

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра строительной механики**

**539.3/.6(07)
С 23**

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.
РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК**

Методические указания и
контрольное задание по основам теории упругости

Челябинск
2010

УДК 539.3(075.8)
С23

*Одобрено
учебно-методической комиссией
архитектурно-строительного факультета*

Рецензент О.С. Садаков

Плоская задача теории упругости. Расчет пластинок: контрольное задание по основам теории упругости для студентов-заочников специальностей ПГС и АДиА /сост. В.Ф. Сбитнев. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2010. – 14 с.

В работе приведено контрольное задание и общие методические указания к выполнению домашней расчетно-графической контрольной работы (3-я часть дисциплины Сопротивление материалов), включающую в себя плоскую задачу теории упругости и расчет круглых и прямоугольных пластинок. Дан перечень тем, литература и задачи, рекомендованные для самостоятельного решения.

При подготовке настоящих методических указаний использована "Рабочая программа и контрольная работа по основам теории упругости и пластичности" (методические указания для студентов-заочников специальности ПГС), изданных в ЧПИ в 1994 г.

Работа предназначена для студентов-заочников 4-го курса специальностей " Промышленное и гражданское строительство" и "Автомобильные дороги и аэродромы".

УДК 539.3(075.8)

© Издательство ЮУрГУ. 2010

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Курс "Основы теории упругости и пластичности", который изучается в 7-м семестре, является составной частью дисциплины "Сопротивление материалов" и на его изучение отводится учебным планом 80 часов. Он изучается студентом-заочником самостоятельно по учебникам и учебным пособиям после изучения дисциплины в 5-м и 6-м семестрах.

По основным разделам курса в начале семестра для студентов-заочников читается курс установочных лекций (8 часов) и проводятся практические занятия (6 часов).

В течение семестра на кафедре Строительной механики организуются консультации по теории и решению задач по расписанию, согласованному с деканатом инженерно-экономического заочного факультета, преподавателями, работающими на факультете.

Освоение курса "Основы теории упругости и пластичности" должно сопровождаться составлением конспекта, решением задач, указанных в рекомендованной литературе. Если при решении задач возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в рекомендованной литературе указаниями и решениями.

Обязательно следует научиться решать задачи самостоятельно.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений, обратив особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на ограничения и допущения, которые принимаются в процессе вывода формул.

Каждый студент-заочник по важнейшим разделам курса выполняет одну контрольную работу, состоящую из 4-х задач по следующим темам:

- 1) основные уравнения теории упругости (2 задачи);
- 2) изгиб пластинок (2 задачи).

Необходимо иметь в виду, что самостоятельное выполнение контрольной работы имеет первостепенное значение для усвоения дисциплины.

Выполненную контрольную работу студент высылает по почте (приносит и сдаёт) в университет (в методический кабинет заочного факультета) с тем, чтобы указания, ошибки и замечания преподавателя по работе, появившиеся во время проверки, своевременно учесть, исправить ошибки и составить дополнения к работе. Срок предоставления работы должен соответствовать учебному графику работы студента в семестре, но не позднее начала сессии. Если контрольная работа будет прислана позднее указанного срока, то преподаватель не сможет своевременно проверить её и студент не будет допущен к экзамену. Поэтому не следует откладывать выполнение контрольной работы на конец семестра.

В конце семестра, во время сессии по дисциплине студент сдает экзамен. Для допуска к экзамену студенту необходимо правильно выполнить домашнюю расчетно-графическую (контрольную) работу и защитить её, показав хорошие знания и умение самостоятельно решать задачи по разделам курса.

Экзаменационный билет включает в себя теоретический вопрос из программы курса и одну задачу.

На экзамен студент должен явиться с выполненной и зачтенной контрольной работой и рецензией, положительно оценивающей выполненную работу; во время экзамена студент должен показать усвоение основных понятий, умение решать задачи, знание выводов основных формул.

Ниже приводится перечень рекомендованной литературы и рабочая программа по темам. В предлагаемой литературе освещены все вопросы рабочей программы.

В конце каждой темы даны ссылки на учебную литературу с указанием глав и параграфов, в которых затронуты и подробно освещены вопросы по теме.

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. Введение

Теория упругости и пластичности. Её задачи и методы. Связь теории упругости и пластичности с другими дисциплинами расчетно-теоретического цикла. Исторический очерк развития дисциплины. Математическая и прикладная теории упругости и пластичности. Основные гипотезы и допущения, принимаемые в теории упругости и пластичности. Принцип Сен-Венана.

