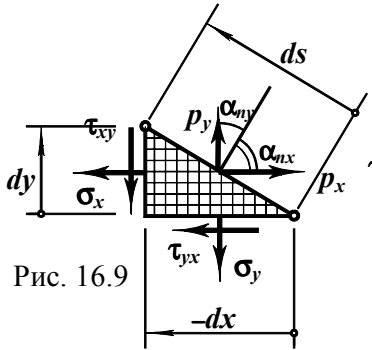


Рис. 16.9

$$\cos\alpha_{nx} = dy/ds, \quad \cos\alpha_{ny} = -dx/ds. \quad (б)$$

Согласно выражениям (16.9)

$$\sigma_x = \partial^2\varphi/\partial y^2 = \partial(\partial\varphi/\partial y)/\partial y;$$

$$\sigma_y = \partial^2\varphi/\partial x^2 = \partial(\partial\varphi/\partial x)/\partial x;$$

$$\tau_{xy} = -\partial^2\varphi/\partial x\partial y = -\partial(\partial\varphi/\partial y)/\partial x = -(\partial\varphi/\partial x)/\partial y. \quad (в)$$

Подставим равенства (в) и (б) в (16 а):

$$(\partial(\partial\varphi/\partial y)/\partial y)dy/ds + (\partial(\partial\varphi/\partial y)/\partial x)dx/ds =$$

$$= d(\partial\varphi/\partial y)/ds = p_x;$$

$$-(\partial(\partial\varphi/\partial x)/\partial y)dy/ds - (\partial(\partial\varphi/\partial x)/\partial x)dx/ds =$$

$$= -d(\partial\varphi/\partial x)/ds = p_y.$$

Итак,  $d(\partial\varphi/\partial y) = p_x ds$ ;  $d(\partial\varphi/\partial x) = -p_y ds$ .

Проинтегрируем полученные равенства по  $s$  от нуля до произвольной точки (обозначим ее криволинейную координату  $s_1$ ):

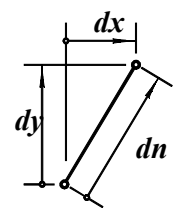


Рис. 16.10

$$(\partial\varphi/\partial y)_{x_1, y_1} = \int_0^{s_1} p_x ds, \Rightarrow (\partial\varphi/\partial y) = P_x;$$

$$(\partial\varphi/\partial x)_{x_1, y_1} = -\int_0^{s_1} p_y ds, \Rightarrow (\partial\varphi/\partial x) = -P_y. \quad (г)$$

Здесь  $P_x$  и  $P_y$  – равнодействующие горизонтальной и вертикальной нагрузок, приложенных на участке интегрирования  $a_0 a_1$ .

Производная функции напряжений по внешней нормали  $d\varphi/dn = (\partial\varphi/\partial x)dx/dn + (\partial\varphi/\partial y)dy/dn$ .

Но согласно рис. 16.10  $dx/dn = \cos\alpha_{nx}$ ,  $dy/dn = \cos\alpha_{ny}$ . Используя эти равенства и равенства (в), получаем

$$d\varphi/dn = (\partial\varphi/\partial x)dx/dn + (\partial\varphi/\partial y)dy/dn = -P_y \cos\alpha_{nx} + P_x \cos\alpha_{ny}. \quad (д)$$

Правая часть полученного выражения представляет собой сумму проекций на касательную к контуру пластинки той части внешней нагрузки, которая действует на участке  $a_0 a_1$  (рис. 16.11).

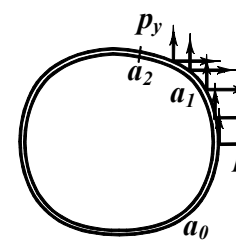


Рис. 16.11

Производная функции  $\varphi$  по касательной к контуру  $d\varphi/ds = (\partial\varphi/\partial x)dx/ds + (\partial\varphi/\partial y)dy/ds = -P_y dx/ds + P_x dy/ds$ .

Проинтегрируем полученное выражение от фиксированной точки  $a_0$  до произвольной  $a_2$ :

$$\varphi_{x_2, y_2} = -\int_0^{s_2} P_y (dx/ds) ds + \int_0^{s_2} P_x (dy/ds) ds.$$

Учитывая соотношения (г), имеем

$$\varphi_{x_2, y_2} = -\int_0^{s_2} (\int_0^{s_1} p_y ds) (dx/ds) ds + \int_0^{s_2} (\int_0^{s_1} p_x ds) (dy/ds) ds.$$

Возьмем внешние интегралы по частям:

$$\varphi_{x_2, y_2} = -\left( \int_0^{s_1} p_y ds \right) x \Big|_0^{s_2} + \int_0^{s_2} x p_y ds + \left( \int_0^{s_1} p_x ds \right) y \Big|_0^{s_2} - \int_0^{s_2} y p_x ds =$$

$$= -x_2 \int_0^{s_2} p_y ds + \int_0^{s_2} x p_y ds + y_2 \int_0^{s_2} p_x ds - \int_0^{s_2} y p_x ds =$$

$$= \int_0^{s_2} (x-x_2) p_y ds + \int_0^{s_2} (y_2-y) p_x ds. \quad (е)$$

Правое равенство представляет собой момент относительно точки  $a_2$ , создаваемый нагрузкой, приложенной на участке  $a_0 a_2$  (рис. 16.11).

Итак, два граничных условия (16 а), выраженные через функцию напряжений в виде (д) и (е), можно записать так:

$$d\varphi/dn = N, \quad \varphi = M. \quad (16.11)$$

Равенства (16.11) можно наглядно проиллюстрировать.

Если наряду с пластинкой (рис. 16.2, 16.8) рассмотреть плоскую раму того же очертания и так же нагруженную, то

– производная функции напряжений по внешней нормали в точке контура пластинки равна продольной силе в соответствующем сечении рамы;

– значение функции напряжений в точке контура пластинки равно изгибающему моменту в соответствующем сечении рамы.

Граничные условия в форме (16.11) получили название **рамной аналогии**. Эпюры изгибающего момента и продольной силы в раме являются графиками изменения функции напряжений и ее нормальной производной на контуре пластинки.

Для практического применения равенств (16.11) необходимо извлечь из приведенного доказательства правила знаков, и снять неопределенность, связанную с положением начальной точки  $a_0$ .

Из направлений усилий и обусловленного правила обхода контура следует, что **положительными** нужно считать

- растягивающую продольную силу;
- момент, растягивающий внутренние волокна рамы.

Замкнутая рама, повторяющая контур пластинки, имеет три избыточных связи и, следовательно, трижды статически неопределима. Построение эпюр продольных сил и изгибающих моментов в ней

достаточно трудоемко. Свойство (а) функции напряжений позволяет устранить эту трудность.

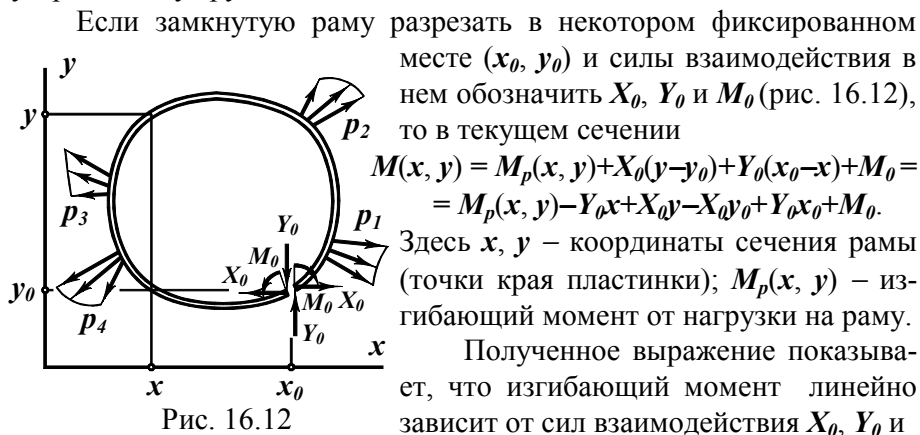


Рис. 16.12

Если замкнутую раму разрезать в некотором фиксированном месте  $(x_0, y_0)$  и силы взаимодействия в нем обозначить  $X_0, Y_0$  и  $M_0$  (рис. 16.12), то в текущем сечении

$$M(x, y) = M_p(x, y) + X_0(y - y_0) + Y_0(x_0 - x) + M_0 = \\ = M_p(x, y) - Y_0x + X_0y - X_0y_0 + Y_0x_0 + M_0.$$

Здесь  $x, y$  – координаты сечения рамы (точки края пластинки);  $M_p(x, y)$  – изгибающий момент от нагрузки на раму.

Полученное выражение показывает, что изгибающий момент линейно зависит от сил взаимодействия  $X_0, Y_0$  и

$M_0$ . Но  $M(x, y) = \varphi(x, y)$ . Если их отбросить, функция напряжений на контуре изменится на линейный трехчлен.

При линейном изменении контурных значений функции напряжений на столько же она изменится и во внутренних точках пластинки. Но по свойству (а) это не отразится на определяемых ею напряжениях. Итак, раму можно разрезать, а силы взаимодействия  $X_0, Y_0$  и  $M_0$  отбросить. Отсутствие каких-либо ограничений на место рассечения рамы, позволяет делать это где угодно.

Аналогично можно доказать, что при использовании рамной аналогии можно отбрасывать любые три избыточные связи при сохранении геометрической неизменяемости рамы и строить эпюры продольной силы и изгибающего момента в статически определимой системе. Проиллюстрированный здесь разрез рамы – частный случай сформулированной возможности.

Приведенный выше материал изложен очень кратко. Не затронуты важные вопросы существования и однозначности решений. В поле зрения не включены многосвязные пластинки, требующие дополнительного анализа при формировании расчетных уравнений. Не рассмотрена задача в полярных координатах. Не приведены решения важных задач, имеющих фундаментальные значения при расчетах некоторых строительных конструкций и объектов. Краткость изложения объясняется количеством часов, отведенных на дисциплину.

## 17. Понятие о численных методах решения уравнений теории упругости

Определение характеристик напряженно-деформированного состояния элемента конструкции связано, как правило, с необходимостью решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений с сопутствующими им граничными условиями. Например:

- уравнение изогнутой оси балки вытекает из закона Гука, имеющего форму дифференциального уравнения (7.22) или упрощенного его варианта (7.23);

- критические значения сжимающей силы для сжатого стержня и момента для балки устанавливаются с помощью однородных дифференциальных уравнений;

- расчет стержня по деформированной схеме сводится к уравнению (13.1);

- анализ колебательных или иных динамических процессов связан с уравнениями движения типа (14.2), (14.6), (14.12) или более сложными;

- решение плоской задачи теории упругости в перемещениях требует решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных (16.6), в напряжениях – трех (16.1) и (16.8), а через функцию напряжений одного уравнения четвертого порядка (16.10).

В последующих разделах также будут сформированы математические модели инженерных задач в форме дифференциальных уравнений.

Основные сложности, сопутствующие поиску функций, отвечающих дифференциальному уравнению и граничным условиям,

можно разделить на две группы:

- технические, вызванные трудностями процесса поиска;
- принципиальные, обусловленные отсутствием искомым математических функций в составе известных в настоящее время.

С другой стороны, инженера, опирающегося на идеализированную расчетную схему и ориентирующегося, естественно, на приближенный результат, обычно вполне устраивает приближенное решение соответствующей математической задачи. Важно при этом, чтобы полученный результат не усугубил погрешность, порожденную исходными предположениями теории.

Наконец, третий комментарий. Современное состояние вычислительной техники, обеспечившее ей прочное место в технологии расчетов и проектирования строительных конструкций, снимает остроту технических математических трудностей и выдвигает численные методы на передовые позиции при решении практических задач.

Исходя из высказанной точки зрения, в настоящий раздел включены начальные сведения о некоторых приближенных методах решения дифференциальных уравнений или их систем, обыкновенных или в частных производных<sup>1</sup>.

Из множества способов преодоления трудностей решения дифференциальных уравнений остановимся на таких, которые позволяют свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Из них рассмотрим:

- группу методов аппроксимирующих функций<sup>2</sup>;
- метод конечных разностей.

## 17.1. Методы аппроксимирующих функций

Эта группа методов основана на выражении

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y), \quad (17.1)$$

где  $f(x, y)$  – искомая функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (или системе уравнений) и граничным условиям;

<sup>1</sup> Автор не ставит цель полного и систематизированного изложения темы. Желаящие глубже изучить этот математический аппарат могут обратиться к специальной литературе.

<sup>2</sup> Аппроксимация – приближенное выражение математических объектов, в частности функций, через другие, более простые.

$\psi_i(x, y)$  – аппроксимирующие функции конкретного вида;

$a_i$  – коэффициенты аппроксимации, подлежащие определению;

$n$  – число членов аппроксимирующего ряда.

В роли аппроксимирующих обычно фигурируют элементарные функции, графики которых качественно схожи с ожидаемым очертанием искомой функции. Существуют так называемые полные системы функций<sup>1</sup>, способные свести погрешность решения к нулю. Число членов аппроксимирующего ряда назначают из соображений компромисса между желаемой точностью и трудоемкостью расчета.

Поскольку в математической форме задача состоит из двух частей – дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) и граничных условий, коэффициенты аппроксимирующего ряда определяют в зависимости от того, каким требованиям отвечают выбранные функции  $\psi_i(x, y)$ :

- если аппроксимирующие функции удовлетворяют граничные условия (нередко удается именно так подобрать функции  $\psi_i(x, y)$ ), коэффициенты  $a_i$  определяют по дифференциальному уравнению;

- при функциях  $\psi_i(x, y)$ , удовлетворяющих дифференциальное уравнение, коэффициенты  $a_i$  подбирают по граничным условиям;

- в общем случае, когда подбором аппроксимирующих функций не удалось удовлетворить ни дифференциальное уравнение, ни граничные условия, коэффициенты ряда (17.1) подбирают и по уравнению, и по граничным условиям.

Название методы из обсуждаемой группы зависит от того, по какому критерию подбирают коэффициенты  $a_i$ . Ознакомимся с тремя методами:

- коллокаций<sup>2</sup>;
- наилучшего квадратичного приближения;
- ортогонализации (Галеркина).

### 17.1.1. Метод коллокаций

В этом методе *коэффициенты аппроксимирующего ряда подбирают так, чтобы условия задачи выполнялись в  $n$  точках* – узлах коллокации.

<sup>1</sup> Полная система может быть составлена из тригонометрических функций, полиномов и др.

<sup>2</sup> *Collocation* – расположение, расстановка (англ.); по-видимому, от этого слова произошло название метода.

Для иллюстрации метода рассмотрим пример.

**Пример 17.1.** Найдем максимальный прогиб в консольной балке, изображенной на рис. 17.1.

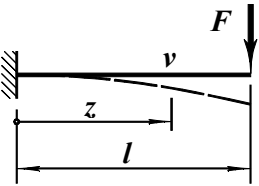


Рис. 17.1

Дифференциальное уравнение задачи –

$$v'' = M_x/(EJ_x). \quad (a)$$

Граничные условия:  $v(0) = 0, v'(0) = 0.$  (б)

Эта схема неоднократно рассматривалась прежде (см. пример 7.9). Известно, что изогнутая ось – кубическая парабола. Сознательно откажемся от нее и опишем прогибы приближенной функцией. Деформированная ось балки

$$v = a(1 - \cos(\pi z/(2l))). \quad (в)$$

Выбранная функция удовлетворяет граничные условия (б). Действительно,  $v(0) = a(1 - 1) = 0; v' = a(\pi/(2l))\sin(\pi z/(2l)), v'(0) = 0.$

Коэффициент  $a$  найдем по дифференциальному уравнению. Уравнение (а) после подстановки в него выражения (в) принимает вид

$$a(\pi^2/(4l^2))\cos(\pi z/(2l)) = M_x/(EJ_x).$$

Выберем узел коллокации в начале координат и потребуем, чтобы  $v''(0) = M_x(0)/(EJ_x): a\pi^2/(4l^2) = Fl/(EJ_x).$  Отсюда  $a = 4Fl^3/(\pi^2 EJ_x) = 0,406Fl^3/(EJ_x).$  Уравнение изогнутой оси балки обретает вид

$$v = (0,406Fl^3/(EJ_x))(1 - \cos(\pi z/(2l))).$$

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(l) = 0,406Fl^3/(EJ_x).$  Точное значение  $v_{max} = 0,333Fl^3/(EJ_x).$  Полученный здесь результат оказался на 22% больше.

Чтобы снизить погрешность, возьмем две аппроксимирующие функции и запишем

$$v = a_1(1 - \cos(\pi z/(2l))) + a_3(1 - \cos(3\pi z/(2l))). \quad (г)$$

Граничные условия (б) при этом выполнены.

Дифференциальное уравнение (а) при описании (г) выглядит так:  $a_1(\pi^2/(4l^2))\cos(\pi z/(2l)) + a_3(9\pi^2/(4l^2))\cos(3\pi z/(2l)) = M_x/(EJ_x).$  (д)

Для определения двух коэффициентов выберем два узла коллокации, например,  $z = 0$  и  $z = l/2.$  После подстановки этих абсцисс в равенство (д) приходим к системе уравнений

$$a_1(\pi^2/(4l^2)) + a_3(9\pi^2/(4l^2)) = Fl/(EJ_x),$$

$$a_1(\pi^2/(4l^2))0,7071 + a_3(9\pi^2/(4l^2))0,7071 = Fl/(2EJ_x).$$

Отсюда  $a_1 = 0,346Fl^3/(EJ_x), a_3 = 0,0066Fl^3/(EJ_x);$

$v = Fl^3(0,346(1 - \cos(\pi z/(2l))) + 0,0066(1 - \cos(3\pi z/(2l))))/(EJ_x);$   
 $v_{max} = v(l) = 0,353Fl^3/(EJ_x).$  Этот результат превышает точное значение на 6%.

Рассмотренный пример, кроме демонстрации этапов метода, показал очевидную зависимость точности результата от числа членов аппроксимирующего ряда. Отметим также отсутствие требований на выбор мест коллокаций. Это обстоятельство, с одной стороны, оставляет сомнение в удачности положения узлов, с другой же, при наличии опыта и навыков позволяет оптимизировать расчет – с малым числом аппроксимирующих функций получать приемлемый результат.

### 17.1.2. Метод наилучшего квадратичного приближения

Используются и другие названия этого метода – наименьшего квадратичного отклонения; в обиходе его иногда называют методом наименьших квадратов.

*Критерием подбора коэффициентов аппроксимирующего ряда здесь служит минимум суммы квадратов ошибок.*

В методе используются специфические понятия и действия. Проиллюстрируем их примером.

**Пример 17.2.** Определим максимальные нормальные напряжения  $\max \sigma_z$  во внецентренно сжатом стальном стержне (рис. 17.2). Расчет выполним по деформированной схеме.

Исходные данные:  $l = 3,5$  м; двутавр № 18 ( $e = 9$  см);  $F = 218$  кН.

Задача сводится к определению перемещения верхнего конца стержня (рис. 17.3). Определив его, найдем изгибающий момент в нижнем сечении, а затем и напряжения.

Дифференциальное уравнение задачи (рис. 17.3):

$$M_x = F(f + e - v); M_x = EJ_x v'', \text{ отсюда}$$

$$v'' + k^2 v = k^2(f + e) \text{ (где } k^2 = F/(EJ_x)), \text{ (а)}$$

Граничные условия:  $v(0) = 0, v'(0) = 0.$  (б)

Эта задача решена точным методом (пример 13.2). Изогнутая ось стержня описывается косинусоидой. Зная об этом, сознательно аппроксимируем ее полиномом

$$v = a_2 z^2 + a_3 z^3, \quad (в)$$

удовлетворяющим условия (б).

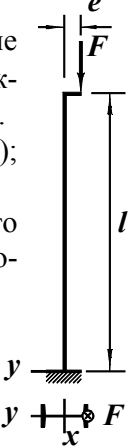


Рис. 17.2



Подставим выражение (в) в уравнение (а) с учетом того, что  $f = a_2 l^2 + a_3 l^3$ . В итоге придадим уравнению вид  $2a_2 + 6a_3 z + k^2(a_2 z^2 + a_3 z^3) = k^2(a_2 l^2 + a_3 l^3 + e)$ . Так как во всех точках  $0 \leq z \leq l$  левая и правая части уравнения должны быть равными, их разница является *ошибкой аппроксимации*. Поскольку она зависит от  $z$ , ее называют *функцией-ошибкой*. Обозначим функцию-ошибку буквой  $\Delta$  и запишем  $\Delta = a_2(2 + k^2 z^2 - k^2 l^2) + a_3(6z + k^2 z^3 - k^2 l^3) - k^2 e$ . Как было отмечено выше, критерием качества решения в рассматриваемом методе служит *суммарная квадратичная ошибка* (она обозначена  $\Sigma \Delta^2$ ) –

$$\Sigma \Delta^2 = \int_0^l \Delta^2 dz = \int_0^l (a_2(2 + k^2 z^2 - k^2 l^2) + a_3(6z + k^2 z^3 - k^2 l^3) - k^2 e)^2 dz.$$

После возведения в квадрат подынтегрального выражения и интегрирования получаем зависимость

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta^2 = & 4(l - 2k^2 l^3/3 + 2k^4 l^5/15)a_2^2 + \\ & + (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_2 a_3 + \\ & + 3(4l^3 - 12k^2 l^5/10 + 3k^4 l^7/14)a_3^2 - \\ & - 4(k^2 l - k^4 l^3/3)ea_2 - 6(k^2 l^2 - k^4 l^4/4)ea_3 + k^4 e^2 l. \end{aligned}$$

Суммарная квадратичная ошибка является *функцией* коэффициентов аппроксимирующего ряда  $a_2$  и  $a_3$ . Чтобы суммарная квадратичная ошибка стала минимальной, необходимо выполнить условия

$$\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_2 = 0, \quad \partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_3 = 0.$$

$$\begin{aligned} \partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_2 = & 8(l - 2k^2 l^3/3 + 2k^4 l^5/15)a_2 + (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_3 - 4(k^2 l - k^4 l^3/3)e = 0, \\ \partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_3 = & (12l^2 - 6k^2 l^4 + 7k^4 l^6/6)a_2 + 6(4l^3 - 12k^2 l^5/10 + 3k^4 l^7/14)a_3 - 6(k^2 l^2 - k^4 l^4/4)e = 0. \end{aligned}$$

Подстановка числовых значений произведений  $k^2 l^2 = Fl^2/(EJ_x) = 218 \cdot 350^2 / (2 \cdot 10^4 \cdot 1290) = 1,035$  и  $k^4 l^4 = 1,071$  и несложные преобразования приводят к системе.

$$\begin{aligned} 3,6267l^2 a_2 + 7,044l^3 a_3 - 2,7093e &= 0, \\ 7,044l^2 a_2 + 17,9309l^3 a_3 - 4,5990e &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:  $a_2 = 1,0203e/l^2$ ,  $a_3 = -0,1562e/l^3$ .

Изогнутая ось стержня при найденных коэффициентах описывается уравнением  $v = (1,0203z^2/l^2 - 0,1562z^3/l^3)e$ . Прогиб наверху

$$f = v(l) = 0,8941e = 0,8941 \cdot 9 = 8,05 \text{ см.}$$

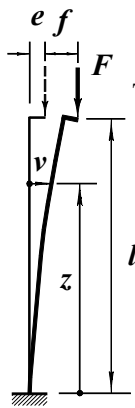


Рис. 17.3

Максимальный изгибающий момент в нижнем сечении стержня  $\max M_x = F(f + e) = 218(8,05 + 9) = 3716 \text{ кНсм}$ .

Наибольшие нормальные напряжения от сжатия с изгибом  $\max \sigma_z = F/A + \max M_x/W_x = 218/23,4 + 3716/143 = 35,3 \text{ кН/см}^2$ . Сравнивая полученный результат с точным (пример 13.2), видим, что они разнятся на единицу в третьей значащей цифре – практически совпадают.

Метод наилучшего квадратичного приближения в силу ясности и определенности действий и убедительности критерия нашел широкое применение в расчетной инженерной практике.

### 17.1.3. Метод ортогонализации

Прежде чем приступить к описанию метода, введем необходимые понятия.

Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  называются *ортогональными* на отрезке  $ab$ , если  $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$ . Аналогично, функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  ортогональны в области  $A$ , если  $\int_A f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 0$ . Очевидны условия ортогональности функций трех и большего числа переменных.

В методе ортогонализации требуют, чтобы функция-ошибка была ортогональна *n* весовым<sup>1</sup> функциям в области задачи  $z$

**Пример 17.3.** Найдем критическое значение силы, сжимающей шарнирно закрепленный стержень (приближенно решим задачу Эйлера; рис. 12.2, 17.4).

Дифференциальное уравнение задачи (разд. 12.2) –  $v'' + k^2 v = 0$  (где  $k^2 = F_{cr}/(EJ_x)$ ), (а)

Граничные условия:  $v(0) = 0, v(l) = 0$ . (б)

Аппроксимируем изогнутую ось стержня квадратной параболой  $v = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ . (в)

Из первого условия (б)  $v(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ ; из второго  $v(l) = 0 \Rightarrow a_1 l + a_2 l^2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 l$ . Таким образом,  $v = a_2(z^2 - lz)$ . (г)

Подставив равенство (г) в уравнение (а), получаем  $2a_2 + k^2 a_2(z^2 - lz) = 0$ , или  $a_2(2 + k^2(z^2 - lz)) = 0$  – это и есть функция-ошибка:  $\Delta = a_2(2 + k^2(z^2 - lz))$ .

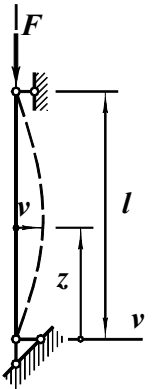


Рис. 17.4

<sup>1</sup> Весовая функция – функция значимости.

В качестве весовой функции примем простейшую – постоянную  $f_0 = 1$ . Условие ортогональности функции-ошибки и весовой функции имеет вид  $\int_0^l \Delta \cdot f_0 dz = \int_0^l a_2(2 + k^2(z^2 - lz)) dz = 0$ . После интегрирования приходим к равенству  $a_2(2l - k^2 l^3/6) = 0$ . Так как решение  $a_2 = 0$  не отвечает поставленной задаче, принимаем  $2l - k^2 l^3/6 = 0$ , откуда  $k^2 = 12/l^2$ ;  $F_{cr} = k^2 EJ_x = 12EJ_x/l^2$ . Точное значение критической силы  $F_{cr} = \pi^2 EJ_x/l^2$  почти на 22% меньше приближенного. Такая большая погрешность объясняется, главным образом, методической целенаправленностью примера.

Характеризуя в целом метод ортогонализации, следует прежде всего отметить отсутствие каких-либо ограничений при выборе весовых функций. Эта кажущаяся неопределенность метода в действительности предоставляет возможность гибкого его использования с учетом специфики задачи. Выделяя область повышенной точности, инженер может специальным подбором весовых функций улучшить решение в этой области. В частности, если в качестве весовых выбраны функции, аппроксимирующие ошибку, метод ортогонализации приводит к минимуму суммарной квадратичной ошибки. Действительно,  $\partial(\Sigma \Delta^2)/\partial a_i = \partial(\int \Delta^2 dz)/\partial a_i = 2\int \Delta(\partial \Delta/\partial a_i) dz = 0$ . Но  $\partial \Delta/\partial a_i$  и есть  $i$ -я функция в выражении  $\Delta$ . Таким образом, метод наилучшего квадратичного приближения можно рассматривать как частный случай метода ортогонализации.

Проиллюстрированными критериями не исчерпывается их перечень. В последующих разделах будут показаны другие приближенные методы решения краевых задач, также использующие идеи разложения (17.1) введения критерия качества.

## 17.2. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей основан на выражении производных функции через ее значения в конкретных точках. В результате дифференциальное уравнение или их систему удастся свести к системе линейных алгебраических уравнений.

