Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра строительной механики

624.07(07)
С23

В.Ф. Сбитнев

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2011

УДК 624.07.2(075.8) + 539.4(075.8)
С23

Одобрено
учебно-методической комиссией
архитектурно-строительного факультета

Рецензенты:
С.Б. Шматков, А.Ю. Рыжков

Сбитнев, В.Ф.
С23 Вычисление экстремумов изгибающих моментов: учебное пособие для самостоятельной работы / В.Ф. Сбитнев. − Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 18 с.

В пособии затронута одна из самых актуальных и сложных тем в сопротивлении материалов – проблема вычисления экстремальных значений изгибающих моментов в балках при построении эпюр внутренних силовых факторов от действия распределённых нагрузок, изменяющихся по различным законам.

Предполагается, что читатель уже хорошо знаком с этой проблемой, знает законы построения, умеет использовать дифференциальные и интегральные зависимости как при построении эпюр, так и при их проверках.

Цель пособия – вывести и предложить читателю простейшие формулы, зависимости и правила, позволяющие легко и быстро вычислять не только положение сечения, в котором возникает экстремальное значение изгибающего момента, но и сам экстремум.

Пособие ориентировано на самостоятельную работу и предназначено для использования студентами строительных специальностей всех форм обучения, изучающих курсы сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. Приведены примеры решения задач. Пособие будет полезно и преподавателям, ведущим занятия по этим дисциплинам.

УДК 624.072.2(075.8) + 539.4(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методика расчета балок из пластичных и хрупких материалов различна; это влияет на способ выявления опасного сечения, Известны различия также в расчетах балок постоянного сечения по всей длине и переменного сечения.

Поскольку в пособии ставится локальная задача: вычисление экстремальных значений изгибающих моментов, а не расчета на прочность, то сразу оговоримся, что материал балки пластичный, задача решается в упругой постановке, а балка может быть ступенчато переменного сечения, однако в пределах исследуемого участка она постоянного сечения.

Наиболее важным в сопротивлении материалов и строительной механике стержневых систем является этап по определению напряженно-деформированного состояния стержня в зависимости от заданных внешних воздействий. Иначе, нахождение напряжений, деформаций и перемещений в стержнях (балках) составляют основную задачу строительной механики.

Возникающие в поперечных сечениях балки (рамы) нормальные напряжения и перемещения, как известно, пропорциональны изгибающему моменту. Чем больше изгибающий момент, тем больше будут напряжения и деформации.

Поэтому особенно в расчётах на прочность одной из основных является задача вычисления наибольшего по абсолютной величине изгибающего момента, т.е. задача об отыскании так называемого опасного сечения.

Следовательно, тема построения эпюр внутренних силовых факторов, на наш взгляд, хотя и является сложной, но в то же время необходимой. Тем более, что в учебной литературе вопрос по отысканию экстремума изгибающих моментов особенно при распределённых нагрузках, изменяющихся по сложным законам, хотя и освещен [1, 2, 7], но не полно.

При нагружении участка балки распределённой нагрузкой, изменяющейся по какому-то закону, опасное сечение часто находится именно на этом участке, при этом изгибающий момент может иметь экстремум. Отыскание этого экстремума иногда представляет собой обременительную задачу.

Здесь необходимо отметить, что настоящее пособие *не является учебником по обучению правильного построения эпюр при изгибе.* Предполагается, что читатель уже достаточно хорошо знаком с этой проблемой и умеет на практике применять и использовать дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе, как при построении эпюр, так и при их проверке. Пособие посвящено исследованиям, направленным на простоту и быстроту вычисления экстремальных значений изгибающих моментов при действии на сооружение распределённых нагрузок. Выполнены эти исследования на примерах расчета балки, но они справедливы и для плоских стержневых систем, состоящих из прямолинейных элементов (стержней).

Эпюры внутренних силовых факторов обычно строят на основе аналитических выражений, полученных из условий равновесия для всех участков балки. Что, вообще говоря, и рекомендуют почти все учебники по сопротивлению материалов и строительной механике при изучении темы по построению эпюр внутренних силовых факторов [1–9]. Конечно, аналитическое решение всегда предпочтительно, но вывести его обычно удается после значительных творческих усилий. Возможность его получения иногда весьма затруднительна.