Учебники: [1, гл.1]; [2, введение, §5.9]; [3, введение]; [5, введение, § 2.8]; [9, введение].

2. Основные уравнения теории упругости

Три группы основных уравнений.

Теория напряжений. Понятие о напряжениях. Обозначения компонент напряжений. Правило знаков. Дифференциальные уравнения равновесия твердого тела – уравнения Навье. Статические условия на поверхности тела.

Геометрические уравнения. Понятие о перемещениях и деформациях. Обозначение компонентов перемещения и деформаций. Правило знаков. Дифференциальные зависимости между компонентами деформаций и перемещений – соотношения Коши. Уравнения неразрывности деформаций – уравнения Сен-Венана. Механический и энергетический смысл уравнений неразрывности деформаций.

Физические уравнения. Обобщенный закон Гука. Различные выражения обобщенного закона Гука. Потенциальная энергия деформации; удельная потенциальная энергия деформации.

Основные уравнения теории упругости. Постановка задачи в теории упругости и пластичности. Методы решения уравнений. Теорема о единственности решения.

Учебники: [1, гл.2, §2.01-2.13; гл.3, §3.02-3.10; гл.4, §4.01-4.04]; [2, гл.1, §1.1-1.5; гл.2, §2.1-2.3; гл.3, §3.1-3.3; гл.4, §4.1-4.4; гл.5, §5.5; гл.11, §11.2, 11.13]; [3, §4-12]; [5, гл.2, §2.1-2.7]; [9, §2-9].

3. Плоская задача теории упругости в прямоугольных координатах

Плоское напряженное состояние. Плоская деформация. Основные уравнения плоской задачи. Разрешающее уравнение в напряжениях. Функция напряжений

Эри. Граничные условия. Бигармоническое уравнение плоской задачи. Частные случаи функции напряжений.

Примеры использования функции напряжений в полиномах. Простейшие задачи, решаемые в полиномах: растяжение, сдвиг, изгиб; изгиб консоли; изгиб балки на двух опорах; расчет треугольной подпорной стенки.

Решение плоской задачи с помощью одинарных тригонометрических рядов. Численные методы решения задач теории упругости (понятие о методе конечных разностей и методе конечного элемента).

Учебники: [1, гл.8, §8.01-8.07; гл.11, §11.01-11.05; 11.13]; [2, гл.5, §5.1-5.9]; [3, §13-26]; [4, гл.4, §4,11-4.13]; [9, §10-16].

4. Плоская задача теории упругости в полярных координатах

Обозначения компонентов перемещения, деформаций и напряжений в полярных координатах. Статические уравнения. Геометрические соотношения. Физические уравнения. Уравнения неразрывности деформаций. Бигармоническое уравнение в полярных координатах.

Задачи теории упругости в полярных координатах: расчет толстостенной трубы (задача Ляме); чистый изгиб кривого бруса (задача К.С. Головина) сжатие и изгиб бесконечного клина; действие силы на полуплоскость; изгиб прямоугольных, треугольных и трапециевидных плотин.

Учебники: [1, гл.9, §9.01-9.05; гл.11, §11.06-11.11; гл.12, §12.05]; [2, гл.6, §6.1-6.13]; [3, §29-37]; [4, гл.4, §4.11-4.13]; [9, §17-21].

5. Изгиб прямоугольных пластинок

Прикладная теория упругости. Классификация пластинок. Основные определения, понятия и гипотезы, принятые в технической теории тонких и жестких пластинок. Перемещения, деформации и напряжения в пластинке, выраженные через уравнение прогибов. Усилия в пластинке. Выражение усилий через прогибы пластинки. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки. Условия на контуре пластинки (граничные условия) для различных случаев опирания.

Простейшие задачи изгиба прямоугольных пластинок: чистый изгиб пластинки; цилиндрический изгиб пластинки; эллиптическая пластинка, защемлённая по контуру.

Расчет пластинок в двойных тригонометрических рядах (решение Навье) и в одинарных тригонометрических рядах (решение М. Леви).

Учебники: [1, гл.1, §5.01-5.10]; [2, гл.7, §7.1-7.10]; [5, гл.6, §6.1-6.10]; [7]; [9, §22-29].