Конечно-разностное выражение производной опирается на приближенное равенство  $f' = \lim \Delta y/\Delta x \approx \Delta y/\Delta x$  при конечных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

### 17.2.1. Конечно-разностные представления производных функции одной переменной

На рис. 17.5 показан график функции  $f(x)$ . Нанесем на ось  $x$  ряд равноотстоящих точек с номерами  $i-2, i-1, \dots, i+2$  и шагом  $\Delta x$ . Значения функции в этих точках обозначим  $f_{i-2}, f_{i-1}, \dots, f_{i+2}$ . Выразим первую производную в точке  $i$ . Это можно сделать двояко:

- по правой разности  $(f'_i)^r = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x$ ; (а)
- по левой разности  $(f'_i)^l = (f_i - f_{i-1})/\Delta x$ . (б)

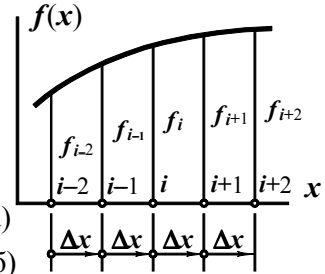


Рис. 17.5

Естественно принять в качестве производной в точке среднее из этих значений:  $f'_i = (f'_i)^r/2 + (f'_i)^l/2$ , что с учетом равенств (а) и (б) дает выражение

$$f'_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta x). \quad (17.2)$$

Конечно-разностные операторы удобно фиксировать не формулой, а в графическом виде. На рис. 17.6 изображен графический оператор первой производной. Правила его использования таковы:

- центральный обведенный двойной линией квадрат наложить на узел, для которого записывается выражение производной;  $f' = \boxed{-1} \boxed{0} \boxed{1} / (2\Delta x)$
- функции в узлах, накрытых квадратами оператора, умножить на соответствующие числа;
- произведения просуммировать и поделить на  $2\Delta x$ .

Рис. 17.6

Вторую производную представим как первую производную первой производной:  $f''_i = ((f'_i)^r - (f'_i)^l)/\Delta x$ . Подставив равенства (а) и (б), имеем  $f''_i = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})/\Delta x^2$ . (17.3)  $f'' = \boxed{1} \boxed{-2} \boxed{1} / \Delta x^2$

На рис. 17.7 изображен графический оператор второй производной. Правила пользования им аналогичны описанному выше.

Рис. 17.7

Четвертую производную запишем как вторую производную второй производной:  $f''''_i = (f''_{i-1} - 2f''_i + f''_{i+1})/\Delta x^2$ . После выражения вторых производных по формуле (17.3) приходим к равенству

$$f''''_i = (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})/\Delta x^4. \quad (17.4)$$

Формула (17.4) продублирована графически на рис. 17.8.

Рис. 17.8

Проиллюстрируем примером технику применения метода конечных разностей.

**Пример 17.4.** Найдем максимальный прогиб в балке, изображенной на рис. 17.9.

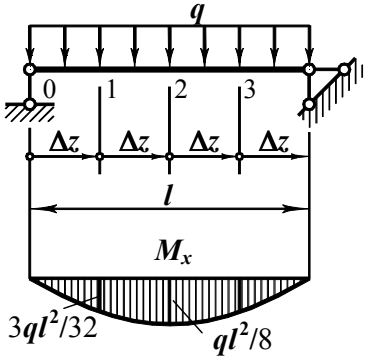


Рис. 17.9

Дифференциальное уравнение задачи  $v'' = M_x / (EJ_x)$ . (а)

Граничные условия (с учетом симметрии)  $v(0) = 0$ ,  $v'(l/2) = 0$ . (б)

Разобьем пролет балки на четыре равных отрезка  $\Delta z = l/4$  и пронумеруем. Запишем в конечно-разностном виде уравнение (а) для узлов 1 и 2.

Узел 1:  $v_1'' = M_{x1} / (EJ_x)$ . Наложив оператор, изображенный на рис. 17.7, на узел, имеем  $(v_0 - 2v_1 + v_2) / (l/4)^2 = -3ql^2 / (32EJ_x)$ .

Узел 2, аналогично:  $v_2'' = M_{x2} / (EJ_x)$ ;  $(v_1 - 2v_2 + v_3) / (l/4)^2 = -ql^2 / (8EJ_x)$ .

Из граничных условий следует:  $v_0 = 0$ ; используя оператор первой производной (17.2) (рис. 17.6), запишем  $v'(l/2) = (v_3 - v_1) / (2(l/4)) = 0 \Rightarrow v_3 = v_1$ . В итоге дифференциальные уравнения приняли вид

$$\begin{aligned} -2v_1 + v_2 &= -3ql^4 / (512EJ_x), \\ 2v_1 - 2v_2 &= -ql^4 / (128EJ_x). \end{aligned}$$

Максимальный прогиб посередине пролета. Из записанной системы уравнений  $v_2 = 7ql^4 / (512EJ_x) = 0,0137ql^4 / (EJ_x)$ . Точное решение  $v_2 = 0,0130ql^4 / (EJ_x)$  отличается от полученного на 5,4%. Погрешность объясняется достаточно грубой дискретизацией балки. Впрочем, цель примера не получение точного результата, а иллюстрация метода.

### 17.2.2. Конечно-разностные представления производных функции двух переменных

Геометрическим образом функции двух переменных является поверхность. Производная функции зависит не только от положения точки, но и от направления. Поэтому, говоря о производных, следует указывать точку, порядок и направление.

На рис. 17.10 изображен фрагмент области определения функции  $f(x, y)$ . Как известно, первая частная производная  $\partial f / \partial x$  в точке  $i, j$  может быть выражена через узловые значения функции по форму-

ле (17.2), которая при двумерной нумерации имеет вид

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) / (2\Delta x).$$

Производная по переменной  $y$  –

$$(\partial f / \partial y)_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) / (2\Delta y).$$

Графическим конечно-разностным оператором первой производной можно пользоваться и для функции двух переменных. Дифференцируя по  $x$ , его следует располагать параллельно оси  $x$ ; при записи производной по  $y$  повернуть на  $90^\circ$  против хода часовой стрелки и заменить  $\Delta x$  на  $\Delta y$ .

Аналогично выражают вторые производные  $(\partial^2 f / \partial x^2)_{i,j}$ ,  $(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j}$  и четвертые  $(\partial^4 f / \partial x^4)_{i,j}$ ,  $(\partial^4 f / \partial y^4)_{i,j}$ . Аналогично и использование соответствующих им графических операторов.

Запишем конечно-разностное выражение второй смешанной производной  $(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j}$ , представив ее так:  $(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j} = (\partial(\partial f / \partial y) / \partial x)_{i,j} =$

$= ((\partial f / \partial y)_{i+1,j} - (\partial f / \partial y)_{i-1,j}) / (2\Delta x)$ . После выражения первых производных по  $y$  через узловые значения функции получаем

$$(\partial^2 f / \partial x \partial y)_{i,j} = (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1}) / (4\Delta x \Delta y). \quad (17.5)$$

Графический оператор второй смешанной производной изображен на рис. 17.11. Расположение ненулевых коэффициентов в нем таково, что эту производную можно определять для точек, лежащих в центрах разностных прямоугольников – как бы при вдвое уменьшенном шаге.

Выведем конечно-разностную формулу четвертой смешанной производной  $(\partial^4 f / \partial x^2 \partial y^2)_{i,j}$ :  $(\partial^4 f / \partial x^2 \partial y^2)_{i,j} = (\partial^2((\partial^2 f / \partial y^2) \partial x^2)_{i,j} =$

$= ((\partial^2 f / \partial y^2)_{i-1,j} - 2(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j} + (\partial^2 f / \partial y^2)_{i+1,j}) / \Delta x^2 =$

$$\begin{aligned} &= (f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j-1} + 4f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) / (\Delta x^2 \Delta y^2) \\ &= (f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}) / \Delta x^4 + \\ &+ 2(f_{i-1,j-1} - 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j-1} + 4f_{i,j} - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) / (\Delta x^2 \Delta y^2) + \\ &+ (f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}) / \Delta y^4. \end{aligned}$$

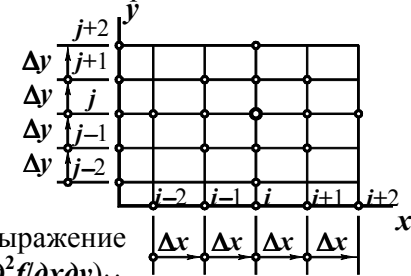


Рис. 17.10

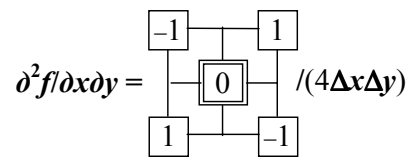


Рис. 17.11

Если умножить обе части равенства, скажем на  $\Delta x^4$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta x^4(\nabla^4 f)_{i,j} &= \\ &= \alpha^4 f_{i,j+2} + \\ &+ 2\alpha^2 f_{i-1,j+1} - 4\alpha^2(1+\alpha^2) f_{i,j+1} + 2\alpha^2 f_{i+1,j+1} + \\ &+ f_{i-2,j} - 4(1+\alpha^2) f_{i-1,j} + (6+8\alpha^2+6\alpha^4) f_{i,j} - 4(1+\alpha^2) f_{i+1,j} + f_{i+2,j} + \\ &+ 2\alpha^2 f_{i-1,j-1} - 4\alpha^2(1+\alpha^2) f_{i,j-1} + 2\alpha^2 f_{i+1,j-1} + \\ &+ \alpha^4 f_{i,j-2}. \end{aligned}$$

Здесь фигурирует параметр разностной сетки  $\alpha = \Delta x/\Delta y$ . На рис. 17.12 изображен рассмотренный дифференциальный оператор в графической форме.

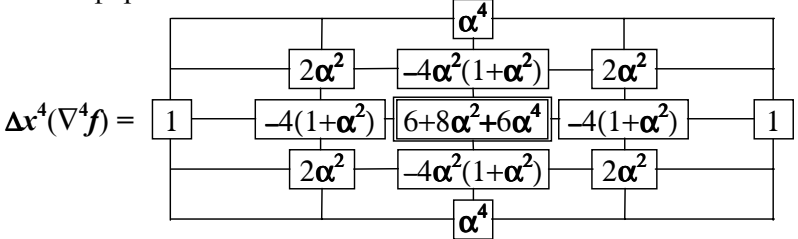
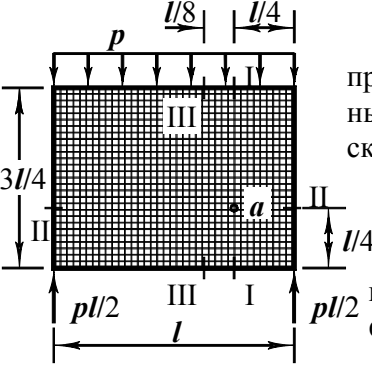


Рис. 17.12

Он облегчает формирование соответствующих дифференциальных уравнений в конечно-разностном виде.

**17.2.3. Пример решения плоской задачи теории упругости методом конечных разностей**

**Пример 17.5.** В прямоугольной пластинке, нагруженной как показано на рис. 17.13,



- построим эпюры нормальных напряжений в сечениях I-I и II-II, касательных в III-III, рассчитав ее в рамках плоской задачи теории упругости;
- найдем направления и величины главных напряжений в точке *a*;
- сравним полученные эпюры напряжений с эпюрами, соответствующими формулам сопротивления материалов.

Рис. 17.13

Используем функцию напряжений.  
 Дифференциальное уравнение задачи (16.10) –  $\nabla^4 \varphi = 0$ . (а)  
 Граничные условия (16.11):  $\varphi = M$ ,  $\partial \varphi / \partial n = N$ . (б)

1. Составление и решение дифференциального уравнения методом конечных разностей.

Нанесем на область, охватываемую задачей, разностную сетку<sup>1</sup> (рис. 17.14) и пронумеруем узлы, учитывая симметрию расчетной схемы:

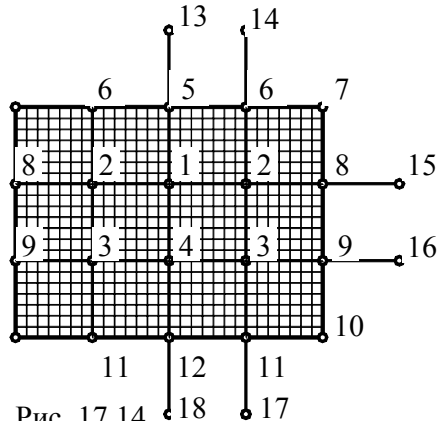


Рис. 17.14

- внутренние 1, ... , 4;
- контурные 5, ... , 12;
- законтурные 13, ... , 18.

1.1. Запишем в конечно-разностной форме дифференциальное уравнение задачи (а).

Для этого вначале вычислим коэффициенты бигармонического оператора, приведенного на рис. 17.12. Горизонтальный шаг сетки  $\Delta x = l/4$ , вертикальный  $\Delta y = l/4$ ; параметр  $\alpha = \Delta x/\Delta y = 1$ . Конечно-разностный оператор для квадратной сетки приведен на рис. 17.15.

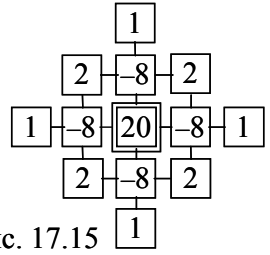


Рис. 17.15

Пользуясь оператором, как шаблоном, записываем дифференциальное уравнение для каждого внутреннего узла.

- Узел 1:  $20\varphi_1 - 8(\varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_2) + 2(\varphi_6 + \varphi_3 + \varphi_3 + \varphi_6) + \varphi_{13} + \varphi_8 + \varphi_{12} + \varphi_8 = 0$ ;
- Узел 2:  $20\varphi_2 - 8(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_3 + \varphi_1) + 2(\varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_4 + \varphi_5) + \varphi_{14} + \varphi_{15} + \varphi_{11} + \varphi_2 = 0$ ;
- Узел 3:  $20\varphi_3 - 8(\varphi_2 + \varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_4) + 2(\varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12} + \varphi_1) + \varphi_6 + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_3 = 0$ ;
- Узел 4:  $20\varphi_4 - 8(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_{12} + \varphi_3) + 2(\varphi_2 + \varphi_{11} + \varphi_{11} + \varphi_2) + \varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_{18} + \varphi_9 = 0$ . (в)

1.2. Граничные условия (б).

Для записи граничных условий построим эпюры изгибающих моментов и продольных сил в раме, изображенной на рис. 17.16 а.

1.2.1. Согласно равенству (16.11)  $\varphi = M$ . Функция напряжений в контурных узлах имеет значения (рис. 17.16 б)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = 0; \quad \varphi_6 = -pl^2/32; \quad \varphi_7 = -pl^2/8; \quad \varphi_8 = -pl^2/8; \\ \varphi_9 = -pl^2/8; \quad \varphi_{10} = -pl^2/8; \quad \varphi_{11} = -pl^2/8; \quad \varphi_{12} = -pl^2/8. \end{aligned} \quad (г)$$

<sup>1</sup> Пример преследует методические цели, поэтому сетка редкая. Это отразится на точности результата.

<sup>2</sup> Напомним, что функция напряжений положительна, если у рамы растянуты внутренние волокна.

1.2.2. Второе условие (16.11) на границе ( $\partial\varphi/\partial n = \nu$ , рис. 17.16 в) позволяет связать внутри- и законтурные значения функции напряжений (см. графический оператор 17.8).

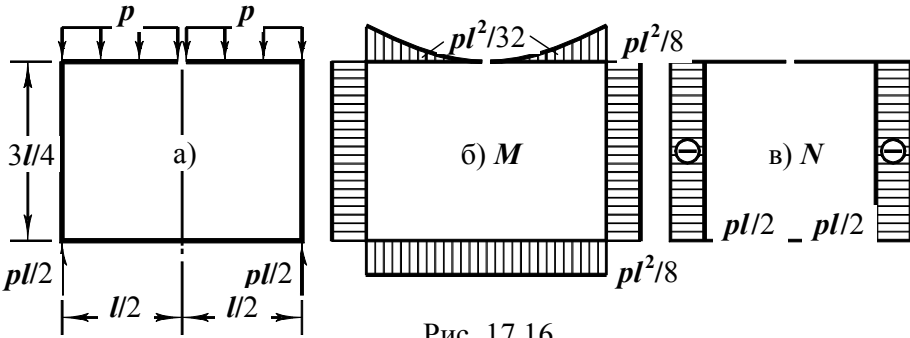


Рис. 17.16

Узлы 5, 6, 8, 9, 11 и 12:

$$\begin{aligned} (\partial\varphi/\partial n)_5 &= (\partial\varphi/\partial y)_5 = N_5; (\varphi_{13} - \varphi_1)/(2\Delta y) = (\varphi_{13} - \varphi_1)/(2l/4) = 0; \varphi_{13} = \varphi_1. \\ (\partial\varphi/\partial n)_6 &= (\partial\varphi/\partial y)_6 = N_6; (\varphi_{14} - \varphi_2)/(2\Delta y) = (\varphi_{14} - \varphi_2)/(2l/4) = 0; \varphi_{14} = \varphi_2. \\ (\partial\varphi/\partial n)_8 &= (\partial\varphi/\partial x)_8 = N_8; (\varphi_{15} - \varphi_2)/(2\Delta x) = (\varphi_{15} - \varphi_2)/(2l/4) = -pl/2; \varphi_{15} = \varphi_2 - pl^2/4. \\ (\partial\varphi/\partial n)_9 &= (\partial\varphi/\partial x)_9 = N_9; (\varphi_{16} - \varphi_3)/(2\Delta x) = (\varphi_{16} - \varphi_3)/(2l/4) = -pl/2; \varphi_{16} = \varphi_3 - pl^2/4. \\ (\partial\varphi/\partial n)_{11} &= (\partial\varphi/(-\partial y))_{11} = N_{11}; (\varphi_{17} - \varphi_3)/(2\Delta y) = (\varphi_{17} - \varphi_3)/(2l/4) = 0; \varphi_{17} = \varphi_3. \\ (\partial\varphi/\partial n)_{12} &= (\partial\varphi/(-\partial y))_{12} = N_{12}; (\varphi_{18} - \varphi_4)/(2\Delta y) = (\varphi_{18} - \varphi_4)/(2l/4) = 0; \varphi_{18} = \varphi_4. \quad (д) \end{aligned}$$

Система (в), (г) и (д) содержит 18 уравнений с 18-ю неизвестными функциями напряжений. Подставив равенства (г) и (д) в (в), приходим к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} 21\varphi_1 - 16\varphi_2 + 4\varphi_3 - 8\varphi_4 &= 0,5000pl^2; \\ -8\varphi_1 + 23\varphi_2 - 8\varphi_3 + 2\varphi_4 &= -0,3750pl^2; \\ 2\varphi_1 - 8\varphi_2 + 23\varphi_3 - 8\varphi_4 &= -0,9676pl^2; \\ -8\varphi_1 + 4\varphi_2 - 16\varphi_3 + 21\varphi_4 &= -0,2500pl^2. \end{aligned}$$

Решив систему, находим внутриконтурные значения функции  $\varphi$ :

$$\varphi_1 = -0,02518pl^2; \varphi_2 = -0,04723pl^2; \varphi_3 = -0,08260pl^2; \varphi_4 = -0,07543pl^2. \quad (е)$$

В точках границы пластинки функция напряжений известна – равенства (г). По соотношениям (д) и равенствам (е) находим значения функции напряжений в законтурных узлах. Результаты выполненных вычислений приведены на рис. 17.17.

2. Эпюры напряжений.

2.1. Сечение I–I.

Нормальные напряжения (16.9)  $\sigma_x = \partial^2\varphi/\partial y^2$ . Используя конечно-разностный оператор второй производной, изображенный на рис. 17.7, но повернутый на  $90^\circ$ , находим:

$$\begin{aligned} \text{Узел 6: } \sigma_x^6 &= (\partial^2\varphi/\partial y^2)_6 = \\ &= (\varphi_2 - 2\varphi_6 + \varphi_{14})/\Delta y^2 = \\ &= (-0,04723 - 2(-0,03125) - \\ &- 0,04723)pl^2/(l/4)^2 = -0,5114p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 2: } \sigma_x^2 &= (\partial^2\varphi/\partial y^2)_2 = \\ &= (\varphi_3 - 2\varphi_2 + \varphi_6)/\Delta y^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,04723) - 0,03125)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= -0,3102p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 3: } \sigma_x^3 &= (\partial^2\varphi/\partial y^2)_3 = (\varphi_{11} - 2\varphi_3 + \varphi_2)/\Delta y^2 = \\ &= (-0,12500 - 2(-0,08260) - 0,04723)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= -0,1125p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 11: } \sigma_x^{11} &= (\partial^2\varphi/\partial y^2)_{11} = (\varphi_{17} - 2\varphi_{11} + \varphi_3)/\Delta y^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,12500) - 0,08260)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= 1,3568p. \end{aligned}$$

Эпюра напряжений  $\sigma_x$  в сечении I–I изображена на рис. 17.18.

2.2. Сечение II–II.

$$\begin{aligned} \text{Нормальные напряжения } \sigma_y &= \partial^2\varphi/\partial x^2. \\ \text{Узел 4: } \sigma_y^4 &= (\partial^2\varphi/\partial x^2)_4 = (\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_3)/\Delta x^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,07543) - 0,08260)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= -0,2294p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 3: } \sigma_y^3 &= (\partial^2\varphi/\partial x^2)_3 = (\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_9)/\Delta x^2 = \\ &= (-0,07543 - 2(-0,08260) - 0,12500)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= -0,5637p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел 9: } \sigma_y^9 &= (\partial^2\varphi/\partial x^2)_9 = (\varphi_3 - 2\varphi_9 + \varphi_{16})/\Delta x^2 = \\ &= (-0,08260 - 2(-0,12500) - 0,33260)pl^2/(l/4)^2 = \\ &= -2,6432p. \end{aligned}$$

Распределение напряжений  $\sigma_y$  по сечению II–II показано на рис. 17.19.

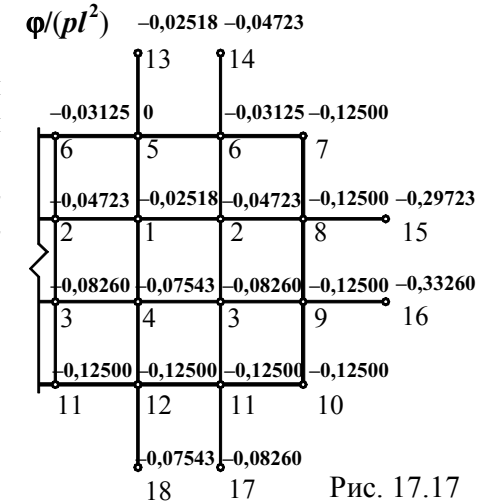


Рис. 17.17

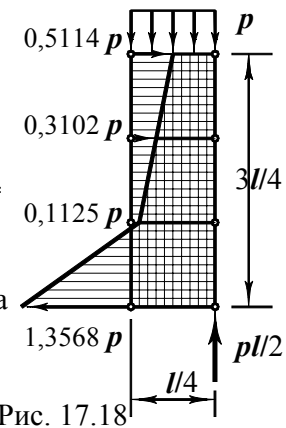


Рис. 17.18

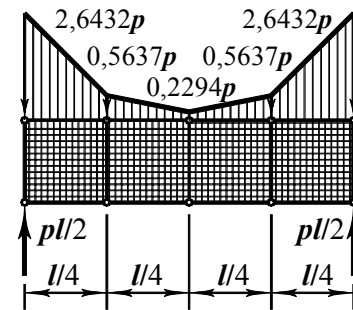
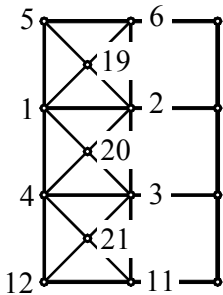


Рис. 17.19

2.2. Сечение III–III. Касательные напряжения  $\tau_{xy} = -\partial^2\phi/\partial x\partial y$ .



При определении этих напряжений учтем специфику оператора смешанного двукратного дифференцирования (рис. 17.11) и выберем узлы посередине квадратов разностной сетки – 19, 20 и 21 на рис. 17.20, вдвое уменьшив шаги сетки.

Узел 19:  $\tau_{xy}^{19} = -(\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{19} =$   
 $= (\phi_2 - \phi_1 + \phi_5 - \phi_6) / (4(\Delta x/2)(\Delta y/2)) =$   
 $= (-0,04723 - (-0,02518) + 0 - (-0,03125)) pl^2 / (4(l/8)(l/8)) =$   
 $= 0,1472p.$

Рис. 17.20

Узел 20:  $\tau_{xy}^{20} = -(\partial^2\phi/\partial x\partial y)_{20} = (\phi_3 - \phi_4 + \phi_7 - \phi_2) / (4(\Delta x/2)(\Delta y/2)) =$   
 $= (-0,08260 - (-0,07543) - 0,02518 - (-0,04723)) pl^2 / (4(l/8)(l/8)) = 0,2381p.$

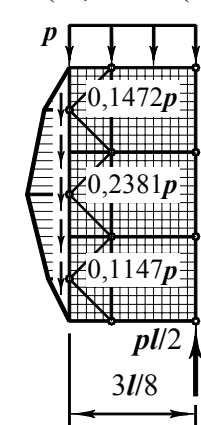


Рис. 17.21

Эпюра касательных напряжений в сечении показана на рис. 17.21.

2.2. Статические проверки эпюр напряжений.

Неотъемлемой частью всякого ответственного расчета являются проверки безошибочности его выполнения. Важно определить, какие проверки необходимо сделать, и установить, какую часть всего объема охватывает тот или иной контрольный расчет, наконец, иметь четкое представление об истоках несовпадения рабочих и контрольных вычислений. Отметив важность такого контроля и не имея возможности глубоко вдаваться в эту тему, остановимся на статических проверках полученных эпюр.

Статические проверки контролируют выполнение условий равновесия. В них рассматривают ту часть пластинки, по отношению к которой проверяемые напряжения являются внешними силами. Эти части пластинки выделены на рис. 17.18, 17. 19 и 17.21.

Внешние силы, приложенные к этим частям, образуют плоские произвольные системы, которые должны выполнять условия  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma \text{мом} = 0$ . Из них нужно использовать те, куда входят проверяемые напряжения.

Так, для статической проверки нормальных напряжений в сечении I–I можно использовать лишь условия  $\Sigma X = 0$  и  $\Sigma \text{мом} = 0$ . При этом моментная точка должна находиться в сечении, чтобы исключить влияние неизвестных касательных напряжений. Существенен в этом случае способ аппроксимации эпюры напряжений. Ограничимся аппроксимацией ломаной линией (рис. 17.18). Пользуясь формулой трапеций, имеем

$$\Sigma X = (0,5114/2 + 0,3102 + 0,1125 - 1,3568/2) pl/4 = 0,0000.$$

Проверка сошлась<sup>1</sup>.

Иначе нужно проверять сумму моментов сил. Здесь нужно:

- разбить эпюру напряжений на узловые участки;
- найти равнодействующие на каждом участке;
- равнодействующие приложить в соответствующие узлы.

В таком случае проверка должна сойтись с точностью до арифметических округлений<sup>2</sup>.

Следуя высказанным рекомендациям, найдем (рис. 17.22):

$$N_6 = 0,5114p(l/4)/2 = 0,06392pl;$$

$$N_2 = 0,3102p(l/2)/2 = 0,07755pl;$$

$$N_3 = 0,1125p(l/2)/2 = 0,02812pl;$$

$$N_{11} = 1,3568p(l/4)/2 = 0,16960pl.$$

Просуммируем моменты относительно точки 11:

$$\Sigma \text{мом} = 0,06392pl(3l/4) + 0,07755pl(l/2) + 0,02812pl(l/4) + p(l/4)(l/8) - (pl/2)(l/4) = 0,000005pl^2.$$

Ошибка также не обнаружена.

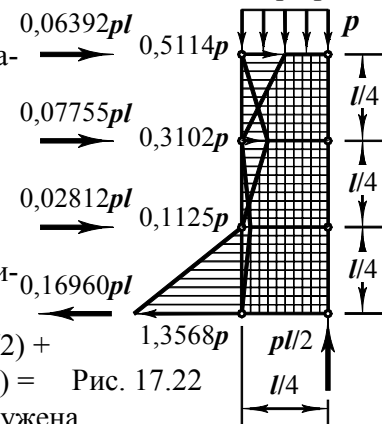


Рис. 17.22

Статическая проверка эпюры напряжений  $\sigma_y$  в сечении II–II.

Для проверки этой эпюры (рис. 17.19) можно использовать только условие  $\Sigma Y = 0$ . При любых значениях симметричной эпюры напряжений сумма моментов относительно середины обратится в нуль. Суммируем:  $\Sigma Y = 2(2,6432/2 + 0,5637 + 0,2294/2) p(l/4) - pl = 0,0000$ . Проверка сошлась.

<sup>1</sup> Эта проверка охватывает очень ограниченную область. Можно доказать, что при правильном выражении законтурных значений функции напряжений через внутриконтурные проверка сойдется при любых величинах  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  и  $\phi_4$ .

<sup>2</sup> Это также можно доказать.

проверим теперь касательные напряжения в сечении III-III (рис. 17.21). Здесь возможна одна проверка  $-\Sigma Y = 0$ :  $0,1472p(l/8)/2 + (0,1472/2 + 0,2381 + 0,1147/2)p(l/4) + 0,1147p(l/8)/2 + p(3l/8) - pl/2 = -0,0166pl$ . На 3 % преобладает сила, направленная вверх.