Гораздо проще можно применить другой метод, в котором творческий элемент может быть сведен к разумному минимуму при наличии разрешающих зависимостей, но позволяющий без видимых усилий построить эпюры внутренних силовых факторов. Зная уже заранее законы, определяющие очертание эпюр на отдельных участках, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно построить так: эпюру Q(z) по площадям эпюры нагрузки q(z), а эпюру M(z) - по площадям уже построенной эпюры поперечных сил. Т.е. можно обойтись без составления аналитических выражений внутренних усилий и найти только некоторые ординаты эпюр в характерных сечениях. Эти правила следуют непосредственно из интегральных зависимостей при изгибе.

На основании теоремы Журавского [1, 3, 8] между поперечной силой Q(z) и распределённой нагрузкой q(z) имеет место такая дифференциальная зависимость

$$dQ(z) = q(z)\cdot dz. \qquad (0.1)$$

После интегрирования этого выражения получаем:

$$Q(z) = \int q(z)\cdot dz + C_1. \qquad (0.2)$$

Это уравнение называют первой интегральной зависимостью при изгибе.

Интеграл в формуле (0.2) - не что иное, как площадь эпюры распределённой нагрузки на исследуемом участке. Постоянная C_1 отражает наличие на этом участке сосредоточенных сил. Далее будем полагать, что сосредоточенные силы на исследуемом участке отсутствуют, кроме поперечной силы в начале участка, которая принимается равной **A**.

Таким образом, *изменение величины поперечной силы на участке балки равно площади эпюры распределённой нагрузки q(z) на этом участке.* Дифференциальная зависимость между изгибающим моментом M(z) и поперечной силой Q(z) выражается следующей формулой

$$dM(z) = Q(z)\cdot dz. \qquad (0.3)$$

После интегрирования зависимости (0.3) получаем

$$M(z) = \int Q(z)\cdot dz + C_2. \qquad (0.4)$$

Зависимости (0.3) и (0.4) аналогичны соотношениям (0.1) и (0.2), поэтому между эпюрами M(z) и Q(z) существует такая же зависимость, как и между эпюрами Q(z) и q(z), т.е. в уравнении (0.4) интеграл представляет собой площадь эпюры поперечных сил на исследуемом участке балки.

Постоянная C_2 отражает сумму сосредоточенных моментов, расположенных на участке балки. В последующем будем полагать, что сосредоточенных моментов на данном участке нет, кроме изгибающего момента в начале участка, который принимается равным M_O.

Следовательно, *изменение величины изгибающего момента на исследуемом участке равно площади эпюры поперечных сил на этом участке.*

Часто эти закономерности в учебной литературе называют «правилом площадей» [1 – 8]. При изложении последующего материала эти правила будут широко использованы.

Принимая во внимание вышеизложенное, эпюры поперечных сил Q(z) и изгибающих моментов M(z) можно строить, не составляя аналитических выражений для Q(z) и M(z), а ограничиться вычислением значений поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях балки и использованием выводов дифференциальных и интегральных зависимостей при изгибе.

Характерными нужно считать сечения, расположенные по концам каждого участка. К ним относятся сечения, в которых изгибающий момент получает экстремальное значение.

Для краткости формулировки назовём предложенный в пособии метод – «методом площадей». Этот метод, позволяя определять экстремумы M(z) в балках и рамах, обладает достаточной универсальностью, так как процедура его не изменяется в зависимости от сложности нагружения участка сооружения и рассматриваемого участка на балке.

«Метод площадей» особенно эффективен в тех случаях, когда аналитический метод приводит к затруднениям и становится обременительным.

В пособии выводятся и предлагаются достаточно простые формулы, которые позволяют без каких-либо затруднений при минимальной затрате времени, *что особенно важно во время сдачи зачетов и экзаменов*, находить не только расположение сечения, где находится экстремум изгибающего момента, но и экстремум. Ещё раз нелишне напомнить, что пособие рассчитано на читателя, который знает математический анализ, статику, правила знаков, принятые для внутренних усилий, и умеет применять и использовать дифференциальные и интегральные зависимости при изгибе, включая правило площадей.

Приводимые в пособии формулы для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов позволяют, с одной стороны, применять их для проверки правильности решения задач, с другой стороны, при определённом навыке значительно уменьшить объём вычислительных и графических действий, выбирая наиболее простой путь построения эпюр Q и M.