6. Изгиб круглых осесимметричных пластинок

Обозначение усилий, напряжений, перемещений и деформаций. Использование симметрии. Осесимметричная деформация. Выражение напряжений, усилий, перемещений и деформаций через прогиб пластинки. Уравнение равновесия. Разрешающее уравнение изогнутой поверхности пластинки. Интеграл разрешающего уравнения; различные формы его записи и применения. Граничные условия для различных случаев опирания пластинки по контуру. Частное решение.

Простейшие задачи: чистый изгиб сплошной круглой пластинки; сплошная круглая пластинка под действием разных нагрузок (равномерно распределённой нагрузки, сосредоточенной силы и т.д.) с различными условиями опирания по контуру (защемленный, свободный и шарнирно опертый край пластинки).

Кольцевая пластинка с различными условиями закрепления по контуру и с различными нагрузками. Пластинки с жёстким центром и с подвижной заделкой.

Учебники: [1, гл.15, §15.12-15.13]; [2, гл.7, §7.12-7.13]; [5, гл.6, §6.14-6.15]; [7]; [11, §65, 66].

7. Расчет оболочек вращения по безмоментной теории

Классификация оболочек. Оболочки вращения. Основные понятия и допущения, принимаемые в технической теории расчета тонких оболочек. Понятие о краевом эффекте. Моментное и безмоментное состояния.

Расчет оболочек вращения на осесимметричную нагрузку по безмоментной теории. Условия безмоментной работы оболочек. Разрешающие уравнения: уравнение Лапласа и уравнение зоны. Теоремы об определении равнодействующей от газового давления и давления жидкости.

Простейшие задачи: шар под действием газового давления; коническая оболочка, нагруженная жидкостью; полусфера под действием собственного веса.

Учебники: [2, гл.10, §10.1-10.3]; [5, гл.7, §7.1-7.2; 7.10]; [7]; [8]; [11, §64].

8. Основы теории пластичности

Основные определения и понятия. Две задачи теории пластичности. Активная и пассивная деформации. Простое и сложное нагружение. Теорема о разгрузке. Уравнения теории напряжений и деформаций для задач теории пластичности. Условие пластичности. Теория малых упруго-пластических деформаций. Постановка задачи теории пластичности.

Плоская задача идеально пластического материала. Простейшие задачи теории пластичности: кручение стержня круглого сечения; чистый изгиб прямого бруса; пластическое равновесие толстостенного кольца и сферического сосуда под газовым давлением.

Понятие о расчетах по несущей способности. Несущая способность пластинок в том числе и полигональных.

Учебники: [1, гл.1, §5.01-5.05; гл.17, §17.01-17.05; гл.18, §18.01; 18.03-18.05; 18.07; 18.11]; [2, гл.11, §11.1-11.8; гл.12, §12.1-12.3]; [5, гл.10, §10.1-10.7; 10.12-10.13; 10.18-10.19]; [10].

3. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Домашнее расчетно-графическое задание (контрольная работа) следует выполнять лишь после того, как полностью изучен соответствующий материал курса, т.е. проработано содержание параграфов, относящихся к теме, решены самостоятельно рекомендованные задачи.

1. Исходные данные для задач, включенных в контрольную работу, принимаются согласно варианту из таблиц. Вариант составляется из последних трёх цифр (личный номер) зачетной книжки студента. Например, если зачетная

книжка имеет шифр 04-185, то вариантом будет число 5185. Для получения варианта нужно личный номер повторить дважды (185185) и взять четыре последние цифры. Причем, в данном случае 5 – первая цифра варианта, 1 – вторая, 8 – третья и 5 – четвертая.

2. Цифра варианта показывает, какую строку следует взять из столбца таблицы, с порядковым номером, соответствующим этой цифре варианта. Например, при варианте 5185 для задачи №1 студент должен взять следующие данные: $l = 1,6$ м; $h/l = 0,8$; $a = 2,8$ и $b = 1,8$; стороны полосы: 2-3 и 0-3; $\varphi = a \cdot (x^3 y^2 - xy^4) + vx^2 y$. Аналогично выбираются данные других задач.

Если личный номер зачетки состоит из четырех и более цифр (например, 04-71084), то вариантом будет число – 4084, т.е. вариант организуется только из последних трёх цифр личного номера студента.

3. Прежде чем приступить к решению какой-то задачи контрольной работы, нужно изучить соответствующие разделы курса и проработать решение задач, разобранных в учебнике или задачнике. Следует оценить правдоподобность полученных в процессе решения результатов с точки зрения физической сущности задачи и её исходных данных.