Если, игнорируя свойство парности касательных напряжений и допуская скачкообразное их изменение, принять распределение напряжений в пределах шага равномерным (рис. 17.23), то проверка сойдется:

$(0,1472+0,2381+0,1147)p(l/4)+p(3l/8)-pl/2 = 0,0000$ . Этот противоречивый с точки зрения механики вариант эпюры касательных напряжений позволяет проверить правильность вычислений.

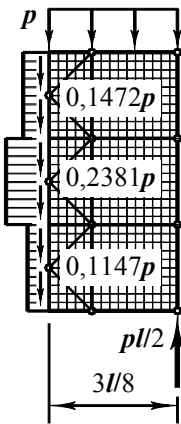


Рис. 17.23

### 3. Определение величин и направлений главных напряжений в точке *a*.

Нормальные напряжения найдены ранее:  $\sigma_x^a = \sigma_x^3 = -0,1125p$ ,  $\sigma_y^a = \sigma_y^3 = -0,5637p$  – сжимающие (рис. 17.24).

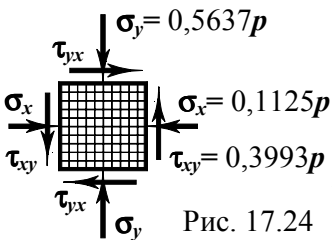


Рис. 17.24 Напряжение положительно. Это значит, что в площадке с положительной внешней нормалью, например в правой, оно направлено в сторону соответствующей оси (*y*) – вверх.

Положения главных площадок определим по формуле (4.5):

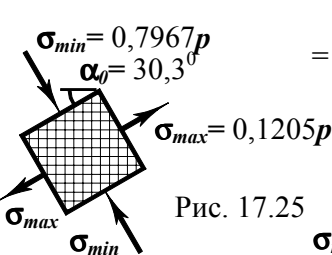


Рис. 17.25 Главные напряжения (4.6):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) = \\ &= 2 \cdot 0,3993p / (-0,1125p - (-0,5637p)) = 1,7717. \end{aligned}$$

Угол  $\alpha_0 = 30,3^\circ$ . Так как угол положительный, поворачиваем элемент против хода часовой стрелки (рис. 17.25).

$$\begin{aligned} \sigma_{\max(\min)} &= (\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}) / 2 = \\ &= (-0,1125 - 0,5637 \pm \sqrt{(-0,1125 + 0,5637)^2 + 4 \cdot 0,3993^2})p / 2 = 0,1205(-0,7967)p. \end{aligned}$$

Наибольшее сжимающее напряжение ( $\sigma_{\min} = -0,7967p$ ) лежит внутри 45-градусного сектора, где суммируются сжимающие эффекты  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . Второе главное напряжение ( $\sigma_{\max} = 0,1205p$ ) – в перпендикулярной площадке (рис. 17.25). Итак, главные напряжения в точке *a*:

$$\sigma_1 = 0,1205p; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -0,7967p.$$

### 4. Расчет напряжений в сечениях I-I, II-II и III-III по формулам сопротивления материалов.

Сопротивление материалов, опирающееся на фундаментальные для него гипотезы плоских сечений и ненадавливания волокон, утверждает наличие нормальных напряжений лишь в поперечных сечениях стержня. Поэтому при определении  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  следует моделировать пластинку стержнем, в котором рассматриваемое сечение является поперечным.

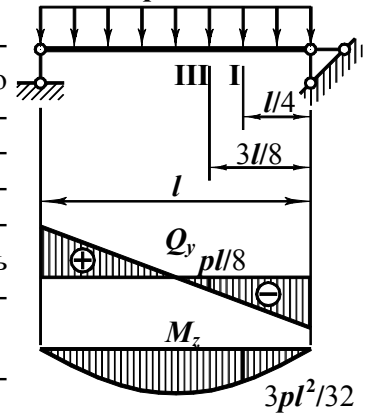


Рис. 17.26

#### 4.1. Нормальные напряжения в сечении I-I.

Чтобы сечение I-I было поперечным, пластинку имитируем горизонтальной балкой, подверженной вертикальной нагрузке. Балка, нагрузка и эпюры поперечной силы и изгибающего момента изображены на рис. 17.26.

В рассматриваемом сечении возникает нормальные напряжения  $\sigma_x = M_z y / J_z$ . Наибольшее  $\max \sigma_x = M_z / W_z = (3pl^2/32) / (1(3l/4)^2/6) = p$ . Эпюра “балочных” напряжений изображена сплошной линией на рис. 17.27. Там же для сравнения пунктиром показана эпюра этих же напряжений, полученная выше более точным методом (несмотря на использованную грубую сетку, решение, опирающееся на уравнения плоской задачи теории упругости, следует оценивать как более точное).

Качественно эпюры совпадают. Обе обнаруживают наличие сжатой и растянутой зон в сечении. Однако наибольшие сжимающие напряжения отличаются почти вдвое, наибольшие растягивающие – на десятки процентов.

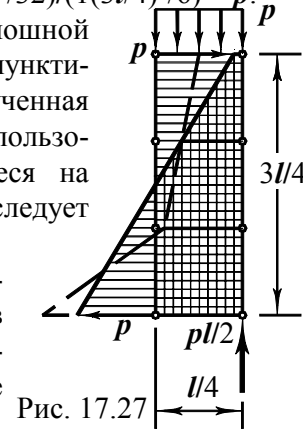


Рис. 17.27

#### 4.2. Нормальные напряжения в сечении II–II.

Для определения этих напряжений моделируем пластинку вертикальным стержнем (рис. 17.28). При такой расчетной схеме в сечении II–II возникают равномерно распределенные сжимающие напряжения  $\sigma_y = N/A = pl/(1l) = p$ .

На рис. 17.29 дано сопоставление эпюр  $\sigma_y$ , соответствующих формулам сопротивления материалов и методам теории упругости. Видно, что сопротивление материалов осредняет напряжения по сечению и не вскрывает их концентрацию вблизи действия сосредоточенных сил. Напряжения отличаются более чем вдвое при общем качественном сходстве (во всех точках сечения напряжения  $\sigma_y$  сжимающие).

#### 4.3. Касательные напряжения $\tau_{xy}$ в сечении III–III.

Напряжения  $\tau_{xy}$  могут быть спрогнозированы по формулам сопротивления материалов моделями, приведенными на рис. 17.26 и 17.28.

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в поперечном сечении балки определяются формулой Журавского (7.4). В прямоугольном сечении они изменяются по параболическому закону (7.5) с максимальным значением

$$\max \tau_{xy} = 3Q_y / (2A) = 3(pl/8) / (2 \cdot 1 \cdot (3l/4)) = 0,25p.$$

Эпюра  $\tau_{xy}$  изображена на рис. 17.30 сплошной линией. Там же пунктиром показана эпюра  $\tau_{xy}$ , полученная выше. Качественное и количественное сходство эпюр располагает к доверительному восприятию результата.

Расчетная схема, приведенная на рис. 17.28, напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении III–III не обнаруживает, ибо оно является в этом случае продольным, в котором при центральной сжатии (согласно решению сопротивления материалов) ни нормальные, ни касательные напряжения не возникают.

### 17.3. Заключение к разделу

Определение напряжений, деформаций и перемещений в элементах конструкций сводится, как правило, к решению дифференциальных уравнений – обыкновенных (стержни, осесимметрично нагруженные круглые пластинки и оболочки вращения и т.п.) или в частных производных (пластинки и оболочки при произвольной нагрузке и т.п.). Нередко приходится решать не только отдельные дифференциальные уравнения, но и их системы. Сложность и многообразие математических задач приводят к необходимости привлечения специальных разделов этой мощной и всеобъемлющей науки.

Включенный в настоящий раздел материал не претендует на полное и системное изложение методов решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям. Он направлен на формирование начального представления о некоторых простейших методах преодоления математических трудностей. В расчетной практике используют и другие методы:

- приведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному или интегральному уравнению;
- замены дифференциального уравнения вариационной задачей;
- введения малых возмущений во взаимодействующие функции (в задачах устойчивости) и многое другое.

Желающим познакомиться с перечнем и сущностью математических методов, нашедших применение в задачах механики твердого деформируемого тела, следует обратиться к специальной литературе.

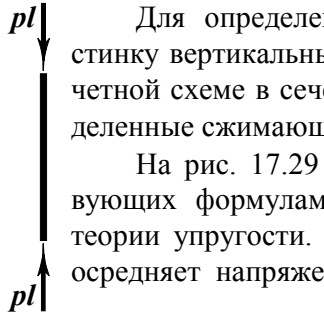


Рис. 17.28

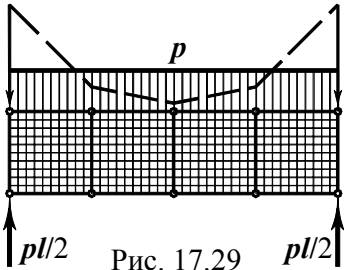


Рис. 17.29

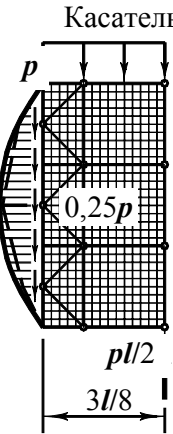


Рис. 17.30



## 18. Основы технической теории изгибаемых пластин

Пластины – весьма распространенный элемент строительных сооружений. Плиты перекрытий жилых, гражданских и промышленных зданий, автомобильных и железнодорожных мостов, дорожные и аэродромные покрытия, фундаментные плиты – вот далеко не полный перечень их применения. По этой причине умение численно прогнозировать их состояния под нагрузкой приобретает большую практическую значимость. В этом разделе рассмотрим прямоугольные пластины, подверженные поперечной нагрузке (рис. 18.1).

Геометрическими представителями пластины в расчетной схеме служат форма и размеры срединной плоскости и толщина.

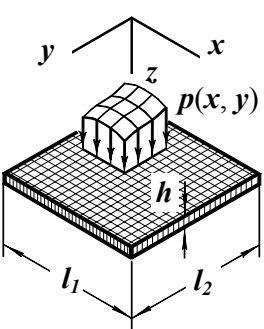


Рис. 18.1

Вторым признаком, по которому подразделяют пластины является соотношение прогибов  $w_{max}$  и толщины  $h$ . Если

- $w_{max}/h \leq 0,2$ , пластины относят к категории *жестких*;
- $w_{max}/h \geq 0,2$ , – *гибких*.

В зависимости от соотношения размеров пластины из подразделяют на

- *толстые плиты*, если  $l_{max}/h \leq 10$ ;
- *тонкие пластинки* при  $10 \leq l_{max}/h \leq 100$ ;
- *мембраны*, у которых  $l_{max}/h \geq 100$ .

Первые из них рассчитывают с учетом всех компонентов объемного напряженного состояния; для вторых заимствуют некоторые предпосылки теории изгиба балок; в третьих игнорируют изгибную жесткость, считая, что они способны воспринимать лишь растягивающие усилия.

Железобетонные плиты обычно считают жесткими, толстыми или тонкими – в зависимости от конкретных условий; стальные же, как правило, тонкие, но при одних обстоятельствах жесткими, при других гибкими.

Приведенная классификация весьма ориентировочна и категорию, к которой можно отнести конкретную плиту, следует выбирать не столько по данным выше количественным соотношениям, а по обоснованности предпосылок расчета, заложенных в теорию.

Ниже остановимся на теории тонких жестких пластин.

### 18.1. Исходные предпосылки теории тонких жестких пластин

Техническая теория основана на трех фундаментальных гипотезах<sup>1</sup>:

– *неизменности нормали* (отрезки, прямые и перпендикулярные срединной плоскости до деформации, остаются прямыми и перпендикулярными срединной поверхности после деформации);

– *ненадавливания слоев* (напряжения, возникающие между слоями, параллельными срединной плоскости, малы и ими можно пренебречь);

– *отсутствии деформаций в срединной плоскости* (срединная плоскость пластинки рассматривают как нейтральный слой, который изгибается, но не испытывает линейных и сдвиговых деформаций).

### 18.2. Разрешающие уравнения в декартовых координатах

При расчете прямоугольных пластин удобно использовать декартовы координаты. Разрешающие уравнения включают статические, геометрические и физические условия. Сформируем их.

#### 18.2.1. Статические уравнения

Они содержат условия равновесия и условия статической эквивалентности.

<sup>1</sup> Первые две предпосылки связывают с именем Густава Роберта Кирхгоффа (1824–1887) – выдающегося немецкого ученого, выпускника Кенигсбергского университета, автора многих оригинальных работ в области физики и, в частности, теории упругости.

запишем условия равновесия элементарного параллелепипеда (рис. 18.2), выделенного двумя парами вертикальных плоскостей, параллельных осям  $x$  и  $y$ , из пластинки, изображенной на рис. 18.1.

Обобщенные внешние силы, действующие на него со стороны отброшенных частей пластинки:

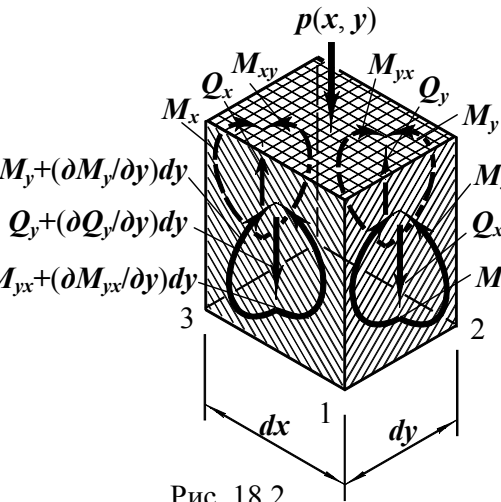


Рис. 18.2

– поперечные силы с интенсивностями  $Q_x$  и  $Q_y$ ,  
– изгибающие и крутящие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  и  $M_{yx}$  (их размерность  $Hm/m$ );  
– вертикальное давление  $p(x, y)$  ( $H/m^2$ ).

Обратим внимание на правило индексации усилий:

- у поперечных сил и изгибающих моментов он связан с нормалью к площадке, в которой они действуют;
- у крутящего момента первый индекс также определяет нормаль к площадке, второй – плоскость действия момента.

Приравняем нулю сумму вертикальных сил:

$$Q_x dy + Q_y dx - (Q_x + (\partial Q_x / \partial x) dx) dy - (Q_y + (\partial Q_y / \partial y) dy) dx - p(x, y) dx dy = 0.$$

После приведения подобных членов и деления на произведение  $dx dy$  получаем  $\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y = -p$ . (a)

Второе условие равновесия – равенство нулю суммы моментов относительно ребра 1–2:

$$Q_x dy dx + M_x dy + M_{yx} dx + Q_y dx dx / 2 - (M_x + (\partial M_x / \partial x) dx) dy - (M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial y) dy) dx - (Q_y + (\partial Q_y / \partial y) dy) dx dx / 2 - p(x, y) dx dy dx / 2 = 0.$$

После: – приведения подобных членов;

– деления на произведение  $dx dy$ ;

– отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка  $(\partial Q_y / \partial y) dx / 2$  и  $p(x, y) dx / 2$  приводит к уравнению

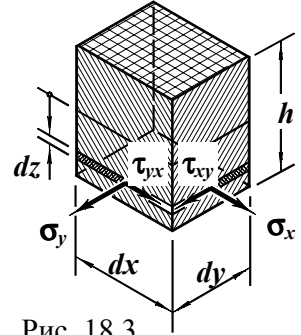
$$\partial M_x / \partial x + \partial M_{yx} / \partial y = Q_x. \quad (б)$$

Равенство нулю суммы моментов относительно ребра 1–3 после аналогичных преобразований формируется в уравнение

$$\partial M_{xy} / \partial x + \partial M_y / \partial y = Q_y. \quad (в)$$

Вторая часть этой группы уравнений – это условия статической эквивалентности. Так, из равенства  $M_x dy = \int_h (\sigma_x (dy dz) z)$  (рис. 18.2, 18.3) следует выражение  $M_x = \int_h \sigma_x z dz$ . Повторив аналогичные действия для остальных моментов, в итоге приходим к условиям

$$M_x = \int_h \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_h \sigma_y z dz, \\ M_{xy} = \int_h \tau_{xy} z dz, \quad M_{yx} = \int_h \tau_{yx} z dz. \quad (г) \text{ Рис. 18.3}$$



Последние два равенства с учетом свойства парности касательных напряжений показывают, что  $M_{xy} = M_{yx}$ .

### 18.2.2. Геометрические соотношения

Установим зависимость деформаций в точке от прогиба.

Рассмотрим вертикальное сечение, параллельное оси  $x$  (рис. 18.4). Произвольная точка, до деформации занимавшая положение  $a$ , после деформации сместится в  $a_1$ . Опираясь на гипотезу неизменности нормали, выразим ее горизонтальное перемещение  $u$  через прогиб  $w$ :  $u = -z \beta_x$ . Но  $\beta_x = \partial w / \partial x$ . Следовательно,  $u = -z \partial w / \partial x$ . Если рассмотреть перемещения в вертикальной плоскости, параллельной оси  $y$ , получим зависимость горизонтального перемещения  $v$  от прогиба:  $v = -z \partial w / \partial y$ . После подстановки полученных зависимостей в соотношения Коши (16.2) получаем:

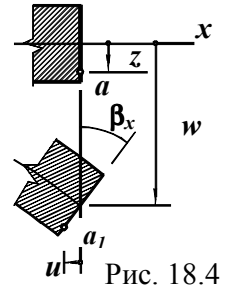


Рис. 18.4

$$\epsilon_x = -z \partial^2 w / \partial x^2; \quad \epsilon_y = -z \partial^2 w / \partial y^2; \quad \gamma_{xy} = -2z \partial^2 w / \partial x \partial y. \quad (д)$$

### 18.2.3. Физические зависимости

Так как теория тонких пластин опирается на гипотезу о ненадавливании слоев, материал испытывает плоское напряженное состояние (рис. 18.5). Закон Гука для него имеет вид (16.3):

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + \nu \epsilon_y) / (1 - \nu^2); \quad \sigma_y = E(\epsilon_y + \nu \epsilon_x) / (1 - \nu^2); \\ \tau_{xy} = E \gamma_{xy} / (2(1 + \nu)). \quad (е)$$

Уравнения (a) ... (e) образуют разрешающую систему.

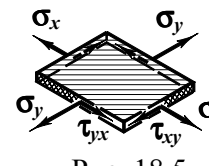


Рис. 18.5

### 18.3. Преобразования системы уравнений.

#### Расчетные формулы

Система (а)...(е) состоит из тринадцати уравнений, содержащих

– шесть неизвестных внутренних силовых факторов:  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,

$M_y$ ,  $M_{xy}$  и  $M_{yx}$ ;

– три напряжения:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ;

– три деформации:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ ;

– одно перемещение –  $w$ .

В таком виде они сложны в реализации. Преобразуем уравнения так, чтобы максимально облегчить их использование.

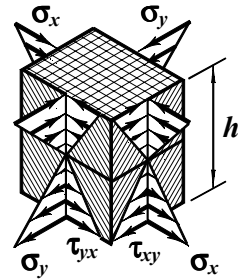


Рис. 18.6

18.3.1. Подставим равенства (д) в (е):

$$\sigma_x = -Ez(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) / (1 - \nu^2);$$

$$\sigma_y = -Ez(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2) / (1 - \nu^2);$$

$$\tau_{xy} = -Ez(\partial^2 w / \partial x \partial y) / (1 + \nu). \quad (ж)$$

Полученные выражения описывают распределение напряжений по толщине пластинки (рис. 18.6):

– в точках, расположенных с разных сторон от срединной плоскости, напряжения направлены в разные стороны;

– величина напряжения пропорциональна расстоянию от точки до срединной плоскости.

Распределение напряжений в пластинке такое же, как при изгибе балки и кручении тонкостенного стержня.

Теперь равенства (ж) подставим в условия (г):

$$M_x = \int_h \sigma_x z dz = -E(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) \int_h z^2 dz = -Eh^3(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) / (12(1 - \nu^2)).$$

Аналогичные равенства получаются и для других моментов. Введя обозначение

$$Eh^3 / (12(1 - \nu^2)) = D, \quad (18.1)$$

запишем их так:

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2);$$

$$M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2);$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \partial^2 w / \partial x \partial y. \quad (18.2)$$

Фигурирующая в равенствах (18.1) и (18.2) физико-геометрическая характеристика  $D$  называется **цилиндрической жесткостью** пластинки.

Выражения поперечных сил через прогибы получаются подстановкой формул (18.2) в уравнения равновесия (б) и (в):

$$Q_x = -D \partial (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2) / \partial x;$$

$$Q_y = -D \partial (\partial^2 w / \partial y^2 + \partial^2 w / \partial x^2) / \partial y. \quad (18.3)$$

Продолжим преобразования.

Подстановка равенств (б) и (в) в (а) исключает поперечные силы и связывает моменты уравнением

$$\partial^2 M_x / \partial x^2 + 2 \partial^2 M_{xy} / \partial x \partial y + \partial^2 M_y / \partial y^2 = -p. \quad (и)$$

Если теперь в уравнение (и) подставить выражения (18.2), то после приведения подобных членов оно примет вид

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2 \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = p / D, \quad (18.4)$$

или

$$\nabla^4 w = p / D. \quad (18.4)$$

Уравнение (18.4) является условием равновесия, выраженным через прогибы.

Наконец, из формул (ж) и (18.2) с учетом обозначения (18.1) следует:

$$\sigma_x = 12 M_x z / h^3, \quad \sigma_y = 12 M_y z / h^3, \quad \tau_{xy} = 12 M_{xy} z / h^3. \quad (18.5)$$

Наибольшие напряжения при  $z = h/2$  (рис. 18.6)

$$\max \sigma_x = 6 M_x / h^2, \quad \max \sigma_y = 6 M_y / h^2, \quad \max \tau_{xy} = 6 M_{xy} / h^2. \quad (18.6)$$

18.3.2. Преобразованная к виду (18.1)...(18.5) система разрешающих уравнений свелась к необходимости решения лишь одного дифференциального уравнения. Последовательность расчета пластины теперь выглядит так:

- решение дифференциального уравнения (18.4);
- определение изгибающих и крутящего моментов (18.2) (поперечные силы (18.3) вызывают небольшие напряжения и поэтому здесь не названы) и выбор опасного места (нормали) в пластине;
- вычисление напряжений (18.6) в опасной точке;
- проверка прочности материала на основе соответствующей теории.

Условие жесткости может быть проверено после решения уравнения (18.4).

#### 18.4. Граничные условия

Граничные условия, необходимые для определения прогибов по уравнению (18.4), отражают способ закрепления пластинки и (или) усилия на краях. Рассмотрим наиболее распространенные случаи (рис. 18.7).

### 18.4.1. Защемленный край

На этом краю должны выполняться два условия закрепления:

- отсутствие прогибов;
- отсутствие поворотов в плоскости, перпендикулярной краю.

Так, в пластинке, изображенной на рис. 18.7, граничные условия на защемленной стороне имеют вид  $w(x, b_1) = 0$ ;  $(\partial w / \partial y)(x, b_1) = 0$ . (18.7)

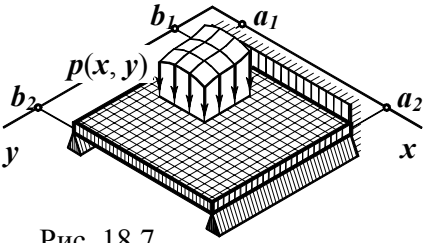


Рис. 18.7

### 18.4.2. Шарнирно опертый край

На шарнирной опоре отсутствуют

- прогиб;
- изгибающий момент в плоскости, перпендикулярной краю.

Первое из названных условий применительно к левому шарнирно закрепленному краю пластинки, показанной на рисунке 18.7, –

$$w(a_1, y) = 0. \quad (18.8)$$

Второе условие –  $M_x(a_1, y) = 0$ . Выразим его через функцию  $w$ . По равенству (18.2)  $M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2)$ . Следовательно,  $(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2)(a_1, y) = 0$ . Но  $(\partial^2 w / \partial y^2)(a_1, y) = 0$ , поскольку край прямой. Поэтому условие отсутствия момента сводится к равенству  $(\partial^2 w / \partial x^2)(a_1, y) = 0$ . (18.9)

Если на шарнирном краю пластинки приложен момент, условие (18.9) имеет форму равенства  $(\partial^2 w / \partial x^2)(a_1, y) = M_x(a_1, y) / D$ .

Аналогично выглядят граничные условия и для правого шарнирного края.

### 18.4.3. Свободный край

На свободном краю при отсутствии нагрузки (см. рис. 18.7)

$$Q_y(x, b_2) = 0, \quad M_y(x, b_2) = 0, \quad M_{yx}(x, b_2) = 0$$

– три условия. Однако в используемой приближенной теории, основанной на гипотезе неизменности нормали, нельзя удовлетворить одновременно первое и третье условия. Это можно объяснить тем, что вертикальные перемещения в плоскости свободного края описываются одной независимой функцией. Если, скажем, в качестве такой функции принять  $w(x, b_2)$ , то углы поворота  $\beta_x(x, b_2) = (\partial w / \partial x)(x, b_2)$  – являются следствием. Удовлетворив одно из обсуждаемых усло-

вий, в общем случае не удастся приспособиться к другому. Поэтому на свободном краю граничные условия формулируют в рамках принципа Сен-Венана, объединяя поперечную силу и крутящий момент, связанные с касательными напряжениями.

По принципу Сен-Венана статически эквивалентные нагрузки в местах, удаленных от точек их действия, вызывают одинаковые напряжения. Если поперечная сила и крутящий момент образуют самоуравновешенную систему, по тому же принципу, напряжения от них будут ощутимы лишь вблизи края. Эти два утверждения и определяют процедуру объединения двух несовместимых граничных условий на свободном краю в одно:

- представить крутящие моменты парами вертикальных сил;
- из поперечной силы и крутящего момента сформировать нагрузку, статически эквивалентную нулю.

Рассмотрим свободный край, параллельный оси  $x$  (рис. 18.7, 18.8). Выберем на нем произвольного положения нормаль и два соседние с ней элементарных отрезка. Крутящий момент, действующий на левый элементарных отрезок, заменим парой вертикальных сил  $H_1$  с плечом  $dx$ :

– равнодействующий крутящий момент на этом отрезке – это произведение интенсивности на длину участка:  $M_{yx} dx$ ;

– так как момент пары равен произведению силы  $H_1$  на плечо  $dx$ , то  $H_1 dx = M_{yx} dx$ , откуда  $H_1 = M_{yx}$ .

Аналогично на правом элементарном отрезке:

– результирующий крутящий момент равен  $(M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx) dx$ ;

– момент пары сил  $H_2 dx = (M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx) dx$ , откуда  $H_2 = M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx$ .

Равнодействующая поперечная сила в бесконечно малой окрестности рассматриваемой нормали равна  $Q_y dx$ .

Равнодействующая трех сил, приведенных к выбранной нормали, равна нулю:  $H_2 + Q_y dx - H_1 = 0$ , или  $M_{yx} + (\partial M_{yx} / \partial x) dx + Q_y dx - M_{yx} = 0$ . Условие самоуравновешенности сил принимает вид  $\partial M_{yx} / \partial x + Q_y = 0$ .

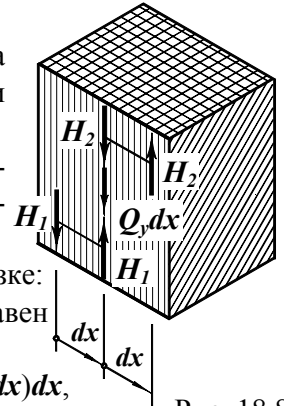


Рис. 18.8

Чтобы выразить это условие через прогиб, воспользуемся равенствами (18.2) и (18.3). Подставив их в полученное условие, приходим к требованию  $\partial(\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial x^2)/\partial y = 0$ . Добавив сюда условие равенства изгибающего момента, видим, что на свободном краю, параллельном оси  $x$ , граничные условия формируются в требовании

$$\partial(\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial x^2)/\partial y = 0, \quad \partial^2 w/\partial y^2 + \nu\partial^2 w/\partial x^2 = 0. \quad (18.10)$$

Если свободный край пластинки параллелен оси  $y$ , соответствующие граничные условия выглядят так:

$$\partial(\partial^2 w/\partial x^2 + (2-\nu)\partial^2 w/\partial y^2)/\partial x = 0, \quad \partial^2 w/\partial x^2 + \nu\partial^2 w/\partial y^2 = 0. \quad (18.11)$$

В комментарии к граничным условиям на свободном краю следует отметить два обстоятельства:

- получаемые из решения горизонтальные и вертикальные касательные напряжения будут отличными от нуля, хотя и самоуравновешенными;
- продемонстрированное выше приведение сил к самоуравновешенной системе возможно всюду за исключением границ свободного края; это равносильно тому, что к внешней нагрузке добавлены сосредоточенные силы в углах рассматриваемого края пластинки.