В пособии ограничимся распределёнными нагрузками наиболее часто встречающимися как при проектировании инженерных конструкций, так и в учебном процессе, а именно: при выполнении расчетно-графических заданий, на зачетах, на экзаменах. Это:

а) равномерно распределённая нагрузка;
б) треугольная (гидростатическая) нагрузка;
в) нагрузка, изменяющаяся по степенному закону;
г) трапециевидная нагрузка.

1. РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННАЯ НАГРУЗКА

Пусть на балке имеется несколько участков. Один из них, который является расчетным, имеет длину $\boldsymbol{l}$ и на нём приложена равномерно распределённая нагрузка интенсивности q (рис. 1, а). Построить эпюры Q(z) и M(z).

Согласно дифференциальным зависимостям при изгибе известно, что поперечная сила Q(z) при таком на участке изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по закону квадратной параболы.

Эпюра поперечной силы на участке пусть имеет вид, как показано на рис. 1, б, т.е. она знакопеременна. При такой эпюре Q(z) изгибающий момент, характер которой изображен на рис. 1, в, имеет экстремум в сечении, где поперечная сила равна нулю. Назовём это сечение „нулевым“.

Предполагается, что ординаты поперечной силы на концах участка известны и равны: слева **A**, справа **– B**. Изгибающие моменты в начале и конце участка тоже известны и равны $\mathbf{M_O}$ и $\mathbf{M_L}$ соответственно.

Для решения задачи возьмем начало координат на конце левого участка, а ось z направим вправо. Найдем сначала положение «нулевого» сечения.

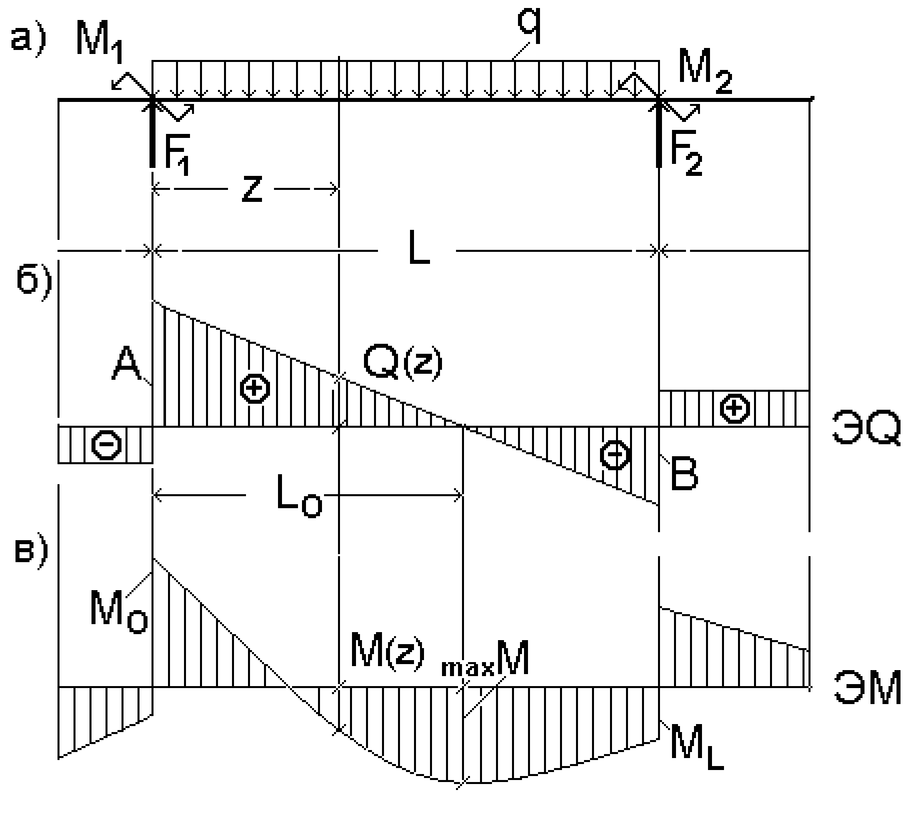

Рис. 1

В произвольном сечении, распложенном на расстоянии z от начала участка, поперечная сила по правилу площадей

$$Q(z) = A - q\cdot z\ . \qquad (1.1)$$

Согласно условию задачи в сечении, которое расположено на расстоянии L_O, поперечная сила равна нулю. Тогда из уравнения (1.1) следует

$$Q(L_O) = A - q\cdot L_O = 0. \qquad (1.2)$$

Откуда

$$L_O = A/q\ , \qquad (1.3)$$

т.е. *для определения «нулевого» сечения при действии на участке балки равномерно распределённой нагрузки <u>достаточно знать лишь</u> параметры участка балки, ординату поперечной силы в начале (или конце) участка и воспользоваться формулой* (1.3).