4. Если основные положения теории усвоены слабо и не проработаны разобранные в учебнике примеры, то при выполнении контрольной работы могут возникнуть затруднения.

5. На титульном листе контрольной работы должны быть четко указаны: наименование и номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета и специальности, учебный шифр (номер зачетной книжки), дата отсылки работы, точный почтовый адрес.

6. Контрольная работа должна быть выполнена на одной стороне стандартных листов писчей бумаги (размер 21,0 x 29,7 см) или на тетрадных листах в клеточку того же формата. Страницы должны быть пронумерованы. Задание должно быть сброшюровано в альбом с обложкой из плотной бумаги (ватмана), выполнено (по возможности) на компьютере или четко написано от руки синей, черной пастой.

На каждом листе должна быть рамка с полями по 10 мм снизу, сверху, справа и 25 мм слева (для брошюровки). Внизу должен быть штамп высотой 20-25 мм.

7. Перед решением каждой задачи нужно записать сначала её условие, а затем полностью выписать исходные данные, По этим данным составить аккуратно эскиз, определяющий условие задачи в соответствии с вариантом. Вычерчивание схем и чертежей должно выполняться строго в масштабе с применением чертежных инструментов. На схемах следует проставить буквенные обозначения параметров, их численные значения; нагрузки с указанием их размерности.

8. Не нужно указывать те нагрузки, размеры и другие данные, которые согласно варианту задания, равны нулю.

9. Решение должно сопровождаться краткими и грамотными, без сокращения слов, пояснениями и чёткими выполненными в масштабе схемами. Перед решением задачи следует ознакомиться с относящимися к ней указаниями.

10. Каждый пункт решения должен содержать вспомогательные чертежи (при необходимости), расчетную формулу, выраженную через исходные данные, цифровое повторение этой формулы и ответ. В ответах необходимо проставлять размерность полученных величин.

11. Расчеты нужно выполнить с точностью до четырех-пяти значащих цифр, соблюдая правила приближенных вычислений

12. Решение задачи должно быть тщательно проверено. В некоторых случаях принятый путь решения задачи не является единственно возможным, поэтому весьма желательно найти, помимо использованного, какой-либо иной способ и решить задачу вновь. Совпадение результатов является наиболее надежной гарантией правильного ответа.

13. Получив проверенную работу, следует сначала ознакомиться с замечаниями рецензента и затем в решение задачи внести соответствующие исправления.

14. Если работа не зачтена, решение всей задачи или указанной рецензентом её части приводится в той же тетради в разделе "Работа над ошибками". Не следует что-либо стирать или зачеркивать в работе, проверенной рецензентом.

15. При исправлении ошибок должно быть четко указано, к какой задаче относятся исправления; их лучше всего вставлять после задачи. Исправления, направленные рецензенту отдельно от работы, не рассматриваются.

16. Контрольная работа, оформленная неаккуратно или с нарушением настоящих указаний, возвращается без рассмотрения и рецензирования.

17. **Консультации:** в процессе изучения дисциплины неизбежно возникают вопросы. Не следует оставлять их без ответов. Не нужно также откладывать решение вопросов на более поздний срок. На вопросы, возникающие во время изучения материала, необходимо получать ответы своевременно. Для этого их полезно записывать и выяснять во время консультации на кафедре строительной механики, ауд. 606 (гл. корпус) у преподавателей, ведущих на заочном факультете занятия.

4. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

2. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.

3. Киселёв, В.А. Плоская задача теории упругости / В.А. Киселёв. – М.: Высшая школа, 1976. – 152 с.

4.Теребушко, О.И. Основы теории упругости и пластичности / О.И. Теребушко. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

5. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. –М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.

6. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука. 1975, - 576 с.

7. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П.Тимошенко, С. Войновский -

Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

8. Колкунов, Н.В. Основы расчета упругих оболочек / Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 296 с.

9. Сбитнев, В.Ф. Методы решения задач по теории упругости (учебное пособие к контрольным работам для студентов-заочников) / В.Ф.Сбитнев. – Челябинск: ЧПИ, 1985. – 78 с.

10. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1974. – 559 с.

5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задача № 1

Дана прямоугольная невесомая балка-полоса (рис. 1) длиной l , высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат принято в нижнем левом углу. Выражения для функции напряжений $\varphi(x,y)$ и числовые значения к задаче нужно взять из таблицы 1. Требуется:

1. Проверить, может ли предлагаемая функция напряжений $\varphi(x,y)$ приемлема для решения плоской задачи теории упругости.