Отмеченные обстоятельства, естественно, подчеркивают недостатки технической теории. Тем не менее получаемые на ее основе результаты в подавляющем числе случаев оказываются вполне приемлемыми, а возникающие при этом сомнения преодолеваются либо более строгими, либо априорными решениями.

**Пример 18.1.** Квадратная пластинка постоянной жесткости (рис. 18.9) одним краем защемлена, тремя остальными шарнирно оперта и нагружена равномерным давлением  $p_0$  на половине площади. Построим эпюры прогибов  $w$ , изгибающих  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящего  $M_{xy}$  моментов. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Дифференциальное уравнение задачи (18.4)

$$-\nabla^4 w = p_0/D. \quad (a)$$

Граничные условия на краях:

$$-x = 0 \text{ (18.8, 18.9): } w(0, y) = 0, \quad \partial^2 w/\partial x^2(0, y) = 0; \quad (b)$$

Рис. 18.9

$$x = 3l: \quad w(3l, y) = 0, \quad \partial^2 w/\partial x^2(3l, y) = 0; \quad (b)$$

$$y = 0 \text{ (18.7): } \quad w(x, 0) = 0, \quad \partial w/\partial y(x, 0) = 0; \quad (r)$$

$$y = 3l: \quad w(x, 3l) = 0, \quad \partial^2 w/\partial y^2(x, 3l) = 0. \quad (d)$$

Точное решение задачи (а)...(д) в аналитической форме невозможно. Воспользуемся численным методом – методом конечных разностей.

Нанесем на область задачи разностную сетку (рис. 18.10) и, учитывая симметрию, обозначим узлы:

- внутренние 1, 2;
- контурные 3, ..., 8;
- законтурные 9, ..., 12.

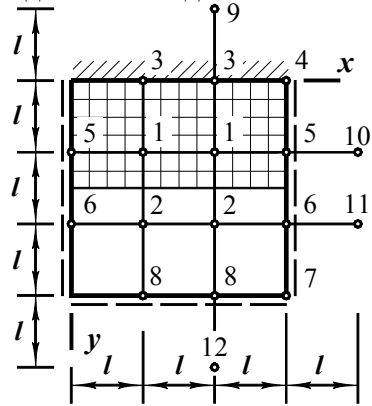
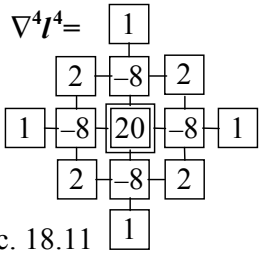


Рис. 18.10

Запишем в конечно-разностной форме дифференциальное уравнение задачи (а). Сетка квадратная, шаги сетки  $\Delta x = \Delta y = l$ , параметр  $\alpha = \Delta x/\Delta y = 1$ . Конечно-разностный оператор для квадратной сетки приведен на рис. 17.15 и 18.11. Дифференциальное уравнение для внутренних узлов:

Узел 1:  $20w_1 - 8(w_3 + w_5 + w_2 + w_1) + 2(w_3 + w_4 + w_6 + w_2) + w_9 + w_{10} + w_8 + w_5 = p_0 l^4/D;$

Узел 2:  $20w_2 - 8(w_1 + w_6 + w_8 + w_2) + 2(w_1 + w_3 + w_7 + w_8) + w_3 + w_{11} + w_{12} + w_6 = 0.$



(e)

Граничные условия (б ... д):  
Согласно первым равенствам условий: Рис. 18.11

$$w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0. \quad (ж)$$

Вторые равенства условий (б), (в) и (д). Например, узел 5:  $(\partial^2 w/\partial x^2)_5 = 0$ . Графический оператор второй производной воспроизведен на рис. 18.12. Пользуясь им, записываем  $(\partial^2 w/\partial x^2)_5 = (w_1 - 2w_5 + w_{10})/l^2 = 0$ , откуда, учитывая равенство из (ж), имеем  $w_{10} = -w_1$ . Нетрудно заметить, что подобные результаты будут и для других контурных узлов, расположенных на шарнирно закрепленных краях. Итак,  $w_{10} = -w_1$ ,  $w_{11} = -w_2$ ,  $w_{12} = -w_2$ . (и)

$$\partial^2 w/\partial x^2 = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} / \Delta x^2$$

Рис. 18.12

Второе условие (г) запишем для узла 3:  $(\partial w/\partial y)_3 = 0$ . По оператору (рис. 18.13)  $(\partial w/\partial y)_3 = (w_1 - w_9)/2l = 0$ , или  $w_9 = w_1$ .

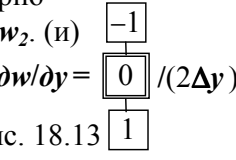


Рис. 18.13

Подстановка условий (ж)...(к) в систему (е) придает ей вид

$$\begin{aligned} 12w_1 - 6w_2 &= p_0 l^4 / D, \\ -6w_1 + 12w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:  $w_1 = 0,1190 p_0 l^4 / D$ ,  $w_2 = 0,0714 p_0 l^4 / D$ . Эпюра прогиба, построенная по полученному результату и граничным условиям, изображена на рис. 18.14 а.

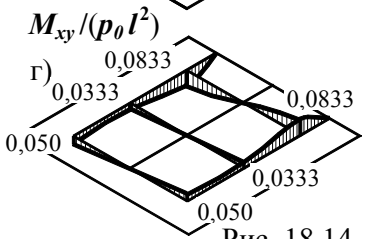
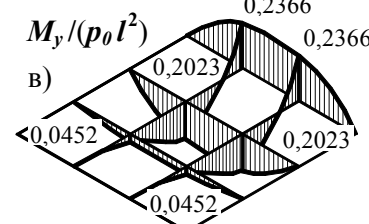
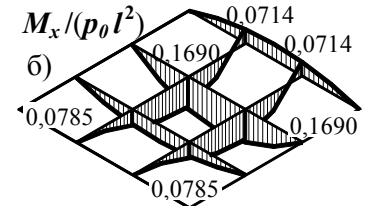
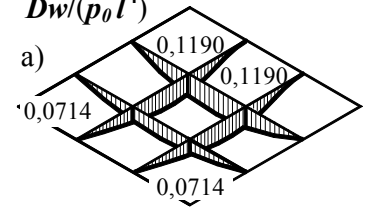


Рис. 18.14

Так как он зависит от второй смешанной производной, вычислим его в центрах конечно-разностных квадратов – точках 13, 14 и 15 (рис. 18.15), воспользовавшись конечно-разностным оператором, изображенным на рис. 18.16 с учетом выбранных направлений координатных осей.

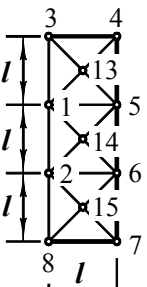


Рис. 18.15

$$\begin{aligned} \text{Узел 13: } M_{xy13} &= -D(1-\nu)(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{13} = \\ &= -D(1-\nu)(w_5 - w_4 + w_3 - w_1) p_0 l^4 / (4D(l/2)(l/2)) = \\ &= (1-\nu) w_1 p_0 l^2 = (1-0,3) 0,1190 p_0 l^2 = 0,0833 p_0 l^2. \end{aligned}$$

Так же определяются величины крутящих моментов в узлах 14 и 15. Эпюра момента  $M_{xy}$  изображена на рис. 18.14 г.

Изгибающие моменты (18.2).

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2).$$

В конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned} \text{Узел 3: } M_{x3} &= -D(w_3 - 2w_3 + w_4 + \\ &+ \nu(w_9 - 2w_3 + w_1)) / l^2. \end{aligned}$$

Учитывая равенства (ж) и (к), имеем  $M_{x3} = -2D\nu w_1 / l^2 = -2 \cdot 0,3 \cdot 0,1190 p_0 l^2 = -0,0714 p_0 l^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Узел 1: } M_{x1} &= -D(w_1 - 2w_1 + w_5 + \\ &+ \nu(w_3 - 2w_1 + w_2)) / (l^2). \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений прогибов получаем  $M_{x1} = 0,1690 p_0 l^2$ . Узел 2 – аналогично:  $M_{x2} = 0,0785 p_0 l^2$ . Эпюра изгибающего момента  $M_x$  приведена на рис. 18.14 б.

Момент  $M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2)$ .

Его эпюра показана на рис. 18.14 в.

Крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \partial^2 w / \partial x \partial y.$$

В точках заземленного края крутящий момент равен нулю, так как в них  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ .

Отметим особенность эпюры крутящих моментов – его неопределенность в пределах полос шириной  $l/2$ , прилегающих к шарнирным опорам. Его можно вычислить по крупной сетке, предварительно определив прогибы в необходимых узлах.

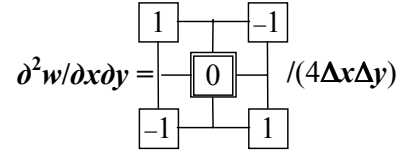


Рис. 18.16

### 18.5. Расчет прямоугольных шарнирно опертых пластин в двойных тригонометрических рядах

Точное решение уравнения (18.4) возможно для весьма ограниченного круга расчетных схем, не удовлетворяющих запросы практики. Поэтому в расчетах пластинчатых элементов строительных конструкций широкое применение нашли приближенные методы – аналитические и численные.

В качестве примера аналитического решения задачи рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую пластину, нагруженную произвольной поперечной нагрузкой (рис 18.17).

Математическая формулировка задачи такова. Найти функцию  $w(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальное уравнение (18.4)

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = p(x, y) / D$$

и граничные условия (18.8) и (18.9):

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0, \quad w(a, y) = 0, \\ w(x, 0) &= 0, \quad w(x, b) = 0, \\ (\partial^2 w / \partial x^2)(0, y) &= 0, \quad (\partial^2 w / \partial x^2)(a, y) = 0, \\ (\partial^2 w / \partial y^2)(x, 0) &= 0, \quad (\partial^2 w / \partial y^2)(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия удовлетворяются, если прогиб представить в виде ряда Фурье:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (a)$$

где  $A_{mn}$  – произвольные пока неизвестные коэффициенты.

Коэффициенты  $A_{mn}$  должны удовлетворять уравнение (18.4). Подставим выражение (а) в левую его часть. В результате получим равенство

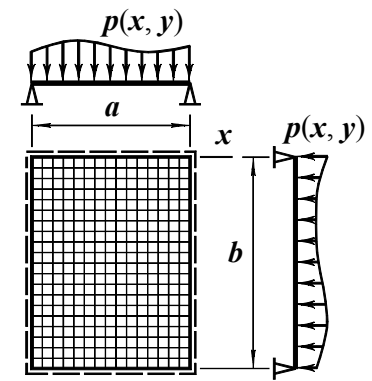


Рис. 18.17

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m\pi/a)^4 + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + (n\pi/b)^4) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) = p(x, y)/D.$$

Разложим внешнюю нагрузку в ряд Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (\text{б})$$

Здесь  $B_{mn}$  – коэффициенты разложения определяемые по формуле<sup>1</sup>

$$B_{mn} = 4 \left( \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) dx dy \right) / (ab). \quad (\text{в})$$

При заданной внешней нагрузке коэффициенты  $B_{mn}$  теперь определены. В дальнейшем будем считать их известными.

После разложения (б) уравнение (18.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m\pi/a)^4 + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + (n\pi/b)^4) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) / D. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях, получаем систему равенств

$$\begin{aligned} A_{mn} \pi^4 (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2 &= B_{mn} / D, \\ A_{mn} &= B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2). \end{aligned} \quad (\text{г})$$

откуда

После подстановки полученного равенства в разложение (а) приходим к окончательному решению

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2)) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b). \quad (\text{д})$$

При разложении (а) формулы (18.2) принимают вид

$$\begin{aligned} M_x &= -\pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((m/a)^2 + v(n/b)^2) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b); \\ M_y &= -\pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} ((n/b)^2 + v(m/a)^2) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b); \\ M_{xy} &= -\pi^2 D (1-v) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (mn/ab) \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b). \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Полученные выражения позволяют определить все характеристики напряженно-деформированного состояния пластинки и оценить ее прочность и жесткость.

<sup>1</sup> В справочной математической литературе приводятся числовые значения (или формулы) коэффициентов  $B_{mn}$  практически для всех зависимостей  $p(x, y)$ , так что необходимость в интегрировании отпадает.

**Пример 18.2.** Определим прогиб в центре шарнирно закрепленной по периметру квадратной пластинки от равномерного давления  $p_0$  по всей поверхности.

Обозначив длину стороны пластинки буквой  $a$ , по равенству (в)

$$\text{находим } B_{mn} = 4p_0 \left( \int_0^a \int_0^a \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/a) dx dy \right) / a^2 = 16p_0 / (\pi^2 mn).$$

Здесь и ниже  $m, n = 1, 3, \dots$  – нечетные числа.

Коэффициенты ряда, аппроксимирующего прогибы, (г)

$$A_{mn} = B_{mn} / (\pi^4 D (m^2/a^2 + n^2/a^2)^2) = 16p_0 a^4 / (\pi^6 D mn (m^2 + n^2)^2).$$

Прогиб в центре (д)

$$w(a/2, a/2) = (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{(m+n)/2-1} / (mn(m^2 + n^2)^2)).$$

Ограничимся  $m, n = 1, 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} w(a/2, a/2) &= (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) ((-1)^{(1+1)/2-1} / (1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2) + \\ &+ (-1)^{(1+3)/2-1} / (1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2) + (-1)^{(3+1)/2-1} / (3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2) + \\ &+ (-1)^{(3+3)/2-1} / (3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2)) = \\ &= (16p_0 a^4 / (\pi^6 D)) (1/4 - 1/300 - 1/300 + 1/2916) = 0,00406 p_0 a^4 / D. \end{aligned}$$

Результат точен до третьей значащей цифры – погрешность не превышает 0,2 %.

Достаточно низкая погрешность при малом числе членов ряда объясняется быстрой его сходимостью (сравни числа в последних скобках). Но при вычислении моментов (они пропорциональны вторым производным прогиба) погрешность будет выше, а поперечных сил (они пропорциональны третьим производным) еще выше. Следует отметить свойство обсуждаемого метода – с ростом числа членов ряда оно быстро приближается к функции, фигурирующей в дифференциальном уравнении, и медленнее к ее производным. При этом чем выше порядок производной, тем медленнее сходимость.

Отметим еще один фактор – вид внешней нагрузки. В рассмотренном примере она достаточно “гладкая” и хорошо аппроксимируется рядом Фурье. Аппроксимация, скажем, “сосредоточенной” силы потребовала бы значительно большего членов ряда, а вместе с этим повлекла бы и рост трудоемкости расчета.

Несмотря на отмеченные недостатки, развитие вычислительной техники выводит эти сложности из разряда принципиальных и предоставляет возможности расчетов пластинок на нагрузку практически любого вида.

## 19. Простейшие энергетические принципы и вариационные методы теории упругости

Во всех предыдущих разделах задачи о напряженно-деформированном состоянии объекта содержали статические, геометрические и физические условия и в конечном итоге сводились к дифференциальным уравнениям. Сложности интегрирования таких уравнений, как правило, вынуждали обращаться к приближенным численным методам (см. раздел 17).

Использованная ранее процедура формирования математической модели задачи не является единственно возможной. Существуют и другие пути, освобождающие от необходимости решения дифференциальных уравнений и позволяющие получать неплохие приближенные, а в некоторых случаях и точные решения.

Познакомимся с простейшими из них. Но прежде введем необходимые новые понятия.

### 19.1. Понятия вариации функции, функционала и вариации функционала

На рис. 19.1 сплошной линией изображен график функции  $f(x)$ .

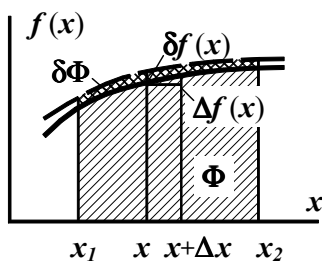


Рис. 19.1

Известно, что изменение функции, вызванное изменением аргумента, называют ее приращением и обозначают  $\Delta f(x)$ .

На том же рисунке пунктиром изображен график видоизмененной функции  $f(x) + \delta f(x)$ . Бесконечно малое видоизменение называют *вариацией функции* и обозначают  $\delta f(x)$ .

Способы задания вариации функции различны. Скажем, если  $\delta f(x) = C \sin(ax)$ , то ее вариацией может быть и  $\delta f(x) = \delta C \sin(ax)$ , и  $\delta f(x) = C \sin(\delta ax)$  или какое-либо иное бесконечно малое ее изменение. При этом естественно подразумевают, что вариации параметров  $\delta C$  и  $\delta a$  — бесконечно малые.

Вариация функции  $\delta f(x)$  сама является функцией, ибо зависит от аргумента  $x$ .

Вариация функции играет такую же роль и обладает такими же свойствами, что и дифференциал. Например,

- вариация суммы функций:  $\delta(f_1 + f_2 + \dots + f_n) = (\delta f_1 + \delta f_2 + \dots + \delta f_n)$ ;
- вариация квадрата функции:  $\delta(f(x))^2 = 2f(x)\delta f(x)$  и т.д.

Примеры можно продолжить, но и эти приведенные дают представление о правилах и возможностях варьирования функций.

Известно, что величина определенного интеграла зависит от подынтегральной функции (площадь заштрихованной фигуры на рис. 19.1):  $\Phi = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$  — он является как бы функцией функции. Подобные величины в математике называют *функционалами*.

Изменение функционала, вызванное вариацией функции, носит название *вариации функционала*: на примере того же определенного интеграла  $\delta \Phi = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x) dx$  (на рис. 19.1 геометрическим ее образом является площадь дважды заштрихованной полоски).

Аналогично существованию первого, второго и т.д. дифференциалов существуют первая, вторая и т.д. вариации —  $\delta, \delta^2, \dots$ .

Из подобия дифференцирования и варьирования следуют правила:

- если при некоторой функции  $f(x)$  вариация  $\delta \Phi = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x) dx = 0$ , функционал от нее экстремален;
- если при этом вторая вариация  $\delta^2 \Phi > 0$ , экстремум является минимумом (аналогичен признак максимума).

Введенные понятия проиллюстрированы функцией одной переменной. Однако сказанное справедливо и для функций нескольких переменных при сохранении подобия операций дифференцирования и варьирования.



## 19.2. принцип минимума потенциальной энергии системы (принцип Лагранжа)

Принцип Лагранжа вытекает из принципа возможных работ<sup>1</sup> при некоторых ограничениях на характер изменения внешних и внутренних сил.

Не желая усложнять выкладки, с одной стороны, и стремясь сохранить общность, с другой, приведем доказательство принципа Лагранжа в рамках плоской задачи теории упругости.

Рассмотрим пластинку единичной толщины (рис. 19.2) в условиях плоского напряженного состояния. На пластинку

- наложены связи на части границы  $L_u$ ;
- на части границы  $L_p$  действуют поверхностные внешние силы, заданные напряжениями  $p_x$  и  $p_y$ ;
- в пределах всей пластинки (площади  $A$ ) приложены объемные силы  $X$  и  $Y$ .

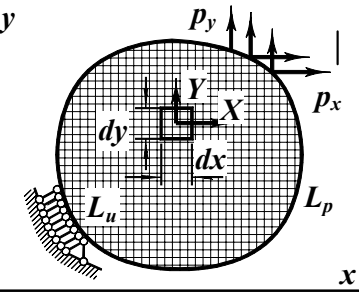


Рис. 19.2

Так как пластинка находится в равновесии то сумма работ сил, приложенных к элементарным параллелепипедам, на возможных перемещениях равна нулю. При этом будем иметь в виду, что для деформируемого тела возможные перемещения должны удовлетворять следующим условиям:

- быть непрерывными в пределах объекта и иметь непрерывные производные (это вытекает из условия неразрывности деформаций);
- удовлетворять условиям закрепления тела.

<sup>1</sup> Принцип возможных работ сформулирован в 1717 г. Иоганном Бернулли (1667–1748 гг.).

В пластинке возникают

- напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ;
- деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ ;
- перемещения  $u$  и  $v$ .

Установим свойства энергетических характеристик напряженно-деформированного состояния пластинки при некоторых дополнительных условиях изменения сил.

На возможных перемещениях  $\delta u$  и  $\delta v$  совершают работу поверхностные и объемные внешние силы и силы внутренние. Рассмотрим каждую из них.

Будем считать, что внешняя нагрузка не изменяется на возможных перемещениях. Тогда поверхностные силы совершают работу

$$\delta W_P = \int_{L_p} (p_x \delta u + p_y \delta v) dl = \delta \int_{L_p} (p_x u + p_y v) dl.$$

Работа объемных сил равна

$$\delta W_X = \iint_A (X \delta u + Y \delta v) dx dy = \delta \iint_A (Xu + Yv) dx dy.$$

Работа всей внешней нагрузки на возможных перемещениях представляет собой вариацию ее работы на перемещениях действительных. Обозначим ее  $\delta W_E$ .

Работа внутренних сил численно равна потенциальной энергии деформации (рис. 19.3), но отрицательна, поскольку внутренние силы – силы сопротивления. Итак, на возможных перемещениях внутренние силы совершают работу

$$\delta W_I = -\iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy.$$

Подынтегральное выражение представляет собой вариацию потенциальной энергии деформации элемента пластинки. Поэтому

$$\delta W_I = -\delta U.$$

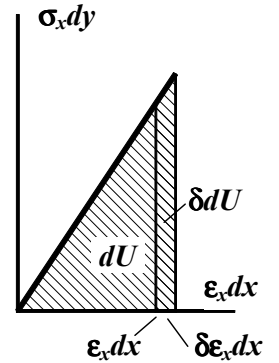


Рис. 19.3

Согласно принципу возможных работ  $\delta W_E - \delta U = 0$ , или, вынося знак вариации за скобки, имеем равенство  $\delta(W_E - U) = 0$ .

Введем обозначение  $U - W_E = P_S$  (19.1)

и запишем окончательно для действительных перемещений  $u$  и  $v$ :

$$\delta P_S = 0. \quad (19.2)$$

В равенствах (19.1) и (19.2)

$P_S$  – потенциальная энергия системы;

$U$  – потенциальная энергия деформации тела;

$W_E$  – работа внешней нагрузки на действительных перемещениях. В доказательстве принципа внешние силы не варьировались, поэтому

$$W_E = \int_{L_p} (p_x u + p_y v) dl + \iint_A (Xu + Yv) dx dy, \quad (19.3)$$

где  $p_x, p_y, X, Y, u$  и  $v$  – конечные значения сил и перемещений. **Слабое** ( $-W_E$ ) **представляет собой изменение (уменьшение) потенциала внешней нагрузки при переходе тела из недеформированного в деформированное состояние.** Обозначим  $\Pi = -W_E$ . Теперь выражение потенциальной энергии системы принимает вид

$$P_S = \Pi + U. \tag{19.4}$$

Равенство (19.2) является признаком экстремума функционала  $P_S$ . Принцип Лагранжа утверждает, что **из всех возможных перемещений в действительности реализуются те, при которых потенциальная энергия системы минимальна**<sup>1</sup>.

Из равенства (19.2) математическими преобразованиями могут быть получены условия равновесия, выраженные через перемещения, (16.6). Отсюда следует, что

– условие минимума потенциальной энергии системы есть условие равновесия;

– вариационная формулировка задачи теории упругости по точности эквивалентна традиционной статико-геометрической постановке.

### 19.3. Некоторые формулы потенциальной энергии деформации, выраженной через перемещения

В функционал Лагранжа (19.1) входит потенциальная энергия деформации. Для решения практических задач на основе принципа минимума энергии системы она должна быть выражена через перемещения. Выведем такие формулы для некоторых рассмотренных ранее объектов и видов нагружения. При выводе формул воспользуемся общим выражением потенциальной энергии деформации.

Рассмотрим элементарный параллелепипед в объемном напряженном состоянии (рис. 19.4 а). Напряженно-деформированное состояние упругого тела не зависит от характера изменения напряжений во времени. Поэтому для физической ясности выкладок примем такую программу их изменения, при которой деформации растут покомпонентно от нуля до конечных значений, оставаясь в последующем неизменными.

<sup>1</sup> Доказательство минимума здесь опущено.

Пусть на первом этапе возрастает удлинение  $\epsilon_x$  (рис. 19.4 б), а  $\epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ . В этом случае работу совершают напряжения  $\sigma_x$ . Соответствующая и равная ей потенциальная энергия деформации  $dU_x = \sigma_x dydz(\epsilon_x dx)/2$ . Аналогично,  $dU_x = \sigma_y dzdx(\epsilon_y dy)/2$ ,  $dU_z = \sigma_z dx dy(\epsilon_z dz)/2$ .

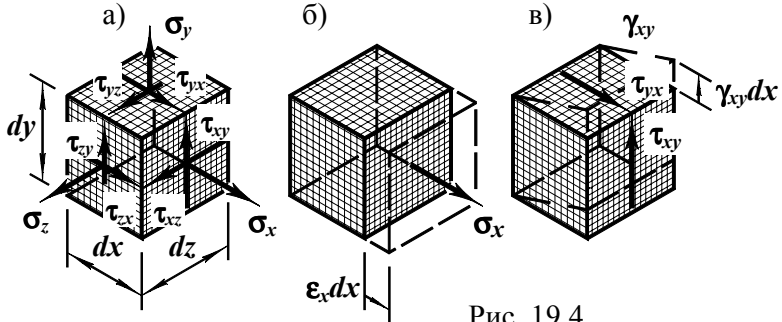


Рис. 19.4

На сдвиговой деформации  $\gamma_{xy}$  (рис. 19.4 в) работу совершают касательные напряжения  $\tau_{xy}$ ,  $dU_{xy} = \tau_{xy} dydz(\gamma_{xy} dx)/2$ . Другие компоненты касательных напряжений наращивают потенциальную энергию деформации на  $dU_{yz} = \tau_{yz} dzdx(\gamma_{yz} dy)/2$  и  $dU_{zx} = \tau_{zx} dx dy(\gamma_{zx} dz)/2$ . Суммируя полученные части энергии и интегрируя по объему тела, получаем

$$U = 0,5 \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \tag{19.5}$$

На эту формулу будем опираться, рассматривая частные случаи.

#### 19.3.1. Пластинка, нагруженная в своей плоскости

Для плоского напряженного состояния формула (19.5) принимает вид 
$$U = 0,5 \iint_A (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy.$$

Выразив напряжения через деформации по закону Гука (16.3) и деформации через перемещения по соотношениям Коши (16.2), имеем

$$U = 0,5 E \iint_A ((\partial u / \partial x)^2 + 2\nu (\partial u / \partial x) (\partial v / \partial y) + (\partial v / \partial y)^2) / (1 - \nu) + 0,5 (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2 dx dy. \tag{19.6}$$

Для плоской деформации константы  $E$  и  $\nu$  следует заменить на  $E_I$  и  $\nu_I$  согласно равенствам (16.4).

### 19.3.2. Пластика, изгибаемая поперечной нагрузкой

В изгибаемой пластинке продольные перемещения  $u$  и  $v$  выражаются через прогибы  $w$  так:  $u = -z\partial w/\partial x$ ,  $v = -z\partial w/\partial y$ . После подстановки этих равенств в формулу (19.6) и интегрирования по толщине пластинки приходим к выражению

$$U = 0,5D \iint_A ((\partial^2 w/\partial x^2)^2 + 2\nu(\partial^2 w/\partial x^2)(\partial^2 w/\partial y^2) + (\partial^2 w/\partial y^2)^2 + 2(1-\nu)(\partial^2 w/\partial x\partial y)^2) dx dy. \quad (19.7)$$

В этой формуле отброшена потенциальная энергия, связанная с касательными напряжениями  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ .

### 19.3.3. Стержневой элемент конструкции

19.3.3.1. Потенциальная энергия деформации балки определяется равенством (7.20):  $U = \int_l M_x^2 dz / (2EJ_x)$ . Подставив сюда закон Гука при изгибе (7.23)  $M_x = EJ_x v''$ , получаем формулу

$$U = 0,5EJ_x \int_l (v'')^2 dz. \quad (19.8)$$

Здесь также отброшена часть потенциальной энергии деформации, связанная со сдвигами.

19.3.3.2. Аналогичные формулы при кручении (6.11), (6.12) и (6.14) приводят к равенству

$$U = 0,5GJ_p \int_l (\varphi')^2 dz. \quad (19.9)$$

19.3.3.3. Для осевого растяжения и сжатия подобные подстановки дают такое выражение потенциальной энергии деформации:

$$U = 0,5EA \int_l (w')^2 dz. \quad (19.10)$$

Напомним, что при нескольких участках на стержне (или нескольких стержнях в конструкции) формулы (19.8), (19.9) и (19.10) следует применять к каждому участку (стержню) отдельно. Вынесенные за знаки интегралов соответствующие жесткости означают, что формулы применимы к стержням постоянного сечения.