По сравнению с классическими приёмами задача упрощается значительно, так как нет необходимости: полностью строить эпюру Q(z); составлять из подобия треугольников отношение сторон этой эпюры; решать получаемое из этого отношения уравнение. Только потом вычислять параметр L_O.

Квадратную параболу (при определённых навыках) можно построить по трём точкам. В задаче изгибающие моменты в двух сечениях уже известны (в начале и в конце участка). Теперь достаточно вычислить ординату M(z) в вершине параболы, где $z = L_O$, т.е. величину экстремума, и построить эпюру M(z).

Вычисление экстремального значения изгибающего момента произведем тоже с помощью правила площадей. Но необходимо помнить, что при её выводе не были учтены сосредоточенные моменты; если они есть на участке, их нужно учитывать особо.

В нашем случае сосредоточенный момент имеется и равен M_O. Площадь эпюры Q на участке L_O равна $0{,}5{\cdot}A{\cdot}L_O$. Теперь по закону площадей находим

$$\max M = M_O \pm 0{,}5{\cdot}A{\cdot}L_O\,. \qquad (1.4)$$

Подставив в это уравнение значение L_O из равенства (1.3), получаем

$$\max M = M_O \pm A^2/2q. \qquad (1.5)$$

Сформулируем следующее правило: *чтобы найти на участке экстремум изгибающего момента, нужно к величине изгибающего момента в начале участка прибавить (вычесть) отношение квадрата поперечной силы в начале участка к удвоенной интенсивности нагрузки*, т.е. для подсчета экстремума изгибающего момента снова достаточно знать лишь ординату А.

Следовательно, задача отыскания экстремума изгибающего момента по сравнению с традиционными способами снова значительно упрощается, так как нет необходимости составлять аналитическое выражение для M(z) и затем его вычислять, подставив в его выражение значение L_O, найденное по формуле (1.3). В заключение отметим, что приведённые выше правила справедливы не только для левой части балки; их можно использовать и для правой части балки. К выбору части надо подходить с точки зрения возможной простоты и наименьшего количества вычислений. Это обстоятельство можно применять для проверки вычислений.

Проиллюстрируем вышеизложенный материал на примере.

Пример 1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для простой балки, нагруженной, как показано на рис. 2, а.

Определим сначала вертикальные реакции $У_A$ и $У_B$ из уравнений равновесия.

$$\sum M_B = 0; \quad У_A{\cdot}3\boldsymbol{l} - 2q\boldsymbol{l}^2 - q\boldsymbol{l}^2 - 2q\cdot 3\boldsymbol{l}\cdot 1{,}5\boldsymbol{l} = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad У_B{\cdot}3\boldsymbol{l} - 2q\boldsymbol{l}^2 - q\boldsymbol{l}^2 + 2q\cdot 3\boldsymbol{l}\cdot 1{,}5\boldsymbol{l} = 0.$$

Откуда $У_A = 4q\boldsymbol{l}$, $У_B = 2q\boldsymbol{l}$.

Поперечная сила (рис. 2, б), согласно правилу знаков, у левой опоры будет равна «плюс» $4q\boldsymbol{l}$, а у опоры В: «минус» $2q\boldsymbol{l}$. Эпюра Q(z) линейно переменная, поэтому эти ординаты соединяем прямой. И поскольку эпюра Q(z) ещё и знакопеременная, то в некотором сечении балки она равна нулю. Найдем положение этого сечения, используя формулу (1.3). Имеем $L_O = 4q\boldsymbol{l}/2q = 2\boldsymbol{l}$.