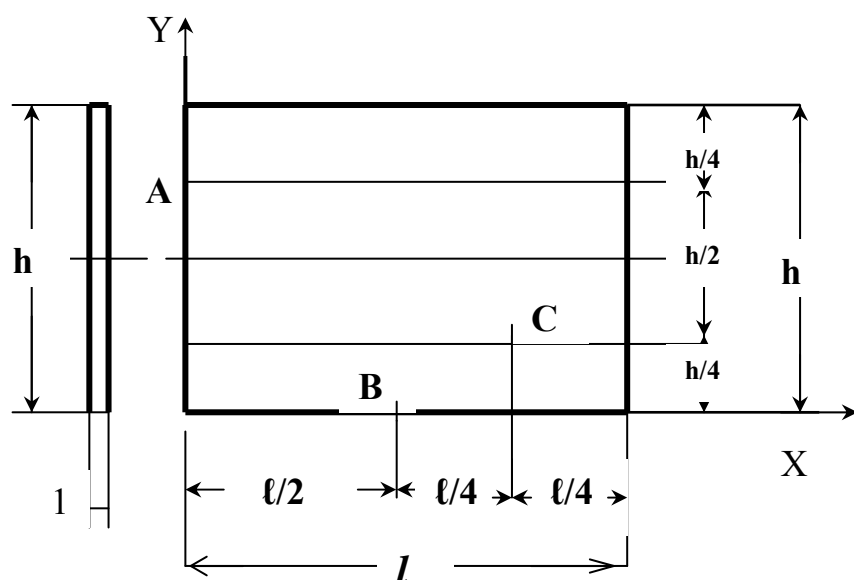


Рис. 1

2. Найти выражения напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} решаемой задачи.

3. Вычислить напряжения в трёх указанных точках (точки А, В и С).

4. Выяснить загрузку пластины на двух из четырех граней (сторон) полосы, указанных в таблице 1, и дать их изображение на рисунке (схеме).

Методические указания к задаче № 1.

1. Для проверки пригодности функции напряжений $\varphi(x,y)$ при решении плоской задачи теории упругости используется бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

2. Аналитические выражения нормальных и касательных напряжений находятся по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Внешние силы (нагрузки нормальные и касательные), приложенные ко всем граням полосы-балки, определяются с использованием условий на поверхности тела (статические граничные условия):

$$p_{xV} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m; \quad p_{yV} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m,$$


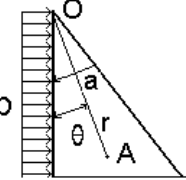
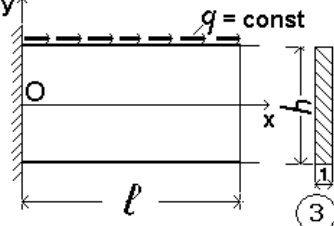
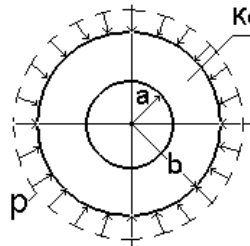
где p_{xV} , p_{yV} – проекции на ось Ox и Oy соответственно внешних сил,

действующих на гранях полосы; ν – нормаль к грани; $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$ – направляющие косинусы нормали ν .

Таблица 1

Цифры варианта	Порядковый номер цифры варианта					
	1	2	3		4	
	l, m	h/l	a	b	сторона полосы	$\Phi(x, y)$
1	1,2	0,80	2,1	1,1	2-3, 1-2	$a(x^4 - y^4) + bx^2y$
2	1,3	0,75	2,2	1,2	0-3, 1-0	$ax^2 - b(x^2y^3 - y^5/5)$
3	1,4	0,70	2,3	1,3	0-1, 1-2	$a(x^2y^2 - y^4/3) + bxy^2$
4	1,5	0,65	2,4	1,4	1-2, 2-3	$ax^3 + b(xy^4 - x^5/5)$
5	1,6	0,60	2,5	1,5	2-3, 0-3	$a(x^3y^2 - xy^4) + bx^2y$
6	1,7	0,55	2,6	1,6	0-3, 2-3	$a(-x^4 + y^4) - bxy^3$
7	1,8	0,50	2,7	1,7	0-1, 0-3	$-ay^2 + b(x^2y^3 - y^5/5)$
8	1,9	0,45	2,8	1,8	1-2, 0-1	$ax^3y + b(x^2y^2 - x^4/3)$
9	2,0	0,85	2,9	1,9	0-3, 0-1	$a(x^4y - y^5/5) + bxy$
0	2,1	0,90	3,0	2,0	2-3, 1-2	$axy^3 + b(x^2y^3 - x^4y)$