С целью иллюстрации соотношений энергетических категорий, входящих в выражение (19.1), и методики использования принципа рассмотрим примеры.

**Пример 19.1.** На рис. 19.5 изображена консольная балка, нагруженная силой  $F$ . Проследим за изменениями потенциала внешних сил  $\Pi$ , потенциальной энергии деформации балки  $U$  и потенциальной энергии системы  $P_S$ .

Уравнение изогнутой оси балки (см. пример 7.9)

$$v = F(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3)/(EJ_x).$$

Прогиб на конце  $v_0 = Fl^3/(3EJ_x)$ , отсюда  $F = 3EJ_x v_0/l^3$ . Исключив силу

из уравнения изогнутой оси, имеем  $v = v_0(z^3/6 - l^2 z/2 + l^3/3)/l^3$ , где  $v_0$  является параметром. Изменяя его, будем описывать качественно подобные, но количественно различные эпюры прогибов.

Изменение потенциала внешней нагрузки. Поскольку в принципе Лагранжа внешняя нагрузка остается постоянной на вариациях перемещений, с ростом  $v_0$  потенциал силы уменьшается:  $\Pi = -F v_0$ . На рис. 19.6 зависимость  $\Pi$  от  $v_0$  описывается нисходящей прямой.

Потенциальная энергия деформации балки (19.8)

$$U = 0,5EJ_x \int_l (v'')^2 dz = 0,5EJ_x \int_0^l (3v_0 z/l^3)^2 dz = 3EJ_x (v_0)^2 / (2l^3).$$

Она положительна и растет пропорционально квадрату параметра  $v_0$  – верхняя пунктирная линия на рис. 19.6.

Потенциальная энергия системы

$$P_S = \Pi + U = -Fv_0 + 3EJ_x (v_0)^2 / (2l^3)$$

– также квадратная парабола, но не монотонная (сплошная линия на рис. 19.6). Ее минимум, определяемый равенством

$$dP_S/dv_0 = -F + 3EJ_x v_0 / l^3 = 0,$$

достигается при  $v_0 = Fl^3/(3EJ_x)$  – точном значении.

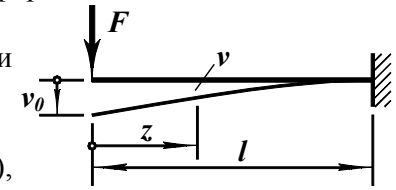


Рис. 19.5

Рис. 19.6

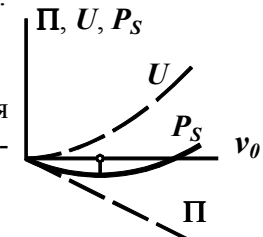


Рис. 19.6

**Пример 19.2.** Найдем максимальный прогиб и построим эпюру изгибающего момента в балке, показанной на рис. 19.7 а.

Так как интенсивность  $q = const$ , момент описывается квадратной параболой. Но  $M_x = EJ_x v''$ . Прогибы описываются полиномом четвертой степени типа  $v = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ . Воспользуемся симметрией расчетной схемы: выберем начало координат посередине балки и отбросим в выражении  $v$  кососимметричные слагаемые – примем  $v = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4$ .

Выбранная функция непрерывна с непрерывной производной.

Но для того, чтобы она описывала возможные перемещения, необходимо удовлетворить условия закрепления балки  $v(l/2) = 0, v'(l/2) = 0 \Rightarrow$

$$v(l/2) = a_0 + a_2 l^2/4 + a_4 l^4/16 = 0,$$

$$v'(l/2) = a_2 l + a_4 l^3/2 = 0.$$

Три коэффициента связаны двумя условиями. Выразим два из них через третий:  $a_2$  и  $a_4$  через  $a_0$ . Опустив процедуру решения системы, запишем итог:  $a_2 = -8a_0/l^2,$

$a_4 = 16a_0/l^4$ . Итак, все возможные перемещения описываются функцией  $v = a_0(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4)$ .

Сформируем функционал Лагранжа – потенциальную энергию системы. Изменение потенциала внешней нагрузки

$$\Pi = -\int_0^{l/2} q \cdot v \, dz = -2q \int_0^{l/2} (a_0(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4)) dz = -8qla_0/15.$$

Потенциальная энергия деформации балки

$$U = 0,5EJ_x \int_0^{l/2} (v'')^2 dz = 2 \cdot 0,5EJ_x \int_0^{l/2} a_0^2 (-16/l^2 + 192z^2/l^4)^2 dz = 512EJ_x a_0^2 / (5l^3).$$

Потенциальная энергия системы

$$P_S = \Pi + U = -8qla_0/15 + 512EJ_x a_0^2 / (5l^3).$$

Она минимальна, если  $\partial P_S / \partial a_0 = -8ql/15 + 1024EJ_x a_0 / (5l^3) = 0$ . Отсюда находим  $a_0 = ql^4 / (384EJ_x)$ .

Прогиб описывается функцией  $v = ql^4(1 - 8z^2/l^2 + 16z^4/l^4) / (384EJ_x)$ .

Максимальный прогиб  $v_{max} = v(0) = ql^4 / (384EJ_x)$ .

Изгибающий момент (рис. 19.7 б)  $M = EJ_x v'' = q(z^2/2 - l^2/24)$ .

### 19.4. Принцип минимума дополнительной энергии<sup>1</sup> (принцип Кастильяно)

Вновь обратимся к пластинке единичной толщины (рис. 19.2) в условиях плоского напряженного состояния. В ней возникают

- напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ;
- деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ ;
- перемещения  $u$  и  $v$ .

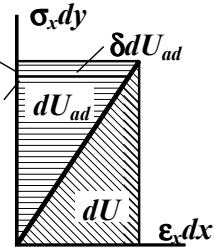
<sup>1</sup> Рассмотр простейший вариант принципа.

Зададим вариации напряжений  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y$  и  $\delta\tau_{xy}$  так, чтобы – они удовлетворяли условиям равновесия внутри пластинки; – были нулевыми на границе  $L_p$ , где заданы внешние силы; – могли иметь любые значения на границе  $L_u$ , где на пластинку наложены связи.

Таким образом, вариации напряжений представляют собой самоуравновешенную систему.

Так как пластинка находится в равновесии, то сумма работ вариаций сил, приложенных к элементарным параллелепипедам, на всех возможных перемещениях равна нулю. Примем в качестве возможных действительные перемещения  $u$  и  $v$ .

Работа вариаций внутренних сил  $\delta W_I = -\iint_A (\delta\sigma_x \epsilon_x + \delta\sigma_y \epsilon_y + \delta\tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = 0$ . (а) Подынтегральное выражение представляет собой вариацию **дополнительной энергии**. Геометрическим образом ее является горизонтально заштрихованный треугольник на рис. 19.8. Но  $\delta W_I = -\delta U_{ad}$ .



У линейно упругого тела потенциальная энергия деформации и дополнительная энергия равны:  $U_{ad} = U$ . Поэтому равенство (а) можно записать так:  $\delta U = 0$ . (19.11)

Равенство (19.11) является признаком экстремума функционала  $U$ . Принцип Кастильяно утверждает, что **из всех статически возможных усилий в действительности реализуются те, при которых потенциальная энергия деформации минимальна**<sup>1</sup>.

Из равенства (19.11) математическими преобразованиями могут быть получены условия совместности деформаций. Отсюда следует, что условие минимума потенциальной энергии деформации есть условие сплошности тела.

В статически определимых конструкциях, не имеющих избыточных связей, статически возможное распределение усилий единственно. Оно определяется условиями равновесия. В статически же неопределимых системах, где число уравнений равновесия меньше числа определяемых усилий, существует бесчисленное множество разных статически допустимых усилий. Принцип Кастильяно в таких случаях дает возможность сформировать недостающие условия.

<sup>1</sup> Доказательство минимума здесь также опущено.

Для иллюстрации техники использования принципа рассмотрим примеры расчета стержневых систем.

**Пример 19.3.** Построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента в балке, показанной на рис. 19.9 а.

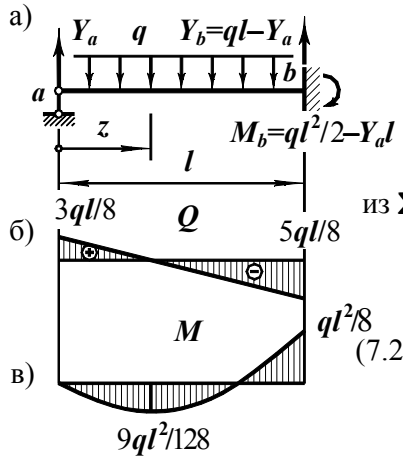


Рис. 19.9

Условие минимума потенциальной энергии деформации

$$dU/dY_a = (-ql^4/4 + 2Y_a l^3/3)/(2EJ_x) = 0 \text{ приводит к решению } Y_a = 3ql/8.$$

Построенные по этой реакции эпюры  $Q$  и  $M$  изображены на рис. 19.9 б, в.

**Пример 19.4.** Построим эпюру изгибающих моментов в раме, изображенной на рис. 19.10 а.

Рама имеет две избыточные связи – пять опорных реакций связаны тремя условиями равновесия. Выразим реакции в заделке через  $X_b$  и  $Y_b$  (рис. 19.10 б). Из  $\Sigma X = 0 \Rightarrow X_a = F - X_b$ ; из  $\Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_a = Y_b$ ; из  $\Sigma mom = 0 \Rightarrow M_a = Fl - 2X_b l$ .

<sup>1</sup> В данном простейшем примере можно обойтись без составления и решения уравнений равновесия. Но так как в общем случае это необходимо, этап включен в иллюстрацию.

<sup>2</sup> В методе Кастильяно потенциальную энергию деформации нужно выражать через усилия.

Первый этап решения задачи – формирование условий статической возможности, вытекающих из уравнений равновесия<sup>1</sup>.

$$\text{Из } \Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_b = ql - Y_a;$$

$$\text{из } \Sigma mom = 0 \Rightarrow M_b = ql^2/2 - Y_a l \text{ (рис. 19.9 а).}$$

Изгибающий момент в балке

$$M = qz^2/2 - Y_a z.$$

Потенциальная энергия деформации

$$(7.20)^2 \quad U = \int_0^l M^2 dz / (2EJ_x) =$$

$$= \int_0^l (qz^2/2 - Y_a z)^2 dz / (2EJ_x) =$$

$$= (ql^5/20 - Y_a ql^4/4 + Y_a^2 l^3/3) / (2EJ_x).$$

$$\text{Изгибающие моменты в раме: } M_1 = Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1;$$

$$M_2 = Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2; \quad M_3 = X_b s_3.$$

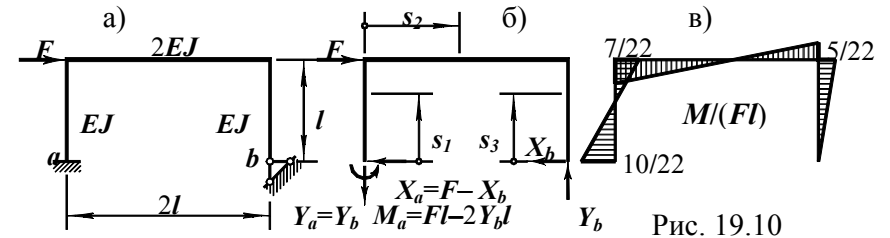


Рис. 19.10

Потенциальная энергия деформации (7.20)

$$U = \int_0^l M^2 dz / (2EJ_x) = \int_0^l M_1^2 ds_1 / (2EJ) + \int_0^l M_2^2 ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \int_0^l M_3^2 ds_3 / (2EJ).$$

Условие минимума потенциальной энергии деформации –  $\partial U / \partial X_b = 0, \quad \partial U / \partial Y_b = 0.$

Чтобы избежать процедуры возведения в квадрат многочленов, описывающих изгибающие моменты, продифференцируем подынтегральные выражения по искомым реакциям:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial X_b = & 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1)(s_1) ds_1 / (2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2)(l) ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (X_b s_3)(s_3) ds_3 / (2EJ) = 0; \\ \partial U / \partial Y_b = & 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)s_1)(-2l) ds_1 / (2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (Fl - 2Y_b l - (F - X_b)l + Y_b s_2)(-2l + s_2) ds_2 / (2 \cdot 2EJ) + \\ & + 2 \int_0^l (X_b s_3)(0) ds_3 / (2EJ) = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования и некоторых сокращений условия минимума потенциальной энергии деформации свелись к двум уравнениям:

$$-10X_b + 12Y_b - F = 0;$$

$$-6X_b + 16Y_b - 3F = 0.$$

Из этих уравнений находим  $X_b = 5F/22, \quad Y_b = 6F/22$ . Построенная по этим реакциям эпюра моментов показана на рис. 19.10 в.

Обобщая планы решения последних задач, видим, что они содержат два принципиальных этапа:

- введение условий статической совместимости усилий;
- минимизацию потенциальной энергии деформации по независимым усилиям, которая приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Порядок системы уравнений равен числу избыточных связей, наложенных на конструкцию (степени статической неопределимости системы). После определения реакций “лишних” связей вычисления характеристик напряженно-деформированного состояния, как правило, уже не представляет трудностей.

Рассмотренные выше энергетические принципы Лагранжа и Кастильяно являются простейшими принципами теории упругости. Принцип Лагранжа основан на вариации перемещений и использует условия равновесия для доказательства минимума функционала. Принцип Кастильяно построен на вариации напряжений и привлекает условия неразрывности деформаций (напомним, что рассмотренный здесь частный случай вытекает из дополнительных ограничений на вариации напряжений).

В теории упругости используют и другие более общие энергетические принципы, основанные на вариациях:

- перемещений и напряжений (Рейсснера);
- напряжений, деформаций и перемещений (Ху–Васидзу).

Они также приводят задачу к минимизации функционала.

Рассмотренные выше задачи статики деформируемых конструкций не охватывают сферы приложения энергетических принципов и основанных на них методов расчета. Энергетические методы нашли применение в задачах.

- устойчивости форм равновесия, равновесия и движения;
- динамического действия нагрузки;
- оценки несущей способности конструкций и др.

Отметим, что отказ от закона Гука и введение в доказательство нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями позволил обобщить энергетические принципы на физически нелинейные конструкции. При этом перечень конструкций и видов воздействий, поддающихся анализу, практически не уменьшился.

Таким образом, энергетические методы расчета являются очень мощным средством механики твердого деформируемого тела.

Пожалуй, основными достоинствами энергетических методов являются широкие возможности получения приближенных решений. В этих методах обычно мягче формулируются граничные условия, а вместе с этим смягчаются и расчетные трудности.

Познакомимся с одним из таких приближенных методов.

## 19.5. Формулировка вариационной задачи. Метод Ритца

Задачам поиска функций, сообщающих функционалу экстремальное значение, посвящен раздел математики, называемый вариационным исчислением. Классическая задача этого раздела формулируется так:

- дан функционал  $\Phi(f(x, y))$ ;
- найти функцию  $f(x, y)$ , при которой данный функционал принимает экстремальное значение.

Сравнивая эту абстрактную математическую формулировку с формулировками принципов Лагранжа и Кастильяно, видим, что последние полностью вписываются в вариационную постановку задачи.

В 1909 г. немецкий ученый Вальтер Ритц предложил приближенный метод поиска функции  $f(x, y)$ . Сущность метода Ритца созвучна идее методов аппроксимирующих функций. Искомую функцию представляют в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y), \quad (19.12)$$

где  $f(x, y)$  – функция, при которой функционал  $\Phi$  принимает экстремальное значение;

$\psi_i(x, y)$  – аппроксимирующие (базисные) функции, удовлетворяющие оговоренные условия энергетического принципа:

- неразрывности деформаций и закрепления тела в принципе Лагранжа;
- равновесия в принципе Кастильяно;
- $a_i$  – коэффициенты, подлежащие определению;
- $n$  – число членов ряда.

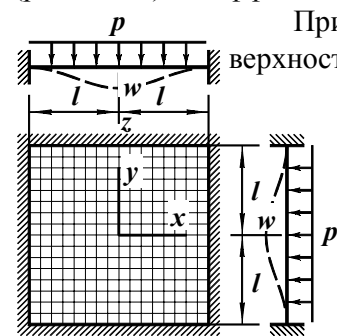
Подстановка разложения (19.12) в выражение потенциальной энергии системы или потенциальной энергии деформации переводит ее в категорию функции  $-\Phi = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Условия минимума функционала имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0. \quad (19.13)$$

В рассматриваемых задачах теории упругости условия (19.13) являются системой линейных алгебраических уравнений  $n$ -го порядка с неизвестными  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Решение системы позволяет найти приближенно функцию (19.12).

Для иллюстрации приведем пример<sup>1</sup>.

**Пример 19.5.** Найдем максимальный прогиб в квадратной пластинке, подверженной равномерному давлению по всей поверхности (рис. 19.11). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .



Примем уравнение изогнутой срединной поверхности в виде  $w = a(1 + \cos(\pi x/l))(1 + \cos(\pi y/l))$ . (а) Функция (а) непрерывна с непрерывными и конечными производными, удовлетворяет условиям закрепления пластинки:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = \pm l;$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm l.$$

Подставив выражение (а) в формулу (19.7) и выполнив интегрирования, получаем  $U = 4\pi^4 D a^2 / l^2$ .

Рис. 19.11

Изменение потенциала внешней нагрузки  $\Pi = -4 \int_0^l \int_0^l p w dx dy = -4 p a l^2$

Потенциальная энергия системы  $P_S = \Pi + U = -4 p a l^2 + 4 \pi^4 D a^2 / l^2$ . Она минимальна, если  $dP_S/da = -4 p l^2 + 8 \pi^4 D a / l^2 = 0$ , откуда  $a = p l^4 / (2 \pi^4 D)$ . Прогиб  $w_{max} = w(0,0) = 2 p l^4 / (\pi^4 D)$ . Погрешность менее 2 %.

Несмотря на достаточную точность полученного  $w_{max}$ , заметим, что внутренние силовые факторы, найденные по выражению (а), будут отличаться от точных значений на десятки процентов. В таких случаях следует брать больше слагаемых в ряду (19.12).

<sup>1</sup> Пример позаимствован из книги "Расчеты на прочность в машиностроении". т. II. /С.Д.Пономарев, В.Л.Бидерман, К.К.Лихарев и др.; Под ред. С.Д.Пономарева. – М.: Машгиз, 1958. – 974 с.

## 20. Основы теории предельного равновесия

Постоянное стремление к снижению материалоемкости при одновременном обеспечении необходимой надежности конструкции заставляет полнее использовать резервы прочности. Одним из путей в этом направлении является учет пластических свойств материала. Достижения в области материаловедения, экспериментальной методики и техники, широкое внедрение в практику расчета и проектирования мощных ЭВМ создали необходимые условия для повышения точности прогнозирования работы реальных конструкций. Не случайно методы анализа, базирующиеся на теории пластичности и ползучести, в настоящее время нашли широкое распространение.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в поведении конструкции, испытывающей пластические деформации, обнаруживается ряд специфических особенностей. Реакция ее на внешнее воздействие оказывается совсем не такой как в упругой стадии. Для того чтобы на этапе расчета конструкции правильно предсказать работу ее в условиях эксплуатации, необходимо выявить своеобразные эффекты, связанные с наличием пластических деформаций, и вскрыть порождающие их причины.

В монографиях отечественных и зарубежных ученых сформулированы и доказаны фундаментальные теоремы, позволяющие оценить несущую способность конструкции, не прослеживая процесса деформирования от начала нагружения до разрушения. Ниже приведены эти теоремы (без доказательств), изложены точные и приближенные методы расчетов разрушающих нагрузок.

## 20.1. Особенности работы уругоупругих конструкций

### 20.1.1. Зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии. Диаграмма Прандтля

Для теоретических расчетов конструкций связь между напряжениями и деформациями необходимо описать математическими функциями. Не останавливаясь на перечислении видов используемых функций, отметим, что в расчетной практике широкое распространение получила диаграмма растяжения-сжатия, аппроксимированная прямыми (рис. 20.1). В литературе ее называют по имени автора

*диаграммой Прандтля*, а материал *идеальным уругоупругим*. У большинства пластичных материалов диаграммы растяжения и сжатия близки друг к другу, и их можно считать одинаковыми.

Опишем зависимость деформации  $\epsilon$  идеального уругоупругого материала от напряжения  $\sigma$ . Начальное нагружение (участок  $Oa$ )

характерно тем, что до предела текучести  $\sigma_{yl}$  напряжение и деформация связаны законом Гука  $\sigma = E\epsilon$ . Как только напряжение станет равным  $\sigma_{yl}$ , удлинение может расти до любой величины (участок  $ab$ ). То же самое происходит при сжатии.

Линия разгрузки ( $bc$ ) – прямая, параллельная участку  $Oa$ . При разгрузке (точка  $c$ ) удлинение полностью не исчезло. Оставшуюся после разгрузки часть обозначим  $\epsilon^p$  и будем называть *пластической деформацией*. Запишем связь деформации с напряжением в виде

$$\epsilon = \sigma/E + \epsilon^p. \quad (20.1)$$

Первое слагаемое в правой части обозначим

$$\sigma/E = \epsilon^e \quad (20.2)$$

и будем называть *упругой деформацией*. Из соотношения (20.2) видно, что упругая деформация изменяется пропорционально напряжению. При этом не имеет значения, где находится точка, отображающая состояние материала, – на прямой  $ab$  или  $bc$ .

Изменение пластической деформации происходит, когда напряжение достигнет предела текучести. Если,  $\sigma - \sigma_{yl} < 0$  то,  $\Delta\epsilon^p = 0$ , если же  $\sigma - \sigma_{yl} = 0$ , то  $\Delta\epsilon^p \geq 0$  (пластическое удлинение). В тех случаях, когда  $-\sigma - \sigma_{yl} < 0$ ,  $\Delta\epsilon^p = 0$ ; при  $-\sigma - \sigma_{yl} = 0$  приращение  $\Delta\epsilon^p \leq 0$ . Запишем эти соотношения короче. Обозначим

$$\sigma - \sigma_{yl} = \varphi_1, \quad -\sigma - \sigma_{yl} = \varphi_2 \quad (20.3)$$

и будем называть  $\varphi$  *функциями текучести*. Так как  $-\sigma_{yl} \leq \sigma \leq \sigma_{yl}$ , то

$$\varphi_1 \leq 0, \quad \varphi_2 \leq 0. \quad (20.4)$$

Приращения пластических деформаций запишем в виде.

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2. \quad (20.5)$$

Фигурирующие в равенстве  $\lambda$  назовем *индексами текучести*;  $\Delta\lambda_1 > 0$  соответствует удлинению,  $\Delta\lambda_2 > 0$  – укорочению. Теперь деформирование материала можно описать так:

$$\varphi_1 \Delta\lambda_1 = 0, \quad \varphi_2 \Delta\lambda_2 = 0 \quad (20.6)$$

при

$$\Delta\lambda_1 \geq 0, \quad \Delta\lambda_2 \geq 0. \quad (20.7)$$

Равенства (20.6) отражают тот факт, что пластическая деформация может изменяться только при достижении напряжением предела текучести, когда  $\varphi_1 = 0$  или  $\varphi_2 = 0$ . Ограничения на знаки приращений индексов текучести определяют режимы течения. При  $\varphi_1 = 0$ , рост пластической деформации возможен в положительную сторону, при  $\varphi_2 = 0$  – в отрицательную. Заметим, что соотношения (20.6) и (20.7) устанавливают лишь условия изменения и знаки приращений пластической деформации. По ним нельзя найти величины  $\Delta\lambda_1$ ,  $\Delta\lambda_2$ , а следовательно, и  $\Delta\epsilon^p$ .

### 20.1.2. Монотонное нагружение конструкции

Рассмотрим простейшую конструкцию (рис. 20.2 а), состоящую из жесткой балки и четырех деформируемых стержней, нагруженную силой  $F$ . Длины  $l$  и площади  $A$  сечений стержней одинаковы; материал идеальный уругоупругий. Проследим за изменениями напряжений в стержнях и перемещением точки  $a$  в процессе роста силы до разрушающего значения.



Уравнения равновесия (рис. 20.2 б) имеют вид:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = F; \quad N_2 c + 2N_3 c + 3N_4 c = Fc.$$

После сокращения на  $c$  и деления на  $A$  приходим к равенствам

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = F/A, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 = F/A. \quad (20.8)$$

Условия совместности деформаций (рис. 20.2 в) можно записать так:

$$\Delta_2 = 2\Delta_1/3 + \Delta_4/3, \quad \Delta_3 = \Delta_1/3 + 2\Delta_4/3.$$

После деления на  $l/3$  имеем:

$$3\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \quad 3\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_4. \quad (20.9)$$

Заметим, что равенства (20.8) и (20.9) не зависят от наличия и степени развития пластических деформаций.

20.1.2.1. Упругая стадия. В начале нагружения все стержни работают упруго, справедлив закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/E, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3/E, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4/E. \quad (a)$$

Из этого равенства и соотношений (20.9) следует:  $3\sigma_2 = 2\sigma_1 + \sigma_4$ ,  $3\sigma_3 = \sigma_1 + 2\sigma_4$ . Добавляя их к уравнениям (20.8) и решая систему, получаем:

$$\sigma_1 = 0,4F/A, \quad \sigma_2 = 0,3F/A, \\ \sigma_3 = 0,2F/A, \quad \sigma_4 = 0,1F/A. \quad (20.10)$$

Перемещение точки  $a$   $\delta_a = \Delta_1 = \varepsilon_1 l$ . Из решения (20.10) и равенств (a) находим

$$\delta_a = 0,4Fl/(EA). \quad (20.11)$$

Полученные результаты показывают, что в упругой стадии усилия, напряжения, деформации и перемещения пропорциональны силе.

Из равенств (20.10) видно, что наибольшие напряжения возникают в первом стержне. Они раньше достигнут предела текучести. Как только это произойдет, конструкция перейдет в упругопластическую стадию работы. Предельную упругую нагрузку  $F_e$  найдем из условия:  $\sigma_1 = \sigma_{yl}$ ;  $0,4F_e/A = \sigma_{yl}$ , откуда  $F_e = 2,5\sigma_{yl}A$ .

20.1.2.2. Упругопластическая стадия, первый этап – в состоянии текучести находится первый стержень.

Когда возрастающая сила  $F$  превысит предельное упругое значение, первый стержень потечет, напряжения в нем будут постоянными  $\sigma_1 = \sigma_{yl}$ . Стержни второй, третий и четвертый будут работать упруго. Уравнения равновесия (20.8) после этого примут вид:

$$\sigma_{yl} + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = F/A, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 = F/A. \quad (б)$$

Закон Гука будут справедливы лишь для трех стержней:

$$\varepsilon_2 = \sigma_2/E, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3/E, \quad \varepsilon_4 = \sigma_4/E. \quad (в)$$

Из системы уравнений (20.9), (б) и (в) находим:

$$\sigma_2 = (5F - 8\sigma_{yl}A)/(6A), \quad \sigma_3 = (F - \sigma_{yl}A)/(3A), \\ \sigma_4 = (4\sigma_{yl}A - F)/(6A), \quad \varepsilon_1 = (4F - 7\sigma_{yl}A)/(3EA). \quad (г)$$

По последнему равенству определяем  $\delta_a = l(4F - 7\sigma_{yl}A)/(3EA)$ .

Сопоставляя величины напряжений (г), видим, что текучесть во втором стержне начнется раньше чем в третьем или четвертом. Обозначим силу, соответствующую началу текучести второго стержня  $F'$ , и найдем ее значение:  $\sigma_2 = (5F' - 8\sigma_{yl}A)/(6A) = \sigma_{yl}$ ;  $F' = 2,8\sigma_{yl}A$ .

20.1.2.3. Упругопластическая стадия, второй этап – в состоянии текучести первый и второй стержни.

Чтобы отразить работу конструкции на этом этапе, в уравнения равновесия (20.8) введем равенства  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{yl}$ . В итоге получим

$$\sigma_3 = (2F - 5\sigma_{yl}A)/(A), \quad \sigma_4 = (3\sigma_{yl}A - F)/(A). \quad (20.12)$$

Деформации стержней 3 и 4 найдем по закону Гука:

$$\varepsilon_3 = (2F - 5\sigma_{yl}A)/(EA), \quad \varepsilon_4 = (3\sigma_{yl}A - F)/(EA).$$

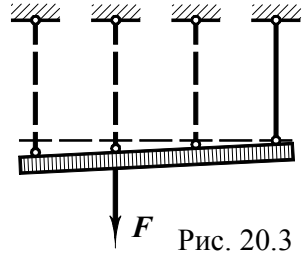
Подставляя этот результат в во второе равенство (20.9), получаем  $\varepsilon_1 = (8F - 21\sigma_{yl}A)/(EA)$ , откуда

$$\delta_a = l(8F - 21\sigma_{yl}A)/(EA). \quad (20.13)$$

Результаты (20.12) и (20.13) отражают зависимости напряжений и перемещения  $\delta_a$  от силы  $F$  на рассматриваемом этапе нагружения.