Задача 2

 <p>Кольцо</p> <p>1</p>	$\sigma_r = \frac{1}{(b^2 - a^2)} [(p_2 b^2 - p_1 a^2) + a^2 b^2 (p_1 - p_2) / r^2]$ $\sigma_\theta = \frac{1}{(b^2 - a^2)} [(p_2 b^2 - p_1 a^2) - a^2 b^2 (p_1 - p_2) / r^2]$ $\tau_{r\theta} = 0$
 <p>$k = \operatorname{tg} a - a$</p> <p>2</p>	$\sigma_r = \frac{P}{k} (-k + \frac{\operatorname{tg} a}{2} - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot \cos \theta)$ $\sigma_\theta = \frac{P}{k} (-k + \frac{\operatorname{tg} a}{2} - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot \cos \theta)$ $\tau_{r\theta} = \frac{P}{k} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \operatorname{tg} a \cdot \sin 2\theta)$
 <p>$q = \text{const}$</p> <p>3</p>	$\sigma_x = q \frac{l-x}{h} (1 + 6 \frac{y}{h})$ $\sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = \frac{q}{h} (y + 3 \frac{y^2}{h} - \frac{h}{4})$
 <p>Кольцо</p> <p>4</p>	$\sigma_r = \frac{pb^2}{(b^2 - a^2)} (\frac{a^2}{r^2} - 1)$ $\sigma_\theta = -\frac{pb^2}{(b^2 - a^2)} (\frac{a^2}{r^2} + 1)$ $\tau_{r\theta} = 0$

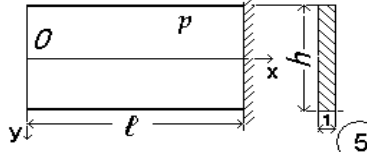
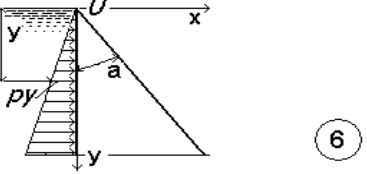
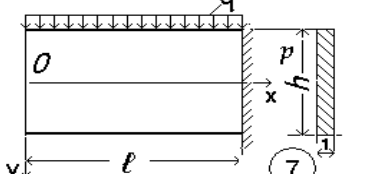
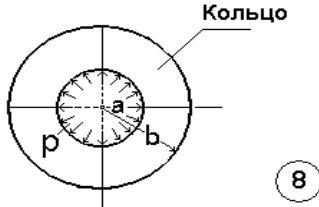
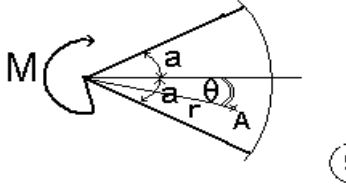
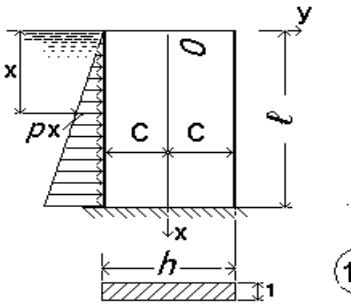
	$\sigma_x = \frac{6p}{h^2} \left(\frac{2}{3}y^2 - x^2 - \frac{h^2}{10} \right) y$ $\sigma_y = -2p \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) y$ $\tau_{xy} = 6p \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) x$
	$\sigma_x = -py$ $\sigma_y = \frac{p}{\operatorname{tg}^2 a} \left(y - \frac{2}{\operatorname{tg} a} \right) x$ $\tau_{xy} = -\frac{p}{\operatorname{tg}^2 a} x$
	$\sigma_x = \frac{6q}{h^3} \left(\frac{2}{3}y^2 - x^2 - \frac{h^2}{10} \right) y$ $\sigma_y = \frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4}y - \frac{y^3}{3} - \frac{h^3}{12} \right)$ $\tau_{xy} = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x$
	$\sigma_r = \frac{pa^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$ $\sigma_\theta = \frac{pa^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$ $\tau_{r\theta} = 0$
	$\sigma_r = \frac{2M}{r^2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\sin 2a - 2a \cdot \cos 2a}$ $\sigma_\theta = 0$ $\tau_{r\theta} = \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\cos 2\theta - \cos 2a}{\sin 2a - 2a \cdot \cos 2a}$
	$\sigma_x = -\frac{pxy}{4c^3} (x^2 - 2y^2 + 1,2c^2)$ $\sigma_y = px \left(-\frac{1}{2} + \frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4}c \right)$ $\tau_{xy} = p \frac{c^2 - y^2}{8c^3} (3x^2 - y^2 + \frac{1}{5}c^2)$