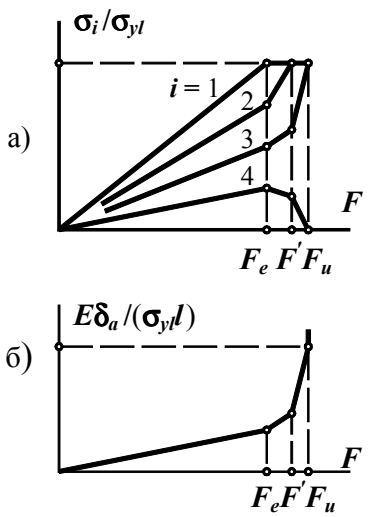
Если в состоянии текучести перейдет стержень 3 или 4, конструкция станет геометрически изменяемой – разрушится. Найдем разрушающую нагрузку  $F_u$ . Третий стержень потечет, когда  $\sigma_3 = (2F_u - 5\sigma_{yl}A)/(A) = \sigma_{yl}$  т.е. при  $F_u' = 3\sigma_{yl}$ , а четвертый при

$\sigma_4 = (3\sigma_{yl} A - F_u'')/A = -\sigma_{yl}$ , что дает  $F_u'' = 4\sigma_{yl} A$ . Из двух решений действительно меньшее:  $F_u = 3\sigma_{yl} A$ . Конструкция превратится в механизм, изображенный на рис. 20.3.



20.1.2.4. Несмотря на простоту рассмотренной стержневой системы, в ее работе проявились такие особенности (рис. 20.4), которые свойственны конструкциям и более сложным.

Первая особенность (рис. 20.4 а) – *предельная упругая нагрузка  $F_e$  (предельная по напряжению в опасной точке) меньше разрушающей  $F_u$  (предельной по несущей способности)*. Это свидетельствует о том, что методы расчетов, учитывающие пластические свойства материалов, полнее используют резервы прочности конструкций.



Вторая особенность – *перераспределение напряжений в упругопластической стадии*. Действительно, при упругой работе характеристики напряженно-деформированного состояния росли пропорционально. Отношения между ними оставались постоянными (например,  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 = 4 : 3 : 2 : 1$ ). С появлением пластических деформаций эти соотношения изменяются. Так, напряжение  $\sigma_1$ , достигнув предела текучести, расти перестало, но увеличилась скорость роста напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Рис. 20.4 ка (см. уменьшение напряжений в четвертом стержне).

И наконец, четвертая особенность. Перемещение  $\delta_a$  в упругой стадии также изменялось пропорционально силе  $F$  (рис. 20.4 б). В упругопластической стадии скорость роста перемещения  $\delta_a$  увеличивается. Эта особенность реакции конструкции на действие силы говорит о том, что за пределом упругости жесткостные требования могут стать решающими в оценке ее эксплуатационной пригодности.

### 20.1.3. Остаточные напряжения и деформации после разгрузки

Упругопластический материал при нагружении и разгрузке следует различным физическим закономерностям. Это свойство материала отражается и в работе конструкции. В результате нагружения ее до упругопластического состояния с последующим снятием нагрузки в конструкции остаются напряжения и деформации.

Методика расчета при таких воздействиях опирается на свойства материала. Весь процесс действия сил делят на две части – нагружение и разгрузку. При нагружении материал рассматривают как упругопластический и расчет ведут аналогично показанному выше. Состояние конструкции при максимальной нагрузке принимают за исходное для анализа процесса разгрузки.

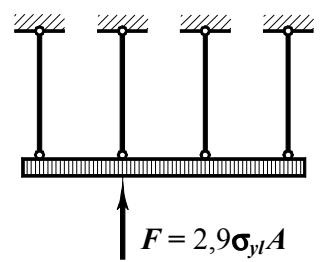
В ходе разгрузки приращения напряжений и деформаций связаны законом Гука. Поэтому на обсуждаемом этапе конструкцию рассматривают как упругую. Найденные напряжения суммируют с достигнутыми при нагружении.

Проиллюстрируем методику расчета на конструкции, рассмотренной выше. Найдем остаточные напряжения и деформации в ней после нагружения до  $F = 2,9\sigma_{yl}A$  с последующим снятием силы.

20.3.1. Нагружение. Расчет этого этапа выполнен выше. По результатам (20.12) и (20.13), справедливым при  $F = 2,9\sigma_{yl}A$ , находим:

$$\sigma_1^l = \sigma_2^l = \sigma_{yl}, \sigma_3^l = 0,8\sigma_{yl}, \sigma_4^l = 0,1\sigma_{yl}, \delta_a^l = 2,2\sigma_{yl}l/E. \quad (a)$$

20.3.2. Разгрузка. Изменения усилий, напряжений и деформаций на этом этапе найдем из расчета конструкции на действие встречной силы  $F = 2,9\sigma_{yl}A$  (рис. 20.5) в предположении упругости материала. Такой расчет совпадает с результатами (20.10) и (20.11) (с обратными знаками). Итак,



$$\sigma_1^d = -1,16\sigma_{yl}, \sigma_2^d = -0,87\sigma_{yl}, \sigma_3^d = -0,58\sigma_{yl}, \sigma_4^d = -0,29\sigma_{yl}, \delta_a^d = -1,16\sigma_{yl}l/E. \quad \text{Рис. 20.5}$$

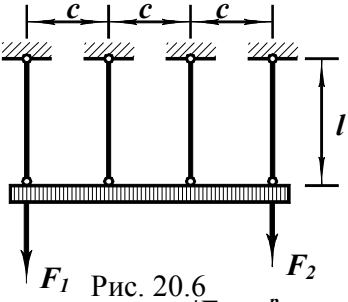
Суммируя эти величины с одноименными из (а), находим остаточные величины

$$\sigma_1^r = -0,16\sigma_{yl}, \sigma_2^r = 0,13\sigma_{yl}, \sigma_3^r = 0,22\sigma_{yl}, \sigma_4^r = -0,19\sigma_{yl}, \delta_a^r = 1,04\sigma_{yl}l/E.$$

### 20.1.4. Характеристики напряженно-деформированного состояния.

#### Соотношения между ними. Свойства характеристик

20.1.4.1. Рассмотрим ту же шарнирно-стержневую конструкцию, но нагруженную двумя силами –  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 20.6). Уравнения равновесия записываются так:



$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 &= (F_1 + F_2)/A, \\ \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 &= 3F_2/A. \end{aligned} \quad (a)$$

Условия совместности деформаций имеют вид (20.9). Связь напряжений с деформациями запишем в форме (20.1):

$$\epsilon_1 = \sigma_1/E + \epsilon_1^p, \quad \epsilon_2 = \sigma_2/E + \epsilon_2^p, \quad \epsilon_3 = \sigma_3/E + \epsilon_3^p, \quad \epsilon_4 = \sigma_4/E + \epsilon_4^p. \quad (б)$$

Из системы (20.9), (a) и (б) находим напряжения

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / A + E \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_2^p \\ \epsilon_3^p \\ \epsilon_4^p \end{pmatrix}. \quad (в)$$

Из полученных выражений видно, что напряжения зависят от сил  $F_1$ ,  $F_2$  и пластических деформаций.

Первые слагаемые представляют собой *упругие* части напряжений, изменяющиеся пропорционально силам. Вторые слагаемые – *остаточные* напряжения, вызванные пластическими деформациями. Таким образом, полные усилия и напряжения можно представить в виде суммы упругих (возникающих в идеально упругой конструкции) и остаточных напряжений:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \\ \sigma_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / A + E \begin{pmatrix} \sigma_1^r \\ \sigma_2^r \\ \sigma_3^r \\ \sigma_4^r \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_2^p \\ \epsilon_3^p \\ \epsilon_4^p \end{pmatrix}. \quad (20.14)$$

$$N_i = N_i^e + N_i^r, \quad \sigma_i = \sigma_i^e + \sigma_i^r \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20.15).$$

20.1.4.2. Особенностью остаточных усилий и напряжений является их самоуравновешенность. Силы  $N_i^r$  и напряжения  $\sigma_i^r$  удовлетворяют условиям равновесия при отсутствии внешней нагрузки:

$$\sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r + \sigma_4^r = 0, \quad \sigma_2^r + 2\sigma_3^r + 3\sigma_4^r = 0. \quad (20.16)$$

По этой причине их еще называют *самонапряжениями*. Поскольку четыре напряжения связаны двумя условиями (20.16), то, зная два любых из них, можно найти остальные два из уравнений равновесия. В общем случае самонапряжение конструкции может быть задано лишь несколькими независимыми параметрами. Число их равно степени статической неопределимости. Параметрами самонапряжений могут быть реакции избыточных (с точки зрения геометрической изменяемости) связей. Через них можно выразить усилия и напряжения в любом элементе конструкции.

20.1.4.3. Отметим важную особенность зависимости остаточных напряжений от пластических деформаций (20.14). Приравняв напряжения нулю и решив однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} -0,3\epsilon_1^p + 0,4\epsilon_2^p + 0,1\epsilon_3^p - 0,2\epsilon_4^p &= 0, \\ 0,4\epsilon_1^p - 0,7\epsilon_2^p + 0,2\epsilon_3^p + 0,1\epsilon_4^p &= 0, \\ 0,1\epsilon_1^p + 0,2\epsilon_2^p - 0,7\epsilon_3^p + 0,4\epsilon_4^p &= 0, \\ -0,2\epsilon_1^p + 0,1\epsilon_2^p + 0,4\epsilon_3^p - 0,3\epsilon_4^p &= 0, \end{aligned}$$

находим  $3\epsilon_2^p = 2\epsilon_1^p + \epsilon_4^p$ ,  $3\epsilon_3^p = \epsilon_1^p + 2\epsilon_4^p$ . Сопоставляя полученные равенства с условиями совместности (20.9), видим, что они совпадают. Пластические деформации, удовлетворяющие условиям совместности, называют *совместными*. *Остаточные напряжения, соответствующие совместным пластическим деформациям, равны нулю.*

20.1.4.4. Рассмотрим теперь деформации (б). Если подставить в них напряжения (20.15), получим выражение  $\epsilon_i = \sigma_i^e/E + \sigma_i^r/E + \epsilon_i^p$ . Сравнивая его с равенствами (20.1) и (20.2), замечаем, что упругая деформация  $\epsilon_i^e = \sigma_i^e/E + \sigma_i^r/E$ . Она состоит из двух частей:  $\epsilon_i^{ee} = \sigma_i^e/E$  и  $\epsilon_i^{er} = \sigma_i^r/E$ , связанных законом Гука соответственно с упругими и остаточными напряжениями. Принимая во внимание то, что упругие напряжения пропорциональны нагрузке и при ее отсутствии равны нулю, назовем  $\epsilon_i^{ee}$  *обратимой* частью упругой деформации, а  $\epsilon_i^{er}$  – *необратимой*. Сумма  $\epsilon_i^r = \sigma_i^r/E + \epsilon_i^p$  представляет *остаточную* деформацию в стержне. Итак,  $\epsilon_i = \epsilon_i^e + \epsilon_i^p = \epsilon_i^{ee} + \epsilon_i^{er} + \epsilon_i^p = \epsilon_i^{ee} + \epsilon_i^r$ . Важно уяснить разницу между  $\epsilon_i^e$  и  $\epsilon_i^{ee}$ . Первая связана законом Гука с полным напряжением, а  $\epsilon_i^{ee}$  – только с упругой его частью.

Подставим теперь соответствующие напряжения из равенств (в) в деформации (б). В итоге имеем

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / (EA) + \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \\ \varepsilon_4^p \end{pmatrix}.$$

Выделяя обратимую и остаточную деформации, получим равенства

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{ee} \\ \varepsilon_2^{ee} \\ \varepsilon_3^{ee} \\ \varepsilon_4^{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / (EA); \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \\ \varepsilon_3^r \\ \varepsilon_4^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \\ \varepsilon_4^p \end{pmatrix}.$$

20.1.4.5. Получив необходимые формулы для рассматриваемой конструкции, запишем зависимости (20.3) в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ -0,4 & -0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,7 \\ 0,2 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} / A + E \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,3 & -0,4 & -0,1 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ -0,4 & 0,7 & -0,2 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,1 & -0,2 & 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & -0,1 & -0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^p \\ \varepsilon_2^p \\ \varepsilon_3^p \\ \varepsilon_4^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_{yl}.$$

Номера стержней  $i=1, 2, 3, 4$  и функций текучести  $\varphi_m$  с  $m=1, 2, \dots, 8$  связаны так:  $i$ -му стержню соответствует две функции – с  $m=2i-1$  и  $m=2i$ . Обращение в нуль функции с нечетным номером означает текучесть при растяжении, с четным – при сжатии. Условия текучести и закон течения (20.4) ... (20.7) теперь имеют вид:

$$\varphi_m \leq 0, \quad \varphi_m \Delta \lambda_m = 0, \quad \Delta \lambda_m \geq 0; \quad (20.17)$$

$$\Delta \varepsilon_i^p = \Delta \lambda_{2i-1} - \Delta \lambda_{2i}. \quad (20.18)$$

## 20.2. Статический метод расчета упругопластических конструкций

В этом разделе рассмотрим задачу о несущей способности конструкции. Большинство методов решения указанной задачи опирается на фундаментальные теоремы теории предельного равновесия – статическую и кинематическую. Остановимся на статическом методе.

### 20.2.1. Статическая теорема теории предельного равновесия

Теория предельного равновесия посвящена определению разрушающих значений монотонно возрастающих нагрузок.

Прежде чем сформулировать статическую теорему, введем необходимое понятие: напряжения (усилия), не превышающие предельных значений, называют *допустимыми*. Кроме того, напомним, что напряжения (усилия) называют *статически возможными*, если они удовлетворяют условиям равновесия.

Статическая теорема формулируется так<sup>1</sup>. *Если для данной конструкции и нагрузки существует допустимое статически возможное распределение напряжений (усилий), действующая нагрузка не превышает разрушающую.*

Для иллюстрации метода вновь обратимся к шарнирно-стержневой системе (рис. 20.2). Найдем разрушающее значение силы  $F$ , используя статическую теорему. Напряжения в стержнях представим в виде сумм:

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^r, \quad \sigma_2 = \sigma_2^0 + \sigma_2^r, \quad \sigma_3 = \sigma_3^0 + \sigma_3^r, \quad \sigma_4 = \sigma_4^0 + \sigma_4^r, \quad (20.19)$$

где  $\sigma_i^0$  – какие-либо статически возможные (удовлетворяющие условиям равновесия (20.8)) напряжения. Примем простейший вариант:  $\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_4^0 = 0$ ,  $\sigma_2^0 = F/A$ , согласующийся с условиями равновесия.

<sup>1</sup> Доказательства статической и кинематической теорем здесь опущены. Их можно найти, например, в учебном пособии Л.М. Качанова. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 378 с.

Остаточные напряжения самоуравновешены – статически возможны. Выразим из уравнений (20.16) напряжения  $\sigma_3^r$  и  $\sigma_4^r$  через  $\sigma_1^r$  и  $\sigma_2^r$ :  $\sigma_3^r = -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r$ ,  $\sigma_4^r = 2\sigma_1^r + \sigma_2^r$ . В итоге получаем:

$$\sigma_1 = \sigma_1^r, \sigma_2 = F/A + \sigma_2^r, \sigma_3 = -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r, \sigma_4 = 2\sigma_1^r + \sigma_2^r.$$

Естественно, эти напряжения являются статически возможными.

Условия допустимости напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} -\sigma_{yl} \leq \sigma_1^r \leq \sigma_{yl}, \quad -\sigma_{yl} \leq F/A + \sigma_2^r \leq \sigma_{yl}, \\ -\sigma_{yl} \leq -3\sigma_1^r - 2\sigma_2^r \leq \sigma_{yl}, \quad -\sigma_{yl} \leq 2\sigma_1^r + \sigma_2^r \leq \sigma_{yl}. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Определение разрушающей нагрузки сводится к поиску наибольшего значения  $F$  при четырех парах ограничений (20.20).

Решим задачу графически. Каждое спаренное ограничение

(20.20) выделяет в трехмерном пространстве  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, F$  бесконечную полосу, внутри которой должно находиться решение. Так, первая пара требует, чтобы точка находилась между плоскостями  $\Pi_1^+$  и  $\Pi_1^-$

(рис. 20.7); вторая – между  $\Pi_2^+$  и  $\Pi_2^-$ , третья – между  $\Pi_3^+$  и  $\Pi_3^-$ .

Полоса, определяемая четвертым спаренным ограничением из (20.20), полностью охватывает изображенную призму и

потому на рис. 20.7 не показана. Таким образом, координата  $F$  любой точки, не выходящей за пределы призмы, не превышает разрушающее значение. Действительная разрушающая величина  $F$  – максимальная. Из графического построения видно, что она соответствует вершине  $\sigma_1^r = \sigma_{yl}, \sigma_2^r = -2\sigma_{yl}, F_u = 3\sigma_{yl}A$ . Разрушающее значение нагрузки совпадает с полученным в разделе 20.1.2.

Разрушающее значение силы найдено верно. Параметры же самонапряжений  $\sigma_1^r = \sigma_{yl}$  и  $\sigma_2^r = -2\sigma_{yl}$  не совпадают с действительными. Это объясняется, в частности, тем, что в основу построения положено совершенно случайное статически возможное распределение напряжений  $\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_4^0 = 0, \sigma_2^0 = F/A$ .

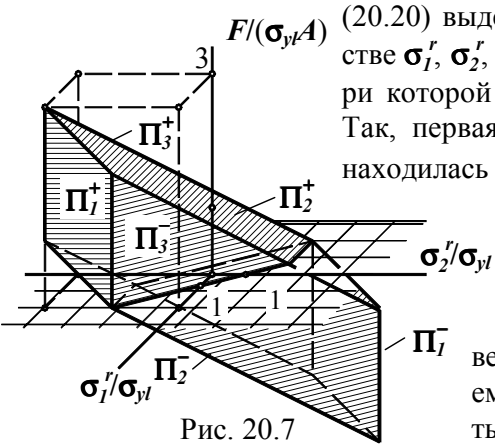


Рис. 20.7

Отметим характерное свойство статического метода. Если взять какую-либо точку, принадлежащую изображенной призме, ее ордината  $F_u$  не превысит действительную разрушающую величину. Любой набор усилий, удовлетворяющий условиям (20.20), не может дать завышенное значение разрушающей нагрузки.

### 20.2.2. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси балки

В упругой стадии связь кривизны оси балки с изгибающим моментом отражается законом Гука

$$\kappa = 1/\rho = M/(EJ), \quad (a)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя;  $J$  – момент инерции сечения. Соотношение (a) справедливо при условии  $-M_e \leq M \leq M_e$ , в котором  $M_e$  – предельный упругий момент.

За пределом упругости зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента описывается нелинейными математическими выражениями. Графики таких выражений имеют вид, изображенный пунктирными линиями на рис. 20.8 ( $M_u$  – разрушающий момент).

Для упрощения расчетов диаграмму изгиба обычно идеализируют. Широкое распространение получили линеаризованные зависимости, среди которых наиболее простой является диаграмма Прандтля. Согласно ей закон Гука (a) справедлив до разрушающего момента, после чего кривизна может неограниченно возрастать. При разгрузке приращения момента и кривизны связаны законом Гука.

Подобно тому, как были описаны деформационные зависимости (20.1) ... (20.7), введем соотношения

$$\kappa = M/(EJ) + \kappa^p; \quad (20.21)$$

$$\varphi_1 = M - M_u, \quad \varphi_2 = -M - M_u; \quad (б)$$

$$\varphi_1 \leq 0, \quad \varphi_2 \leq 0; \quad (в)$$

$$\Delta \kappa^p = \Delta \lambda_1 - \Delta \lambda_2; \quad (г)$$

$$\varphi_1 \Delta \lambda_1 = 0, \quad \varphi_2 \Delta \lambda_2 = 0; \quad (д)$$

$$\Delta \lambda_1 \geq 0, \quad \Delta \lambda_2 \geq 0; \quad (е)$$

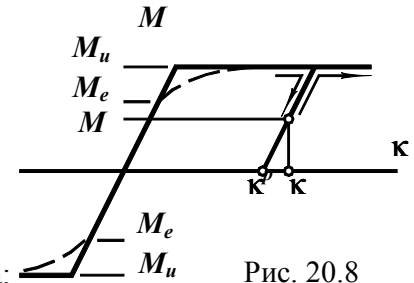


Рис. 20.8

в которых  $\kappa^p$  – пластическая кривизна;  $\varphi$  – функции текучести;  $\lambda$  – индексы текучести. Смысл выражений (20.21), (б) ... (е) и (20.1) ... (20.7) аналогичен.

### 20.2.3. Несущая способность сечений балок

На основании статической теоремы определим несущую способность сечений балок – найдем величины разрушающих изгибающих моментов  $M_u$ . Условие статической возможности распределения усилий в сечении балки – отсутствие продольной силы:

$$N = N_t - N_c = 0. \quad (a)$$

Здесь  $N_t$  – равнодействующая растягивающих напряжений,  $N_c$  – сжимающих. Согласно теореме действительный разрушающий момент – наибольший при допустимых напряжениях и условии (a).

20.2.3.1. Расчетные сопротивления на растяжение и сжатие одинаковы.

Допустимые напряжения подчинены условиям  $\sigma_t \leq R$ ,  $\sigma_c \leq R$ .

Момент достигнет наибольшей величины, когда напряжения во всех точках сечения станут предельными:  $\sigma_t = R$ ,  $\sigma_c = R$  (рис. 20.9). Равнодействующая растягивающих напряжений  $N_t = RA_t$ , сжимающих  $N_c = RA_c$ , где  $A_t$  и  $A_c$  – площади растянутой и сжатой частей сечения. По условию (a)  $N_t - N_c = RA_t - RA_c = 0$ . Отсюда следует  $A_t = A_c$ . Но так как  $A_t + A_c = A$ , то

$$A_t = A_c = A/2. \quad (20.22)$$

При исчерпании несущей способности площади растянутой и сжатой частей составляют половину площади сечения.

Напряжения в каждой половине сечения распределены равномерно – равнодействующие  $N_t$  и  $N_c$  приложены в центрах тяжести соответствующих частей – точках 1 и 2. Разрушающий момент  $M_u = N_t y_1 + N_c y_2 = RA_t y_1 + RA_c y_2 = R(A_t y_1 + A_c y_2)$ . Слагаемые в скобках – статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии;  $M_u = R(|S_t| + |S_c|)$ . Обозначим

$$|S_t| + |S_c| = W_{pl}. \quad (20.23)$$

$W_{pl}$  носит название *пластического момента сопротивления сечения*. Итак,

$$M_u = RW_{pl}. \quad (20.24)$$

### 20.2.3.2. Несущая способность сечения железобетонной балки.

Расчет изгибающего момента, разрушающего железобетонную балку, опирается на две предпосылки:

- прочность бетона на растяжение не учитывается (в этой части сечения образуется трещина);
- усилие, воспринимаемое сжатой арматурой, также не учитывается из-за слабого влияния на конечный результат.

Рассмотрим железобетонную балку прямоугольного сечения. Усилия, соответствующие исчерпанию несущей способности, показаны на рис. 20.10.

Растягивающее усилие, воспринимаемое арматурой,  $N_t = R_{st} A_{st}$ , где  $R_{st}$  – расчетное сопротивление арматуры;  $A_{st}$  – площадь растянутой арматуры. Равнодействующая сжимающих напряжений в бетоне  $N_c = R_{enc} b y_0$ , где  $R_{enc}$  – расчетное сопротивление бетона на сжатие;  $b$  – ширина сечения;  $y_0$  – высота сжатой зоны сечения. Из условия (a) следует  $R_{st} A_{st} - R_{enc} b y_0 = 0$ , откуда  $y_0 = R_{st} A_{st} / (R_{enc} b)$ .

Поскольку усилия в сечении балки образуют пару сил, момент равен силе на плечо пары:  $M_u = N_t (h_0 - y_0/2) = R_{st} A_{st} (h_0 - y_0/2)$ . Подставляя сюда высоту сжатой зоны, окончательно находим

$$M_u = R_{st} A_{st} (h_0 - R_{st} A_{st} / (2R_{enc} b)). \quad (20.25)$$

Разрушающий момент при иной форме сечения балки (тавровое, двутавровое, трапециевидное и т.п.) определяют на основе тех же предпосылок и в той же последовательности:

- из условия отсутствия продольной силы находят высоту сжатой зоны бетона;

- разрушающий момент равен моменту внутренней пары сил.

Итоговые формулы разрушающих моментов в этих случаях в значительной степени зависят от индивидуальных геометрических параметров сечения. Поэтому приведенный выше пример следует рассматривать как иллюстрацию методики оценки несущей способности сечения железобетонной балки.

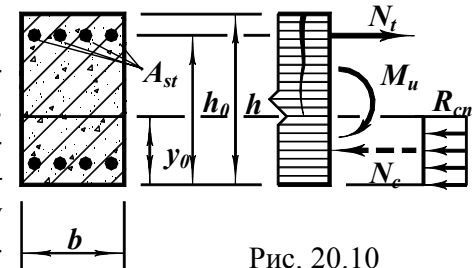


Рис. 20.10

### 20.2.4. Расчетные соотношения статического метода теории предельного равновесия балок и плоских рам

В систему расчетных соотношений метода входят условия равновесия и ограничения на величины усилий. Составим систему условий задачи, игнорируя влияние продольных и поперечных сил на несущую способность сечений балок и рам. В таких случаях в расчетные соотношения войдут только изгибающие моменты.

Как было показано выше, полное значение усилия (момента) может быть представлено в виде суммы

$$M_i = M_i^0 + M_i^r \quad (i = 1, 2, \dots, i^+), \quad (20.26)$$

где  $M_i^0$  – момент, соответствующий некоторой статически возможной эпюре (начальный момент);  $M_i^r$  – остаточный момент от параметров самонапряжений;  $i$  – номер сечения;  $i^+$  – наибольший номер.

Начальный момент может быть выбран на основе любой основной системы метода сил. Он пропорционален внешней нагрузке. Запишем выражения начальных моментов в виде

$$M_i^0 = B_i F, \quad (a)$$

где  $B_i$  – конкретное число;  $F$  – параметр нагрузки.

Остаточные моменты выразим через параметры самонапряжений

$$M_i^r = \sum_1^{j^+} M_{ij}^{(l)} X_j \quad (j = 1, 2, \dots, j^+). \quad (б)$$

Здесь  $M_{ij}^{(l)}$  – изгибающий момент в  $i$ -м сечении основной системы метода сил от  $X_j = 1$ ;  $X_j$  – реакция  $j$ -й избыточной связи;  $j^+$  – степень статической неопределимости конструкции.

Поскольку  $M_i^0$  статически возможны, а  $M_i^r$  самоуравновешены, суммарные моменты (20.26) удовлетворяют условиям равновесия.

Ограничения на величины изгибающих моментов имеют вид  $M_{ui} \leq M_i \leq M_{ui}$ , где  $M_{ui}$  – разрушающий момент  $i$ -го сечения. Подставляя в записанные ограничения суммы (20.26) с учетом равенств (a) и (б), получаем систему условий задачи

$$-M_{ui} \leq B_i F + \sum_1^{j^+} M_{ij}^{(l)} X_j \leq M_{ui} \quad (i = 1, 2, \dots, i^+). \quad (20.27)$$

Определение разрушающего значения параметра нагрузки сводится к поиску максимума  $F$ , удовлетворяющего неравенствам (20.27).

### 20.2.5. Примеры расчета балок статическим методом

20.2.5.1. Найдем величину силы  $F$ , разрушающей двухпролетную балку (рис. 20.11 а).

Отбросив левую избыточную связь, строим эпюру начальных моментов (рис. 20.11 б). В качестве параметра самонапряжений примем реакцию левой опоры (рис. 20.11. в). Эпюра остаточных моментов от нее изображена на рис. 20.11. г. Условия допустимости моментов имеют вид:  $-M_u \leq -Xl \leq M_u$ ,  $-M_u \leq Fl - 2Xl \leq M_u$ . В полученных неравенствах два неизвестных –  $F$  и  $X$ . Найдем  $F_u = F_{max}$ .

По эпюрам  $M^0$  и  $M^r$  видим, что решение нужно искать так, чтобы моменты в левом пролете и над средней опорой достигли предельных значений:  $-Xl = -M_u$ ,  $Fl - 2Xl = M_u$ . Отсюда находим  $X = M_u/l$ ,  $F_u = 3M_u/l$ . Эпюра моментов изображена на рис. 20.11 д.