Рис. 2

Рассматривается невесомая пластинка единичной толщины (рис. 2). Заданы функции напряжений. Данные задачи приведены в таблице 2. Требуется

1. Установить, удовлетворяют ли предложенные зависимости для напряжений уравнениям теории упругости.

2. Проверить, точно ли удовлетворяются краевые (поверхностные) условия.

Задача № 3

Стальная прямоугольная пластинка (рис. 3) каким-то образом оперта по контуру, изгибается под действием поперечной нагрузки. Коэффициент Пуассона принять равным $\mu = 0,25$. Остальные данные принять по таблице 2. Требуется:

1. Установить пригодность предложенной функции $w(x,y)$ для решения поставленной задачи.
2. Установить, каким граничным условиям удовлетворяет предложенное уравнение прогибов $w(x,y)$ и изобразить их на схеме.
3. Выявить нагрузки, действующие на пластинку и изобразить их на схеме.

Примечание: для всех вариантов принять $C = q \cdot l^2 / 24D$.

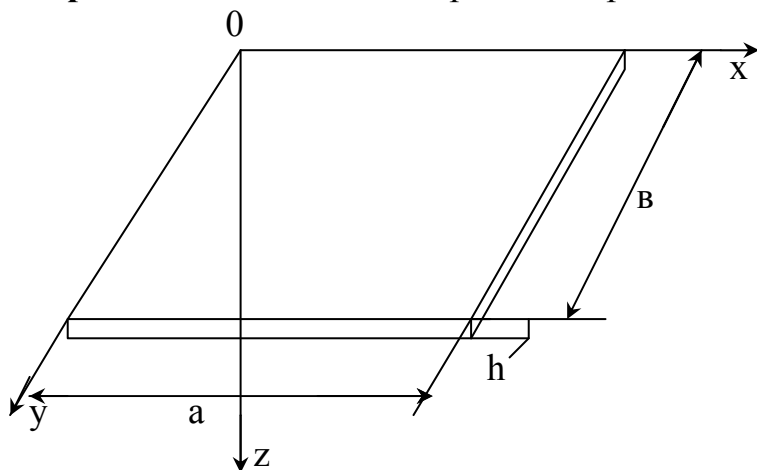


Рис. 3

Методические указания для задачи № 3

1. Пригодность предлагаемой функции $w(x,y)$ для решения задачи проверяется подстановкой производных функции в дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки, которое выглядит следующим образом:

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2 \cdot \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = q(x,y) / D.$$

2. Для выявления нагрузки, действующей на пластинку, необходимо: использовать дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки и

Таблица 3

Цифры варианта	Порядковый номер цифры варианта					
	1	2	3	4		
	h, мм	l, м	a/l	b/l	w(x,y)	схема к задаче № 2
1	10	1,00	1,10	3,00	$C \cdot x^3$	1
2	12	0,95	1,20	2,90	$C \cdot (a - x)^2 (b - y)$	2
3	14	0,90	1,30	2,80	$C \cdot x^2 y$	3
4	16	0,85	1,40	2,70	$C \cdot xy$	4
5	18	0,80	1,50	2,60	$C \cdot (a - x)(b - y)^2$	5
6	20	0,75	1,60	2,50	$C \cdot x^3 y$	6
7	22	0,70	1,70	2,40	$C \cdot (a - x)(b - y)$	7
8	24	0,65	1,80	2,30	$C \cdot y^3$	8
9	26	0,60	1,90	2,20	$C \cdot xy^2$	9
0	28	0,55	2,00	2,10	$C \cdot xy^3$	0

формулы изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил:

$$M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \mu \cdot \partial^2 w / \partial y^2); \quad M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \mu \cdot \partial^2 w / \partial x^2);$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}).$$

Задача № 4

Стальная круглая кольцевая пластинка с концентрическим вырезом каким-то образом опирается по контуру нагружена, как показано на рис. 4. Требуется:

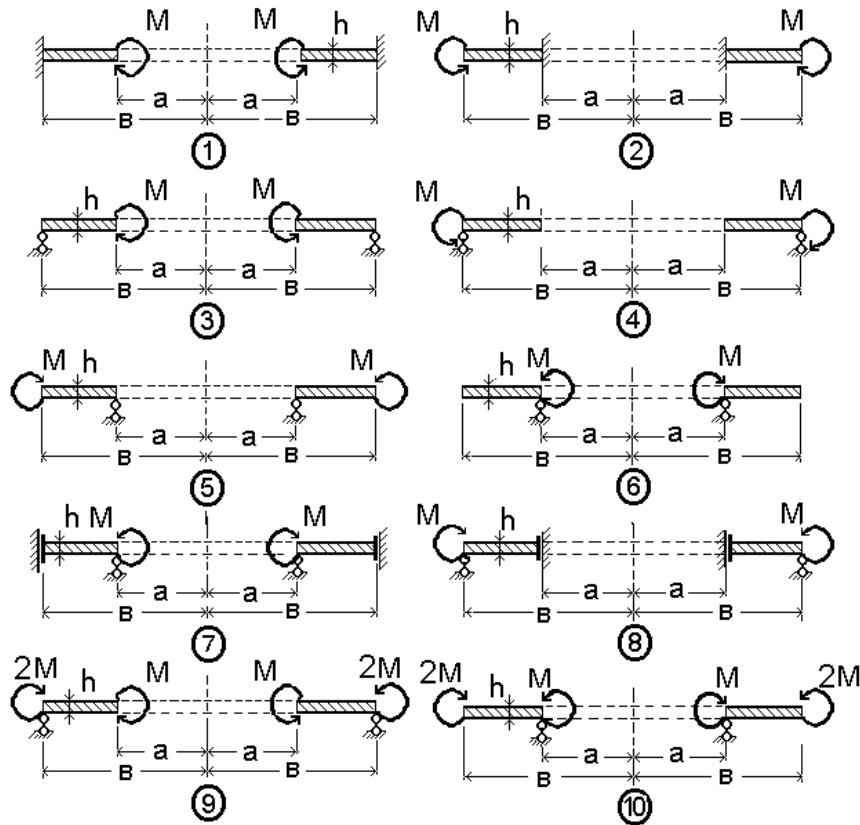


Рис. 4

1. Найти выражение прогиба $w(r)$.

2. Получить формулы для поперечной силы Q_r и изгибающих моментов M_r и M_θ

3. Построить эпюры M_r и M_θ для меридионального сечения.

Вычислить максимальный прогиб пластинки. Данные для решения задачи взять из таблицы 3.

Методические указания для задачи № 4

1. Для отыскания выражения $w(r)$ необходимо воспользоваться общим решением основного дифференциального уравнения изогнутой поверхности круглой пластинки в полярных координатах; используя условия опирания, составить алгебраические уравнения для нахождения поперечной силы и постоянных интегрирования; определить постоянные интегрирования из решения системы уравнений.

2. Выражения изгибающих моментов M_r и M_θ получают по следующим выражениям:

$$M_r = -D(d^2w/dr^2 + \mu/r \cdot dw/dr); M_\theta = -D(1/r \cdot dw/dr + \mu \cdot d^2w/dr^2).$$

Выражение для Q_r проще найти из рассмотрения равновесия части вырезанной из пластинки (наружной или внешней, зависящей от условий опирания), найдя предварительно вертикальную реакцию в связях.

Таблица 3

Цифры варианта	Порядковый номер цифры варианта						
	1	2		3	4		
	h, мм	μ	l, м	M, КНм/м	a/l	b/l	Номер схемы
1	32	0,26	0,70	0,18	1,40	2,10	1
2	34	0,27	0,75	0,19	1,45	2,20	2
3	24	0,28	0,80	0,16	1,50	2,30	3
4	26	0,29	0,85	0,20	1,55	2,40	4
5	28	0,30	0,90	0,13	1,60	2,50	5
6	20	0,29	0,65	0,11	1,65	2,60	6
7	22	0,28	0,60	0,12	1,70	2,70	7
8	25	0,27	0,95	0,14	1,75	2,65	8
9	28	0,26	1,00	0,15	1,80	2,55	9
0	30	0,25	1,05	0,17	1,85	2,80	10

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	3
2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ	4
3. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ	6
4. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	8
5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА	9
Задача № 1	9
Задача № 2	10
Задача № 3	12
Задача № 4	13
ОГЛАВЛЕНИЕ	14