20.2.5.2. Ознакомимся со спецификой реализации статического метода при распределенной нагрузке (рис. 20.12 а). Найдем интенсивность разрушающей нагрузки.

Отбросим левую избыточную опору и построим статически возможную эпюру начальных моментов (рис. 20.12 б, в). Приняв в качестве параметра самонапряжений реакцию отброшенной связи, строим эпюру остаточных моментов (рис. 20.12 г, д).

Для выполнения условий допустимости моментов достаточно, чтобы

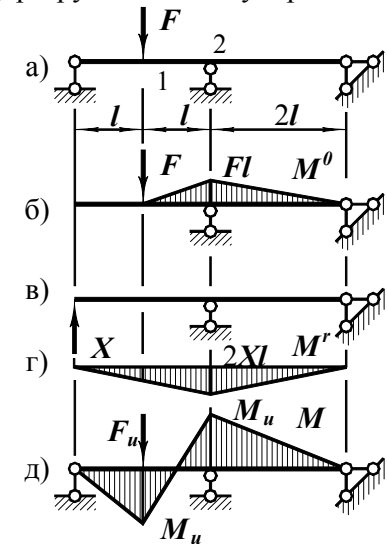


Рис. 20.11

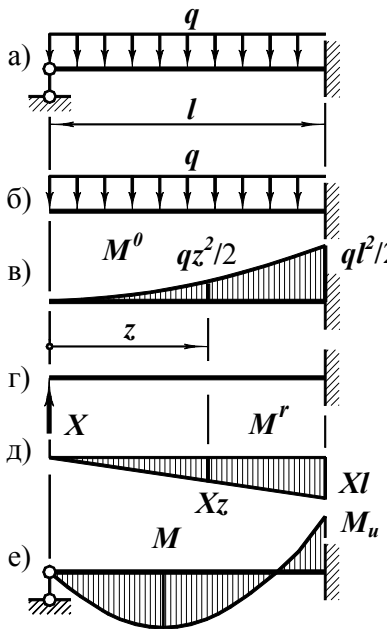


Рис. 20.12

они соблюдались в двух сечениях – в пролетном с максимальным отрицательным моментом и на правом конце балки. Найдем положение пролетного сечения.  $M = 0,5qz^2 - Xz$ . Приравняв нулю производную  $dM/dz = qz - X = 0$ , находим  $z = X/q$ , а по нему  $M_{min} = -0,5X^2/q$ . Из условия  $M_{min} = -M_u$  устанавливаем  $X^2 = 2qM_u$ . Момент в правом сечении  $M_{max} = 0,5ql^2 - Xl$ . Приравнявая его предельному значению, имеем  $0,5ql^2 - Xl = M_u$ , что после подстановки  $X$  и несложных преобразований приводит к квадратному уравнению

$$(0,5ql^2)^2 - 3M_u(qul^2) + M_u^2 = 0.$$

Отсюда  $q_u' = 11,657M_u/l^2$  и  $q_u'' = 0,3431M_u/l^2$ . Первому решению соответствуют  $X = 4,828M_u/l$  и  $z = 0,4142l$ , второму  $X = -0,8284M_u/l$  и  $z = -2,4142l$ . Второе решение отбрасываем. Итак,  $q_u = 11,657M_u/l^2$ .

Приведенный пример обнаруживает нелинейность задачи. В таких случаях поиск разрушающей нагрузки усложняется. Для облегчения расчетной процедуры можно привлекать приближенные решения. Одним из способов является замена распределенной нагрузки системой сосредоточенных сил. Тогда эпюра изгибающих моментов – ломаная линия. Условия задачи остаются линейными. Решение задачи не выходит за рамки линейной алгебры.

### 20.2.6. Жордановы преобразования систем линейных равенств

При решении задач, описываемых системой ограничений в виде линейных равенств и неравенств, широкое применение нашли так называемые жордановы преобразования. Познакомимся с ними.

Запишем  $m$  равенств с  $n$  независимыми переменными в табличной форме. Будем называть *шагом жорданового преобразования таблицы* с разрешающим элементом  $a_{rs} \neq 0$ ,  $r$ -й разрешающей строкой и  $s$ -м разрешающим столбцом операцию перемены ролями между зависимой переменной  $y_r$  и независимой  $x_s$ , т.е. операцию решения уравнения

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n$$

относительно  $x_s$  и подстановки его во все остальные равенства.

Из  $r$ -го равенства

$$x_s = (-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{r,s-1}x_{s-1} + y_r - a_{r,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{rn}x_n)/a_{rs}.$$

После подстановки  $x_s$  в остальные уравнения придем к новой таблице. Ее коэффициенты вычисляются по следующим правилам:

а) разрешающий элемент

$$b_{rs} = 1/a_{rs};$$

б) остальные элементы разрешающего столбца  $b_{is} = a_{is}/a_{rs}$  ( $i \neq r$ );

в) остальные элементы разрешающей строки  $b_{rj} = -a_{rj}/a_{rs}$  ( $j \neq s$ );

г) элементы, не принадлежащие ни разрешающей строке, ни разрешающему столбцу,  $b_{ij} = a_{ij} - a_{is}a_{rj}/a_{rs}$  ( $i \neq r, j \neq s$ ).

Такие преобразования будем использовать при решении задач предельного равновесия.

### 20.2.7. Алгоритм расчета предельного параметра нагрузки статическим методом

Так как по статической теореме действительная разрушающая нагрузка – максимальная, алгоритм ее определения может быть построен на монотонном росте параметра нагрузки при соблюдении условий задачи. Вновь обратимся к шарнирно-стержневой системе, рассмотренной в разделах 20.1.2 и 20.2.1.

Запишем систему ограничений (20.20) в табличной форме. Далее, принимаем начальные значения  $F^0 = 0$ ,  $\sigma_1^r = \sigma_2^r = 0$ . Все условия (а) при этом выполняются. Имитируем рост силы  $F$ .

Найдем значение силы  $F^1$ , до которого начальные

$\sigma^r$  удовлетворяют условиям допустимости. Из равенств (а) видно, что функция  $\varphi_3$  раньше других достигнет нуля. Это произойдет при  $\varphi_3 = -1 + F^1/(\sigma_{y1}A) = 0$ , т.е.  $F^1 = \sigma_{y1}A$ . При дальнейшем росте силы нулевые остаточные напряжения не удовлетворяют условия задачи.

	$x_1$	$x_2$	...	$y_r$	...	$x_n$
$y_1 =$	$b_{11}$	$b_{12}$	...	$b_{1s}$	...	$b_{1n}$
$y_2 =$	$b_{21}$	$b_{22}$	...	$b_{2s}$	...	$b_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_s =$	$b_{r1}$	$b_{r2}$	...	$b_{rs}$	...	$b_{rn}$
...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	$b_{m1}$	...	...	$b_{ms}$	...	$b_{mn}$

	1	$F/(\sigma_{y1}A)$	$\sigma_1^r/\sigma_{y1}$	$\sigma_2^r/\sigma_{y1}$	
$\varphi_1 =$	-1	0	1	0	$\leq 0$ ,
$\varphi_2 =$	-1	0	-1	0	$\leq 0$ ,
$\varphi_3 =$	-1	1	0	1	$\leq 0$ ,
$\varphi_4 =$	-1	-1	0	-1	$\leq 0$ .
$\varphi_5 =$	-1	0	-3	-2	$\leq 0$ ,
$\varphi_6 =$	-1	0	3	2	$\leq 0$ ,
$\varphi_7 =$	-1	0	2	1	$\leq 0$ ,
$\varphi_8 =$	-1	0	-2	-1	$\leq 0$ .



Примем на втором этапе  $\sigma_1^r = 0$ , а  $\sigma_2^r$  подберем так, чтобы в процессе роста силы  $F$  сохранялось равенство  $\varphi_3 = 0$ . С этой целью выполним шаг жордановых преобразований таблицы (а), поменяв местами  $\varphi_3$  и  $\sigma_2^r$ . Придем к таблице (б).

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	$\sigma_1^r/\sigma_{yl}$	$\varphi_3$	
$\varphi_1$	=	-1	0	1	0 $\leq 0$
$\varphi_2$	=	-1	0	-1	0 $\leq 0$ ,
$\sigma_2^r/\sigma_{yl}$	=	1	-1	0	1 ,
$\varphi_4$	=	-2	0	0	-1 $\leq 0$ , (б)
$\varphi_5$	=	-3	2	-3	-2 $\leq 0$ ,
$\varphi_6$	=	1	-2	3	2 $\leq 0$ ,
$\varphi_7$	=	0	-1	2	1 $\leq 0$ ,
$\varphi_8$	=	-2	1	-2	-1 $\leq 0$ .

Найдем  $F^2 > F^1$ , до которого выбранные  $\sigma_1^r$  и  $\sigma_2^r$  удовлетворяют условия задачи. Так как,  $\varphi_3 = 0$  и  $\sigma_1^r = 0$ , то изменения функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_8$  описываются двучленами, стоящими в соответствующих строках. Функции, у которых коэффициенты при

$F$  отрицательны, во внимание не принимаем – они уменьшаются и не могут нарушить условия задачи. Из равенств  $\varphi_5 = 0$  и  $\varphi_8 = 0$  соответственно находим  $F = 1,5\sigma_{yl}A$  и  $F = 2\sigma_{yl}A$ . Принимаем меньшее  $F^2 = 1,5\sigma_{yl}A$ .

Дальнейший рост силы  $F$  обеспечим подбором такого,  $\sigma_1^r$  при котором достигая

	1	$F/(\sigma_{yl}A)$	$\varphi_5$	$\varphi_3$	
$\varphi_1$	=	-2	0,667	-0,333	-0,667 $\leq 0$ ,
$\varphi_2$	=	0	-0,667	0,333	0,667 $\leq 0$ ,
$\sigma_2^r/\sigma_{yl}$	=	1	-1	0	1 ,
$\varphi_4$	=	-2	0	0	-1 $\leq 0$ , (в)
$\sigma_1^r/\sigma_{yl}$	=	-1	0,667	-0,333	-0,667 ,
$\varphi_6$	=	-2	0	-1	0 $\leq 0$ ,
$\varphi_7$	=	-2	0,333	-0,667	-0,333 $\leq 0$ ,
$\varphi_8$	=	0	-0,333	0,667	0,333 $\leq 0$ .

нуля  $\varphi_5$  останется нулевой. Для этого шагом жордановых преобразований таблицы (б) меняем местами  $\varphi_5$  и  $\sigma_1^r$ . Получаем таблицу (в).

С ростом силы  $F$  возрастают  $\varphi_1$  и  $\varphi_7$ .

Из равенств  $\varphi_1 = 0$  следует  $F^3 = 3\sigma_{yl}A$ , а из  $\varphi_7 = 0$   $F^3 = 6\sigma_{yl}A$ . Действительно меньшее.

Дальнейший рост силы невозможен. Во-первых, нет параметров самонапряжений, которыми можно было бы обеспечить его. Во-вторых, коэффициенты при  $\varphi_5$  и  $\varphi_3$  в равенствах  $\varphi_1$  и  $\varphi_7$  отрицательны – допустимые изменения  $\varphi_5$  или  $\varphi_3$  в отрицательную сторону уве-

личат  $\varphi_1$  и  $\varphi_7$ . Итак,  $F_u = F^3 = 3\sigma_{yl}A$ . Сравнивая его с найденным ранее, видим их совпадение. При  $F = F_u$  имеем  $\sigma_1^r = -0,2\sigma_{yl}$ ,  $\sigma_2^r = 0,1\sigma_{yl}$ , что также совпадает с найденными ранее.

Изложенный материал обеспечивает статическую теорему формализованным вычислительным алгоритмом и предоставляет возможность решения задач предельного равновесия, как сформулированных на ее основе, так и методами, построенными на других основаниях.

Отметим роль и смысл параметров самонапряжений. Не следует отождествлять их с действительными остаточными усилиями в конструкции. Остаточные усилия могут быть выражены через параметры самонапряжений, но в общем случае не равны им. Поэтому воспроизводимый расчетом процесс изменения параметров, сопровождающий рост нагрузки, не совпадает с действительным процессом.

Достоинством статического метода является то, что любое приближенное решение системы условий задачи дает значение нагрузки, не превышающее действительную предельную величину. Это открывает широкие возможности для упрощения расчетов и использования различных приближенных методов. Можно ограничиться каким-либо приближенным решением, удовлетворяющим условия статической теоремы, не рискуя допустить погрешность, идущую не в запас прочности.

Расчеты реальных конструкций сводятся к системам, содержащим десятки, сотни, а то и тысячи неравенств. В таких случаях решения возможны только с помощью ЭВМ. В настоящее время разработаны теоретические основы, алгоритмы и стандартные программы решения задач предельного равновесия, что создает благоприятные условия для внедрения статического метода в расчетную практику. Отметим также, что во многих нормативных документах есть рекомендации и требования по расчету строительных конструкций на основе теории предельного равновесия.

## 20.3. Кинематический метод расчета упругопластических конструкций

Этот метод опирается на кинематическую теорему теории предельного равновесия. В формулировке теоремы и методе расчета используются новые термины и понятия. Познакомимся с ними.

### 20.3.1. Кинематически возможные пластические деформации. Механизмы разрушения

20.3.1.1. Пластические деформации, удовлетворяющие условиям совместности, называются *кинематически возможными*. Так, в шарнирно-стержневой системе (рис. 20.2) условия совместности имеют вид (20.9). Заменяя в них полные деформации пластическими, получим:

$$3\epsilon_2^p = 2\epsilon_1^p + \epsilon_4^p, \quad 3\epsilon_3^p = \epsilon_1^p + 2\epsilon_4^p. \quad (a)$$

Это же условие устанавливает кинематическую возможность приращений пластических деформаций:

$$3\Delta\epsilon_2^p = 2\Delta\epsilon_1^p + \Delta\epsilon_4^p, \quad 3\Delta\epsilon_3^p = \Delta\epsilon_1^p + 2\Delta\epsilon_4^p. \quad (20.28)$$

Найдем остаточные напряжения, вызванные кинематически возможными пластическими деформациями. Для этого запишем условия (a) в форме

$$\begin{vmatrix} \epsilon_2^p \\ \epsilon_3^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_4^p \end{vmatrix}$$

подставим их в равенства (20.14) и перемножим матрицы.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^r \\ \sigma_2^r \\ \sigma_3^r \\ \sigma_4^r \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_4^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1^p \\ \epsilon_4^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Остаточные напряжения, соответствующие кинематически возможным пластическим деформациям, равны нулю. Равенство (б) справедливо и для приращений пластических деформаций и остаточных напряжений при условии (20.28). Обнаруженное свойство кинематически возможных пластических деформаций проявляется и в более сложных конструкциях.

20.3.1.2. *Механизм разрушения* – это геометрически изменяемая система, в которую превращается конструкция вследствие текущей некоторой ее элементов. Математическим описанием механизмов разрушения является условие кинематической возможности приращений пластических деформаций. Например, для рассматриваемой шарнирно-стержневой системы условия (20.28) описывают все возможные механизмы (рис. 20.13). Приняв, скажем,  $\Delta\epsilon_1^p = 0$ , имеем  $3\Delta\epsilon_2^p = 2\Delta\epsilon_4^p$  и  $3\Delta\epsilon_3^p = \Delta\epsilon_4^p$  (рис. 20.13 а). Если приравнять нулю  $\Delta\epsilon_4^p$ , то соотношения (20.28) опишут механизм, изображенный на рис. 20.13 б:  $3\Delta\epsilon_2^p = \Delta\epsilon_1^p$ ,  $3\Delta\epsilon_3^p = 2\Delta\epsilon_4^p$ . Аналогично для  $\Delta\epsilon_3^p = 0$  следуют соотношения, описывающие механизм, показанный на рис. 20.13 в. Так, перебирая варианты соотношений между приращениями пластических деформаций, можно описать все механизмы.

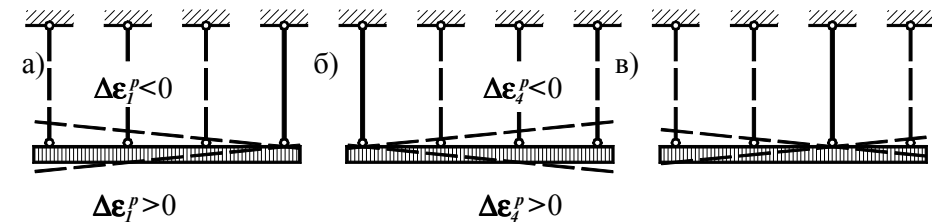


Рис. 20.13

На рис. 20.13 приведены примеры так называемых *простых* механизмов. Они характеризуются одним геометрическим параметром ( $\Delta\epsilon_1^p$  на рис. 20.13 а,  $\Delta\epsilon_4^p$  – 20.13 б).

Механизмы, определяемые двумя или большим числом параметров, называются *избыточными*. Некоторые из них изображены на рис. 20.14.

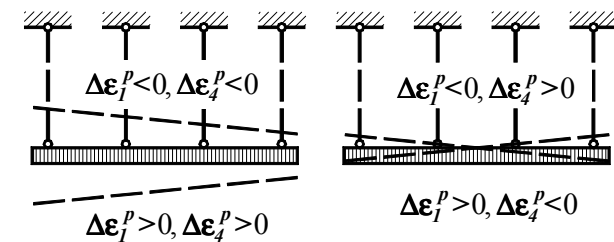


Рис. 20.14

В дальнейшем, говоря о механизмах разрушения, будем иметь в виду простые механизмы.

### 20.3.2. Кинематическая теорема теории предельного равновесия.

#### Алгоритм расчета разрушающей нагрузки кинематическим методом

20.3.2.1. Кинематическая теорема о разрушающей нагрузке может быть сформулирована так. *Из всех нагрузок, соответствующих различным механизмам разрушения, действительной является наименьшая.*

Система математических соотношений задачи в рассматриваемом случае должна содержать описание всех возможных механизмов и условие разрушения. Проиллюстрируем этапы формирования условий задачи примером.

20.3.2.2. Решим кинематическим методом задачу, рассмотренную в разделах 20.1.2 и 20.2.1 (рис. 20.15). Все механизмы разрушения описываются равенствами (20.28). Однако любая комбинация указанных соотношений между приращениями пластических деформаций соответствует двум механизмам. Это показано на рис. 20.13 и 20.14. Чтобы ввести соотношения, отвечающие конкретной геометрически изменяемой системе, преобразуем условия (20.28). Для этого представим приращение каждой пластической деформации в виде (20.5):  $\Delta \epsilon_i^p = \Delta \lambda_{2i-1}^* - \Delta \lambda_{2i}^*$  при  $\Delta \lambda_{2i-1}^* \geq 0$ ,  $\Delta \lambda_{2i}^* \geq 0$ , понимая под  $\Delta \lambda_{2i-1}^*$  – пластическое удлинение, а под  $\Delta \lambda_{2i}^*$  – укорочение  $i$ -го стержня. Теперь равенства (20.28) можно записать так:

$$\begin{aligned} 3(\Delta \lambda_3^* - \Delta \lambda_4^*) &= 2(\Delta \lambda_1^* - \Delta \lambda_2^*) + \Delta \lambda_7^* - \Delta \lambda_8^*; \\ 3(\Delta \lambda_5^* - \Delta \lambda_6^*) &= \Delta \lambda_1^* - \Delta \lambda_2^* + 2(\Delta \lambda_7^* - \Delta \lambda_8^*); \\ \Delta \lambda_m^* &\geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 8). \end{aligned} \quad (a)$$

Условие разрушения запишем в виде

$$F \delta \geq \sum_1^8 \sigma_{yl} A \Delta \lambda_m^*. \quad (б)$$

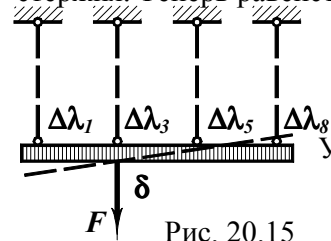


Рис. 20.15

Левая часть неравенства – работа силы  $F$  на перемещении  $\delta$ . Правая часть – работа внутренних сил (рассеяние энергии) в механизме. Ясен смысл неравенства. Если работа внешней нагрузки превышает работу внутренних сил на рассматриваемых кинематически возможных деформациях, конструкция разрушится. Предельному равновесию отвечает равенство левой и правой частей.

В условие (б) входит произведение двух неизвестных величин  $F\delta$  – нелинейное выражение. Учитывая, что  $\delta > 0$ , поделим на него обе части и запишем  $F \geq \sum_1^8 \sigma_{yl} A \Delta \lambda_m^* / \delta$ , (в)

где  $\Delta \lambda_m = I \Delta \lambda_m^* / \delta$ . Наконец,  $\delta = I \Delta \epsilon_2 = I(\Delta \lambda_3^* - \Delta \lambda_4^*)$ , что равносильно  $1 - \Delta \lambda_3 + \Delta \lambda_4 = 0$ . (г)

Задача об определении разрушающей нагрузки свелась к поиску  $\min F$  при условиях (а) ... (г) и неотрицательных  $\Delta \lambda_m$ .

20.3.2.3. Умножим равенства (а) на  $I/\delta$  и сведем условия (а), (б), (в) и (г) в таблицу (д). Каждое ограничение обозначим буквой  $Y$  с соответствующим индексом.

	1	$F/(\sigma_{yl} A)$	$\Delta \lambda_1$	$\Delta \lambda_2$	$\Delta \lambda_3$	$\Delta \lambda_4$	$\Delta \lambda_5$	$\Delta \lambda_6$	$\Delta \lambda_7$	$\Delta \lambda_8$	
$Y_1 =$	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\geq 0$ ,
$Y_2 =$	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	$= 0$ ,
$Y_3 =$	0	0	2	-2	-3	3	0	0	1	-1	$= 0$ ,
$Y_4 =$	0	0	1	-1	0	0	-3	3	2	-2	$= 0$ .

Структура исходных соотношений кинематического метода характерна тем, что в условия задачи входит лишь одно неравенство, остальные – равенства. Расчетную таблицу будем компоновать так. В первой строке запишем условие разрушения, во второй – связь перемещения с деформациями, далее – условия кинематической возможности. Первый столбец – столбец свободных членов, второй – параметра нагрузки, третий и далее – столбцы, содержащие  $\Delta \lambda_m$ . Отметим также:

- коэффициенты при  $\Delta \lambda_m$  в условии разрушения отрицательны;
- свободный член присутствует только во второй строке;
- параметр нагрузки входит с положительным коэффициентом только в условие разрушения.

Для решения задачи необходимо исключить ограничения-равенства переводом в левую часть таблицы соответствующих  $\Delta \lambda_m$  – сформировать механизм разрушения. Учитывая специфику структуры системы ограничений и ориентируясь на задачи теории предельного равновесия, в процессе преобразований будем руководствоваться следующими алгоритмом и рекомендациями:

1) Разрешающей может быть строка-равенство, которая при стоящих наверху таблицы  $\Delta\lambda_m = 0$  противоречит условию задачи;

2) Разрешающим может быть элемент, знак которого противоположен знаку свободного члена;

3) Разрешающим следует принимать элемент, у которого абсолютное значение его отношения к соответствующему коэффициенту первой строки наибольшее;

4) После выбора разрешающего элемента следует выполнить шаг жордановых преобразований таблицы;

5) Столбцы, содержащие переведенные вправо  $Y_j = 0$ , можно не записывать.

Действия, отвечающие последовательности 1) ... 5), следует вести до тех пор, пока не будут удовлетворены все условия задачи.

В результате выполненных преобразований сформируется окончательная таблица с характерной структурой первых двух столбцов.

В первом столбце

– останется лишь один отрицательный коэффициент первой строки;

– коэффициенты при переведенных влево  $\Delta\lambda_m$  будут положительными;

– коэффициенты при оставшихся слева  $Y_j$  (такое может быть при частичном механизме разрушения) – нулевые.

Во втором столбце останется единственный положительный коэффициент первой строки, остальные – нулевые.

Первая строка при оставшихся наверху таблицы  $\Delta\lambda_m = 0$  определяет разрушающую нагрузку.

20.3.2.4. Решим задачу (а), ... , (г) – табл. (д). Согласно описанному алгоритму меняем местами  $Y_2$  с  $\Delta\lambda_3$ .

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & F/(\sigma_{yl} A) & \Delta\lambda_1 & \Delta\lambda_2 & \Delta\lambda_4 & \Delta\lambda_5 & \Delta\lambda_6 & \Delta\lambda_7 & \Delta\lambda_8 \\
 Y_1 & = & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_3 & = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \geq 0, \\
 Y_3 & = & -3 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & = 0, \\
 Y_4 & = & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 3 & 2 & -2 & = 0.
 \end{array}
 \end{array}$$

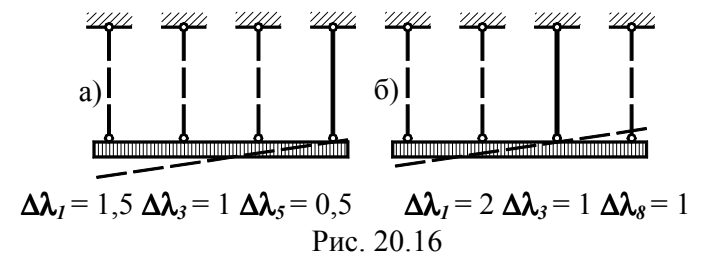
Затем  $Y_3$  с  $\Delta\lambda_1$ .

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & F/(\sigma_{yl} A) & \Delta\lambda_2 & \Delta\lambda_4 & \Delta\lambda_5 & \Delta\lambda_6 & \Delta\lambda_7 & \Delta\lambda_8 \\
 Y_1 & = & -2,5 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -0,5 & -1,5 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_1 & = & 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & \geq 0, \\
 Y_4 & = & 1,5 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 1,5 & -1,5 & = 0.
 \end{array}
 \end{array}$$

Далее  $Y_4$  с  $\Delta\lambda_5$ .

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & F/(\sigma_{yl} A) & \Delta\lambda_2 & \Delta\lambda_4 & \Delta\lambda_6 & \Delta\lambda_7 & \Delta\lambda_8 \\
 Y_1 & = & -3 & 1 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_1 & = & 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & \geq 0, \\
 \Delta\lambda_5 & = & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 & 0,5 & \geq 0.
 \end{array}
 \end{array}$$

Условия задачи выполнены. Минимальное значение  $F$ , удовлетворяющее первое неравенство  $F_u = 3\sigma_{yl} A$ . Механизм разрушения определяется последними тремя строчками:  $\Delta\lambda_1 = 1,5$ ;  $\Delta\lambda_3 = 1$ ;  $\Delta\lambda_5 = 0,5$ . Он изображен на рис. 20.16 а.



Отметим особенность приближенного решения задачи кинематическим методом. Если отказаться от поиска действительного механизма разрушения и задаться каким-либо из них, например, изображенным на рис. 20.16 б, в котором  $\Delta\lambda_1 = 2$ ,  $\Delta\lambda_3 = 1$ ,  $\Delta\lambda_8 = 1$ , то по табл. (д) имеем  $F_u = 4\sigma_{yl} A$  – больше действительного. Любое приближенное решение задачи кинематическим методом дает завышенное значение разрушающей нагрузки. Впрочем, это свойство отражено в самой формулировке теоремы.

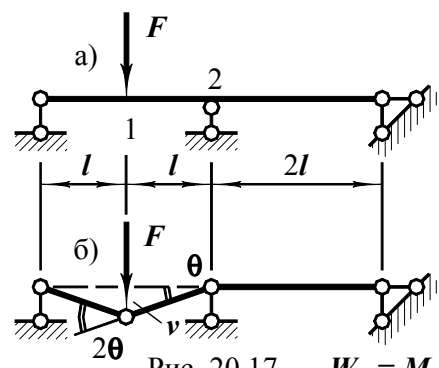
### 20.3.3. Примеры расчетов балок кинематическим методом при известных механизмах разрушения

Балки и плоские рамы превращаются в механизмы в результате достижения изгибающими моментами предельных величин в некоторых сечениях. Распределения напряжений в сечениях проиллюстрировано рис. 20.9 и 20.10. Поскольку под расчетными сопротивлениями подразумеваются пределы текучести, все волокна балок деформируются при постоянных напряжениях – текут. Происходит взаимный поворот частей балки, разделенных таким сечением. Появившаяся кинематическая свобода схожа с возможностью, предоставляемой шарнирной связью. Однако эта свобода появляется при достижении моментом предельной величины. В теории предельного равновесия такую кинематическую свободу называют **пластическим шарниром**. От обычной шарнирной связи он отличается двумя особенностями (рис. 20.8):

- изгибающий момент в нем равен предельному;
- пластический шарнир односторонний – при уменьшении момента он закрывается.

Рассмотрим простейшие примеры балок и нагрузок, при которых механизмы разрушения либо очевидны, либо устанавливаются несложным анализом.

20.3.3.1. На рис. 20.17 а изображена балка, рассчитанная выше статическим методом. Найдем разрушающее значение силы методом кинематическим.



Балка превратится в механизм (рис. 20.17 б), когда под силой (сеч. 1) и над средней опорой (сеч. 2) откроются пластические шарниры.

Работа силы  $W_{ext} = Fv$ .

Работа внутренних сил

$$W_{int} = M_u 2\theta + M_u \theta = 3M_u \theta.$$

Но  $\theta = v/l$ . Таким образом,  $W_{int} = 3M_u v/l$ . Из равенства работ  $W_{ext} = W_{int} = Fv = 3M_u v/l$  находим  $F_u = 3M_u/l$ , что совпадает с полученным ранее статическим методом.

20.3.3.2. В предыдущем примере механизм разрушения был очевиден. Решение задачи предельного равновесия оказалось несложным. В некоторых расчетных схемах механизм качественно ясен, но требует дополнительного анализа. Для иллюстрации сказанного рассмотрим балку, изображенную на рис. 20.18 а.

Балка разрушится в результате образования пластических шарниров в пролете и на правом конце (рис. 20.18 б).

$$W_{ext} = \int_0^l qvdz = q \int_0^l ydz = 0,5ql\delta.$$

Углы поворота в механизме  $\theta_0 = \delta/z$ ,  $\theta_2 = \delta/(l-z)$ ,  $\theta_1 = \theta_0 + \theta_2 = \delta(1/z + 1/(l-z))$ . Работа внутренних сил

$$W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_2) = M_u\delta(1/z + 2/(l-z)).$$

Условие предельного равновесия  $W_{ext} = W_{int}$  принимает вид  $0,5ql\delta = M_u\delta(1/z + 2/(l-z))$ , откуда  $q = 2M_u(1/z + 2/(l-z))/l$ . Место образования пролетного шарнира найдем из условия минимума разрушающей нагрузки  $dq/dz = 0$ , или  $2/(l-z)^2 - 1/z^2 = 0$ , что приводит к уравнению  $z^2 + 2lz - l^2 = 0$ , положительный корень которого  $z = 0,414l$ . Разрушающая нагрузка, соответствующая ему,  $q_u = 11,657 M_u/l^2$ . Она совпадает с найденной статическим методом.

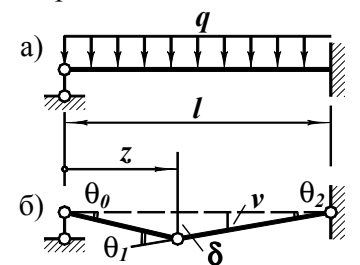


Рис. 20.18

### 20.3.4. Пример расчета плоской рамы перебором возможных механизмов разрушения

Расчетные схемы, в которых механизмы разрушения очевидны или легко определяются, встречаются редко. Чаще приходится рассматривать несколько, а то и все возможные механизмы. Проиллюстрируем сказанное примером.

Найдем параметр нагрузки, разрушающей плоскую раму, изображенную на рис. 20.19.

Возможные механизмы разрушения изображены на рис. 20.20 а, б, в. Найдем разрушающую нагрузку, соответствующую каждому из них.

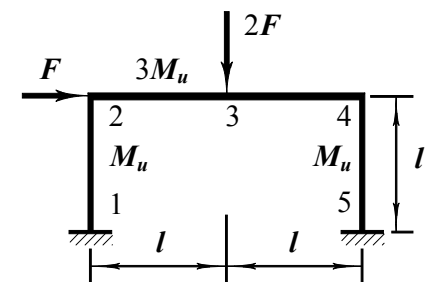


Рис. 20.19

Первый механизм (рис. 20.20 а).

Работа внешней нагрузки  $W_{ext} = F \delta_2$ .

Углы поворота в пластических шарнирах  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = \delta_2/l$ .

Работа внутренних сил  $W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5) = 4M_u \delta_2/l$ . Из равенства работ следует  $F_u^1 = 4M_u/l$ .

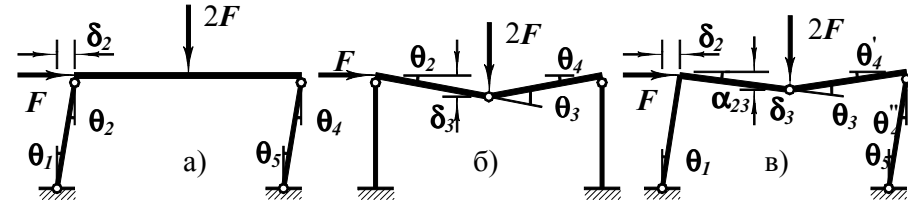


Рис. 20.20

Второй механизм (рис. 20.20 б).

Работа внешней нагрузки  $W_{ext} = 2F \delta_3$ .

Углы поворота в пластических шарнирах  $\theta_3 = \theta_2 + \theta_4$ ;  $\theta_2 = \theta_4 = \delta_3/l$ .

Работа внутренних сил  $W_{int} = M_u(\theta_2 + \theta_4) + 3M_u \theta_3 = 8M_u \delta_3/l$ . Приравнявая работы, находим  $F_u^2 = 4M_u/l$ .

Третий механизм (рис. 20.20 в).

Работа внешней нагрузки  $W_{ext} = F \delta_2 + 2F \delta_3$ . Но  $\delta_2 = \delta_3$ . Таким образом,  $W_{ext} = 3F \delta_3$ .

Углы поворота в шарнирах:  $\theta_1 = \theta_4'' = \theta_5 = \delta_2/l = \delta_3/l$ ;  $\alpha_{23} = \theta_4' = \delta_3/l$ ;  $\theta_3 = \alpha_{23} + \theta_4' = 2\delta_3/l$ . Внутренние силы в рассматриваемом механизме разрушения совершают работу

$$W_{int} = M_u(\theta_1 + \theta_4' + \theta_4'' + \theta_5) + 3M_u \theta_3 = 10M_u \delta_3/l.$$

Из равенства работ  $F_u^3 = 3,33M_u/l$ . Минимальное значение – треть:  $F_u = 3,33M_u/l$ .

В рассмотренной расчетной схеме число возможных механизмов разрушения – три. Расчет оказался несложным. Однако с ростом степени статической неопределимости конструкции и количества сил, действующих на нее, число возможных механизмов быстро растет и проиллюстрированный перебор всех вариантов разрушения становится чрезмерно громоздким. В таких условиях необходим формализованный метод формирования расчетных условий и алгоритм вычисления разрушающей нагрузки.

### 20.3.5. Система условий задачи кинематического метода расчета балок и плоских рам

Остановимся на процедуре формирования расчетных соотношений для балок и плоских рам. Система ограничений задачи включает:

- условия совместности приращений пластических деформаций (кинематической возможности);
- выражений перемещений точек приложения сил через пластические деформации;
- условия разрушения.

20.3.5.1. Порядок формирования условий кинематической возможности приращений пластических деформаций:

- 1) Выбирают основную систему метода сил и строят эпюры моментов от единичных реакций избыточных связей.
- 2) Назначают конкретные сечения, в которых могут открыться пластические шарниры с углами поворота  $\theta_i$ .
- 3) Записывают условия совместности пластических деформаций

$$\sum_I^{j^+} M_{ij}^{(I)} \theta_i = 0. \quad (а)$$

В нем:  $j$  – номер избыточной связи;  $i$  – номер сечения с пластическим шарниром;  $M_{ij}^{(I)}$  – изгибающий момент в  $i$ -м сечении от  $X_j = 1$ ;  $i^+$  – общее число сечений;  $j^+$  – степень статической неопределимости конструкции. Равенства (а) справедливы и для приращений углов поворота  $\Delta\theta_i$ :  $\sum_I^{j^+} M_{ij}^{(I)} \Delta\theta_i = 0$ .

Так как знаки  $\Delta\theta_i$  могут быть любыми, вводят разности

$$\Delta\theta_i = \Delta\lambda_{2i-1} - \Delta\lambda_{2i} \text{ при } \Delta\lambda_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, 2i^+). \quad (б)$$

После этого условия кинематической возможности принимают вид

$$\sum_I^{j^+} M_{ij}^{(I)} (\Delta\lambda_{2i-1} - \Delta\lambda_{2i}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, j^+). \quad (20.29)$$

Равенства (20.29) описывают все возможные механизмы разрушения.

20.3.5.2. Условие разрушения запишем в виде  $W_{ext} \geq W_{int}$ :

$$\sum_I^{k^+} F_{uk} \delta_k \geq \sum_I^{i^+} M_{ui} (\Delta\lambda_{2i-1} + \Delta\lambda_{2i}), \quad (в)$$

где  $F_{uk}$  – разрушающее значение  $k$ -й силы;  $\delta_k$  – перемещение точки приложения силы  $F_k$  в механизме разрушения;  $M_{ui}$  – предельный момент  $i$ -го сечения. В состоянии предельного равновесия условие (в) превращается в равенство.

Выразим все внешние силы через один параметр:  $F_k = H_k F$ , где  $H_k$  – числовой коэффициент. После этого условие (в) принимает вид

$$F \sum_I^{k^+} H_k \delta_k \geq \sum_I^{i^+} M_{ui} (\Delta\lambda_{2i-1} + \Delta\lambda_{2i}). \quad (г)$$

С другой стороны, на основании теоремы виртуальных работ

$$\delta_k = \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} \Delta\theta_i \quad (k = 1, 2, \dots, k^+). \quad (д)$$

Здесь  $M_{ik}^{(I)}$  – изгибающий момент в заданной статически неопределимой конструкции от  $F_k = 1$ . Умножив равенство (д) на соответствующие  $H_k$  и просуммировав, получаем

$$\sum_I^{k^+} H_k \delta_k = \sum_I^{k^+} H_k \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} \Delta\theta_i. \quad (е)$$

Поскольку длина пути, на которой сравниваются работы постоянных сил, не имеет значения, величины  $\delta_k$  не влияют на условие разрушения. Их можно подобрать так, чтобы  $\sum_I^{k^+} H_k \delta_k = l$ , где  $l$  – некоторый геометрический параметр, имеющий размерность длины. Учитывая введенный масштаб, запишем условие разрушения (г) в виде

$$Fl \geq \sum_I^{i^+} M_{ui} (\Delta\lambda_{2i-1} + \Delta\lambda_{2i}). \quad (20.30)$$

В связь перемещений с приращениями пластических деформаций (е) введем индексы текучести (б) и получим равенство

$$l - \sum_I^{k^+} H_k \sum_I^{i^+} M_{ik}^{(I)} (\Delta\lambda_{2i-1} - \Delta\lambda_{2i}) = 0. \quad (20.31)$$

Система ограничений задачи состоит из  $j^+ + 2$  выражений:  $j^+$  условий совместности (20.29), равенства (20.31) и неравенства (20.30) при  $\Delta\lambda_m \geq 0$  и  $F > 0$ . Требуется найти  $\min F$ .

### 20.3.6. Пример расчета балки по формализованному алгоритму

Не всегда можно указать действительный механизм разрушения, перебирать все – громоздко. Нужен формализованный алгоритм расчета. Проиллюстрируем алгоритм, описанный в разд. 20.3.2, примером. Найдем силу  $F_u$ , разрушающую балку (рис. 20.21 а).

В соответствии с описанной последовательностью составления условий задачи выбираем основную систему метода сил (рис. 20.21 б). Эпюра моментов от единичной силы приведена на рис. 20.21 в. Появление пластических шарниров возможно в сечениях 1 и 2. Условие кинематической совместности приращений углов поворота в шарнирах (20.29) имеет вид

$$l(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2) + 2l(\Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_4) = 0. \quad (а)$$

Условие разрушения (20.30) –

$$F_u l \geq M_u (\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \Delta\lambda_3 + \Delta\lambda_4). \quad (б)$$

Для связи перемещения точки 1 с пластическими деформациями построим эпюру изгибающих моментов от  $F = 1$  (рис. 20.21 г, д). Согласно равенству (20.31) имеем

$$l - 0,406l(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2) + 0,188l(\Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_4) = 0. \quad \text{Рис. 20.21} \quad (в)$$

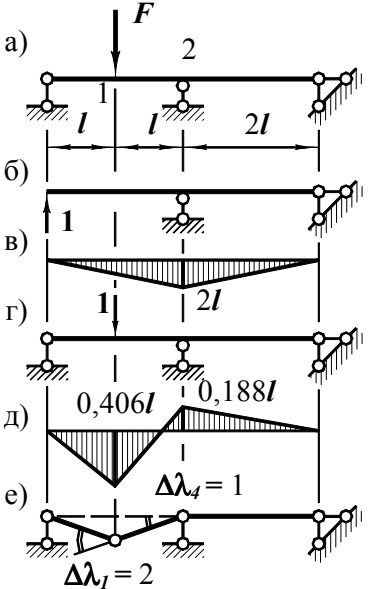
Решим задачу (а), (б), (в). Сведем условия в таблицу.

Действуя	1	$F_u l / M_u$	$\Delta\lambda_1$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$	$\Delta\lambda_4$	
по алгоритму, описанному в п. 20.3.2.3, последовательно	$Y_1 = 0$	1	-1	-1	-1	-1	$\geq 0$
	$Y_2 = 1$	0	-0,406	0,406	0,188	-0,188	$= 0$
	$Y_3 = 0$	0	1	-1	2	-2	$= 0$

получаем:

При $F_u l / M_u = 3$ , условия выполнены.	1	$F_u l / M_u$	$\Delta\lambda_2$	$\Delta\lambda_3$	$\Delta\lambda_4$	
$Y_1 =$	-2,462	1	-2	-1,462	-0,538	$\geq 0$
$\Delta\lambda_1 =$	2,462	0	1	0,462	-0,462	$\geq 0$
$Y_3 =$	2,462	0	0	2,462	-2,462	$= 0$

Так как коэффициенты при  $\Delta\lambda_2$  и  $\Delta\lambda_3$  в первой строке отрицательны,  $F_u = 3M_u/l$ . Это совпадает с найденными выше значениями. Механизм разрушения описывается равенством  $\Delta\lambda_4 = 1$ ,  $\Delta\lambda_1 = 2$  (рис. 20.21 е).



### 20.3.7. Пример расчета железобетонной плиты

Теория предельного равновесия применяется при расчетах железобетонных конструкций – балок, рам и плит. С целью иллюстрации практического приложения кинематического метода приведем пример оценки несущей способности железобетонной плиты.

Железобетонная плита, защемленная по периметру, подвержена равномерному давлению  $p$  по всей поверхности (рис. 20.22).

Исходные данные:

- размер  $l = 2$  м;
- армирование – две сетки с ячейкой  $b \times b = 10 \times 10$  см,
- диаметр проволоки сеток  $d = 5$  мм;
- толщина плиты  $h = 16$  см,
- рабочая высота сечения  $h_0 = 13$  см;
- расчетное сопротивление бетона  $R_{cnc} = 8$  МПа, арматуры  $R_{st} = 300$  МПа.

Определим давление, разрушающее плиту.

В нормативной литературе по расчету железобетонных плит для подобных схем рекомендуют принимать механизм разрушения, в котором девять цилиндрических пластических шарниров:

- по периметру 1–2, 2–6, 5–6 и 1–5;
- наклонные 1–3, 2–3, 4–5 и 4–6;
- посередине плиты 3–4.

Работа давления на перемещениях механизма  $W_{ext} = pV_w$ , где  $V_w$  – объем эпюры прогибов. Представив ее двумя пирамидами с основаниями  $2l \times l$ , высотами  $\delta$ , и трехгранной призмой с ребром 3–4, находим  $W_{ext} = p(2 \cdot 2l \cdot l \cdot \delta / 3 + 2l \cdot l \cdot \delta / 2) = 2,33 p \delta l^2$ .

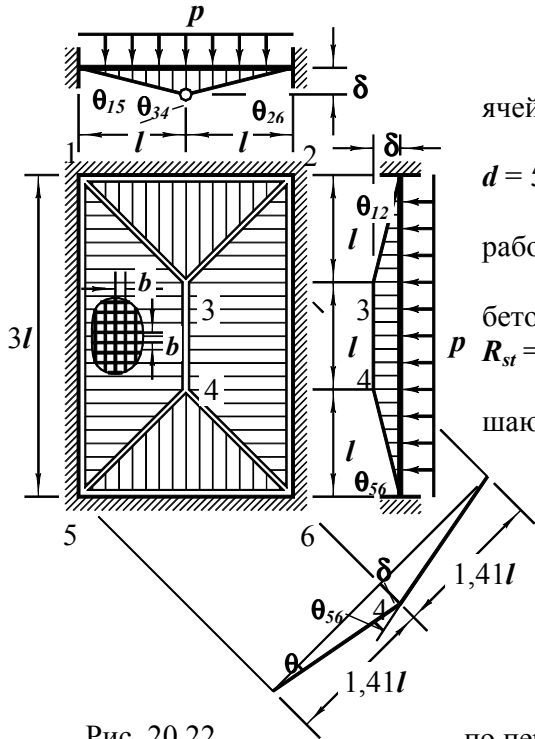


Рис. 20.22

Найдем предельные моменты в пластических шарнирах.

Рассмотрим, например, шарнир 1–5 (рис. 20.23). Отсутствие продольной силы дает равенство  $R_{cnc} b y_0 = R_{st} A_{st}$ . Учитывая, что  $A_{st} = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 0,5^2 / 4 = 0,196$  см<sup>2</sup>, находим высоту сжатой зоны бетона в шарнире  $y_0 = R_{st} A_{st} / (R_{cnc} b) = 30 \cdot 0,196 / (0,8 \cdot 10) = 0,74$  см. Предельный момент  $M_u = R_{st} A_{st} (h_0 - y_0 / 2) / b = 30 \cdot 0,196 (13 - 0,74 / 2) / 10 = 7,43$  кН.

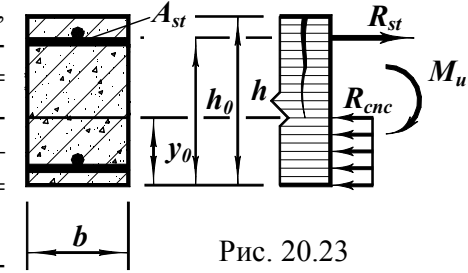


Рис. 20.23

В наклонных шарнирах арматурные стержни наклонены к сечению под 45° (рис. 20.24). Рассмотрим отрезок, обслуживаемый парой стержней сетки. Из равенства растягивающей и сжимающей сил

$R_{cnc} 1,41 b y_0 = R_{st} A_{st} 0,707 \cdot 2$ , находим  $y_0 = R_{st} A_{st} / (R_{cnc} b) = 0,74$  см. Предельный момент в шарнире  $M_u = 2 R_{st} A_{st} 0,707 (h_0 - y_0 / 2) / (1,41 b) = R_{st} A_{st} (h_0 - y_0 / 2) / b = 7,43$  кН.

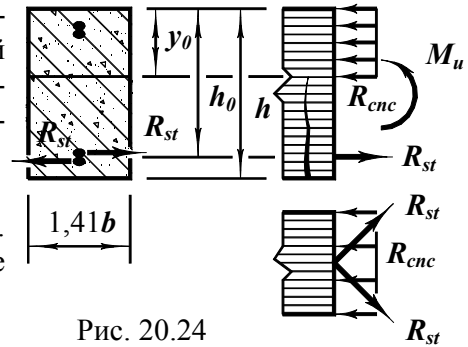


Рис. 20.24

Равенство предельных моментов во всех шарнирах – следствие одинакового армирования плиты в обоих направлениях.

Углы поворотов  $\theta$  в пластических шарнирах и параметр механизма  $\delta$  связаны так (рис. 20.22):

$$\theta_{12} = \theta_{56} = \delta / l; \quad \theta_{34} = 2\delta / l;$$

$$\theta_{13} = \theta_{23} = \theta_{45} = \theta_{46} = 2\delta / (1,41l) = 1,41\delta / l; \quad \theta_{15} = \theta_{26} = \delta / l.$$

Работа внутренних сил  $W_{int} = M_u (2\theta_{12} 2l + 2\theta_{15} 3l + 4\theta_{13} 1,41l + \theta_{34} l)$ . Выразив углы поворота через параметр механизма, получаем  $W_{int} = 20 M_u \delta$ . По равенству  $W_{ext} = W_{int}$  находим  $p_u = 8,57 M_u / l^2 = 8,57 \cdot 7,43 / 2^2 = 15,9$  кН/м<sup>2</sup>. Этот результат больше действительного, так как истинный механизм разрушения не известен.

В заключении к разделу, посвященному кинематическому методу, отметим и его достоинство – наглядность, и недостаток – отклонения приближенных решений не в запас прочности.



---

## 20.4. Заключение к разделу

Статический и кинематический методы можно рассматривать как методы альтернативные. Первый из них опирается на условия, при которых конструкция сохраняет способность воспринимать нагрузку, второй – на условия разрушения. Это различие отразилось и в соотношении нагрузок, удовлетворяющих соответствующим теоремам. Любая нагрузка, отвечающая требованиям статической теоремы, не может быть больше разрушающей. И наоборот, силы, при которых согласно кинематической теореме обязательно произойдет разрушение, естественно, не менее предельных. Действительная разрушающая нагрузка – наибольшая по статическому критерию и наименьшая по кинематическому.

Все рассмотренные методы позволяют решить задачу о несущей способности конструкции при однократном монотонном (однопараметрическом) нагружении. В этом их сходство. В то же время статический и кинематический подходы не дают полной информации об остаточных напряжениях, деформациях и перемещениях в конструкции. Расчет же кинетики деформирования предоставляет больше сведений о напряженно-деформированном состоянии. В этом его отличие и в известной мере достоинство.

Линеаризация всех расчетных соотношений позволила решать задачи методами линейной алгебры. Внутри этого раздела математики статический и кинематический методы приводят задачам линейного программирования. Методом, опирающимся одновременно и на статический, и на кинематический критерии, является расчет кинетики деформирования в процессе монотонного роста параметра нагрузки (подобный описанному в разд. 20.1.2). Он приводит к решению систем неравенств в последовательности, опирающегося на физическую основу. При этом расчет воспроизводит историю изменения всех характеристик напряженно-деформированного состояния – напряжений, деформаций и перемещений. Правда, размерность задачи, определяемая числом переменных, в последнем методе выше. Это – “плата” за большой объем получаемой информации.

---

## Заключение к курсу

В процессе изучения курса сопротивления материалов студент познакомится со многими новыми понятиями, явлениями, методами экспериментального и теоретического анализа. Так, содержанием учебника охвачены:

- Объекты: стержневые элементы, изгибаемые пластинки, пластинки, нагруженные в своей плоскости, оболочки.
- Виды расчетов: прочность, жесткость, устойчивость.
- Воздействия: статические, динамические.
- Методы анализа: экспериментальные и теоретические.
- Критерии прочности: напряжение в опасной точке, несущая способность конструкции.
- Виды напряженных состояний: простые (одноосные растяжение и сжатие, чистый сдвиг), сложные.
- Критерии теоретического прогнозирования напряженно-деформированного состояния конструкции: статико-геометрические, энергетические.
- Методическоеобразие формирования технических теорий расчетов различных конструкций: выбор исходных предпосылок, составление системы разрешающих уравнений, преобразование системы к виду, удобному для использования.
- Обычный состав разрешающей системы уравнений: статические, геометрические, физические.
- Математические методы решения задач: точные (методы линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений, интегрирования в квадратурах и т.п.), приближенные (численные).

Решения одних задач доведены до формул, включенных в нормы, для других приведены методы решения, третьих обозначены направления возможного анализа. Формулы и методы сопротивления материалов применяются и развиваются в спецдисциплинах.

## Приложения

### 1. Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8509-72\* (СТ СЭВ 104-74)

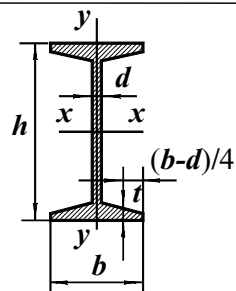


Таблица 1  
Двутавры

№ про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния см <sup>2</sup>	Справочные величины						
	h	b	d	t		J <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	S <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	i <sub>y</sub>
	мм					см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

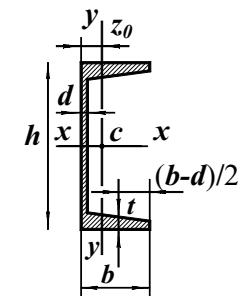


Таблица 2  
Швеллеры

№ про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния см <sup>2</sup>	Справочные величины							
	h	b	d	t		J <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	S <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	i <sub>y</sub>	z <sub>0</sub>
	мм					см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

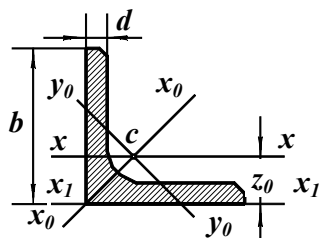


Таблица 3  
Уголки равнобокие

№ про- фи- ля	Размеры		Пло- щад ь сече- ния	Справочные величины								
	<i>b</i>	<i>d</i>		$J_x$	$i_x$	$J_{x_0}$ <i>max</i>	$i_{x_0}$ <i>max</i>	$J_{y_0}$ <i>min</i>	$i_{y_0}$ <i>min</i>	$J_{x_I}$	$z_0$	
	мм	мм		см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4	1,46	0,50	0,58	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64		
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,54	1,90	0,79	8,53	1,13	
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,52	2,30	0,78	10,7	1,17	
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	
		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	
		8	11,8	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	
		8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	

№ про- фи- ля	Размеры		Пло- щад ь сече- ния	Справочные величины							
	<i>b</i>	<i>d</i>		$J_x$	$i_x$	$J_{x_0}$ <i>max</i>	$i_{x_0}$ <i>max</i>	$J_{y_0}$ <i>min</i>	$i_{y_0}$ <i>min</i>	$J_{x_I}$	$z_0$
	мм	мм		см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		16	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
18	180	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	220	30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
25	250	30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

## 2. Нормативные и расчетные сопротивления некоторых строительных материалов (МПа)

Таблица 4  
2.1. Сталь

Марка стали	Вид деформации			
	Растяжение, сжатие		Сдвиг	
	Норм. сопр. $R_{yn}$	Расч. сопр. $R$	Норм. сопр. $R_{ns}$	Расч. сопр. $R_s$
18 кп	225	220	130	125
18 пс	235	230	135	130
09Г2	315	305	185	180
09Г2С	345	335	200	190
10Г2С1	355	340	205	195
14Г2	335	320	195	185
15ХСНД	345	330	200	190
10ХНДП	345	330	200	190
10ХСНД	390	355	225	205
15Г2СФ	440	400	255	230

Таблица 5  
2.2. Чугун

Марка чугуна	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{nc}$	Расч. сопр. $R_c$
СЧ 15	100	55	220	160
СЧ 20	120	65	275	200
СЧ 25	155	85	315	230
СЧ 30	180	100	340	250

Таблица 6  
2.3. Бетон

Класс бетона	Вид деформации			
	Растяжение		Сжатие	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{nc}$	Расч. сопр. $R_c$
В15	1,15	0,75	11,0	8,5
В20	1,40	0,95	15,0	11,5
В25	1,60	1,05	18,5	14,5
В30	1,80	1,20	22,0	17,0

Таблица 7  
2.4. Древесина

Порода древесины	Вид деформации			
	Растяжение вдоль волокон		Сжатие вдоль волокон	
	Норм. сопр. $R_{nt}$	Расч. сопр. $R_t$	Норм. сопр. $R_{nc}$	Расч. сопр. $R_c$
Сосна, ель	18,5	8,0	30	13,0
Кедр	16,5	7,2	27	11,7
Пихта	14,8	6,4	24	10,4
Дуб	24,0	10,4	39	16,9

### 3. Модули упругости (МПа)

Стали:  $E = 2 \cdot 10^5$ ;  $G = 8 \cdot 10^4$ . Бетон  $E = 2 \cdot 10^4$ . Древесина  $E = 10^4$ .

Таблицы составлены в соответствии с нормативными документами:

– Бетонные и железобетонные конструкции: СНиП 2.03.01–84\*.–М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989.

– Стальные конструкции. Нормы проектирования: СНиП П–23–81\*.–М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988.

– Деревянные конструкции. Нормы проектирования: СНиП П–25–80.–М.: Стройиздат, 1982.

В таблицах не отражены многие специфические требования к конструкциям из указанных материалов. Они излагаются в профилирующих дисциплинах.

Владимир Андреевич Икрин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
С ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
И ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебник для студентов,  
обучающихся по направлению 653500 – “Строительство”

Техн. редактор *П.П.Петров*

Издательство Ассоциации строительных вузов

---

ИД № 00200 от 28.09.99. Подписано в печать 12.09.2001. Формат  
60×84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,8. Уч.-изд. л. 25,77. Ти-  
раж 1000 экз. Заказ 234/170.

---

Издательство АСВ. 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26, к. 705.

---

---