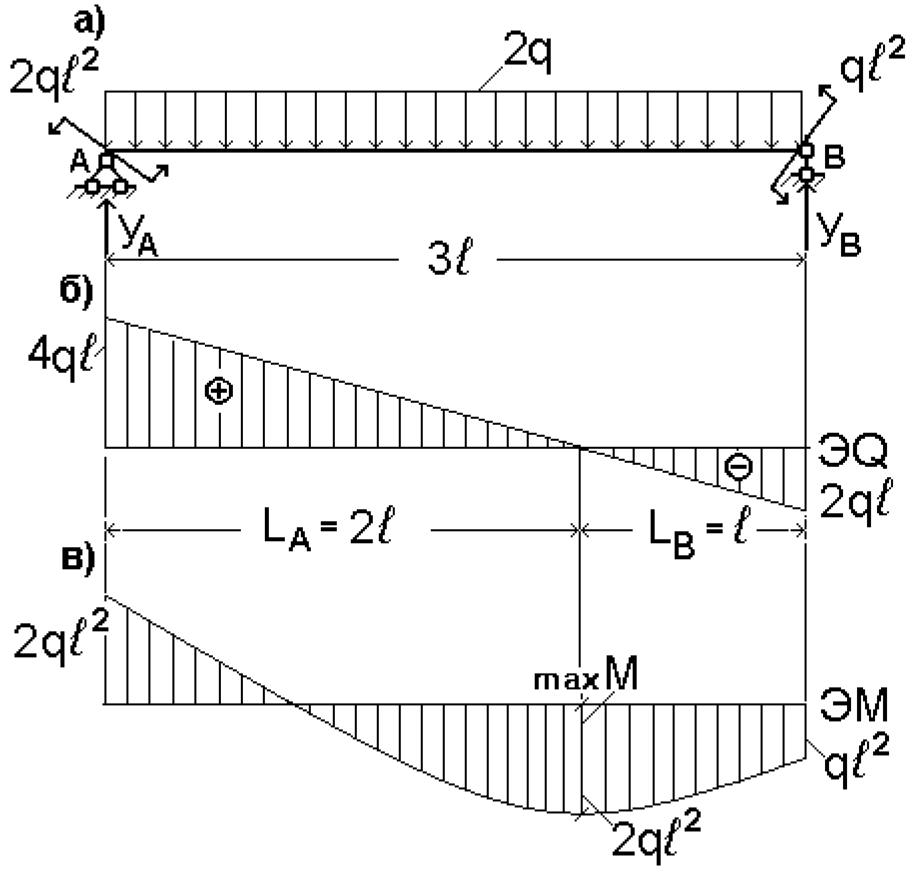

Рис. 2

Изгибающие моменты около опор известны и равны: $M_O = -2q\boldsymbol{l}^2$, $M_L = +q\boldsymbol{l}^2$. Экстремальное значение M(z) вычисляем по формуле (1.5). Оно равно

$$\max M = -2q\boldsymbol{l}^2 + (4q\boldsymbol{l})^2/(2\cdot 2q) = -2q\boldsymbol{l}^2 + 4q\boldsymbol{l}^2 = 2q\boldsymbol{l}^2.$$

Экстремум, вычисленный из рассмотрения правой части балки, равен:

$$\max M = q\boldsymbol{l}^2 + (2q\boldsymbol{l})^2/(2\cdot 2q) = q\boldsymbol{l}^2 + q\boldsymbol{l}^2 = 2q\boldsymbol{l}^2.$$

Проверка подтверждает правильность вычисления экстремума.

Теперь квадратную параболу строим по трем значениям. Эпюра M(z) на участке выглядит так, как показано на рис. 2, в.

Итак, при загружении участка равномерно распределённой нагрузкой интенсивности q *для вычисления параметров, необходимых при построении эпюр Q и M, нужно знать параметры участка, величины поперечной силы и изгибающего момента либо в начале, либо в конце рассматриваемого участка.*

2. ТРЕУГОЛЬНАЯ НАГРУЗКА

Рассмотрим более сложный случай нагружения балки распределённой нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника (такую нагрузку часто называют гидростатической).

Пусть на балке несколько участков. На рассматриваемом участке, имеющем длину L, балка подвержена нагрузке, изменяющаяся по линейному закону, как показано на рис. 3, а, с наибольшей интенсивностью равной q. Начало координат возьмем в начале участка, направив ось z вправо. Для текущего сечения, расположенного на расстоянии z от начала координат, интенсивность нагрузки находится из подобия треугольников и равна

$$q(z) = q \cdot z/L \qquad (2.1)$$

При таком нагружении поперечная сила, как известно, изменяется по закону квадратной параболы, а изгибающий момент – по закону кубической параболы.

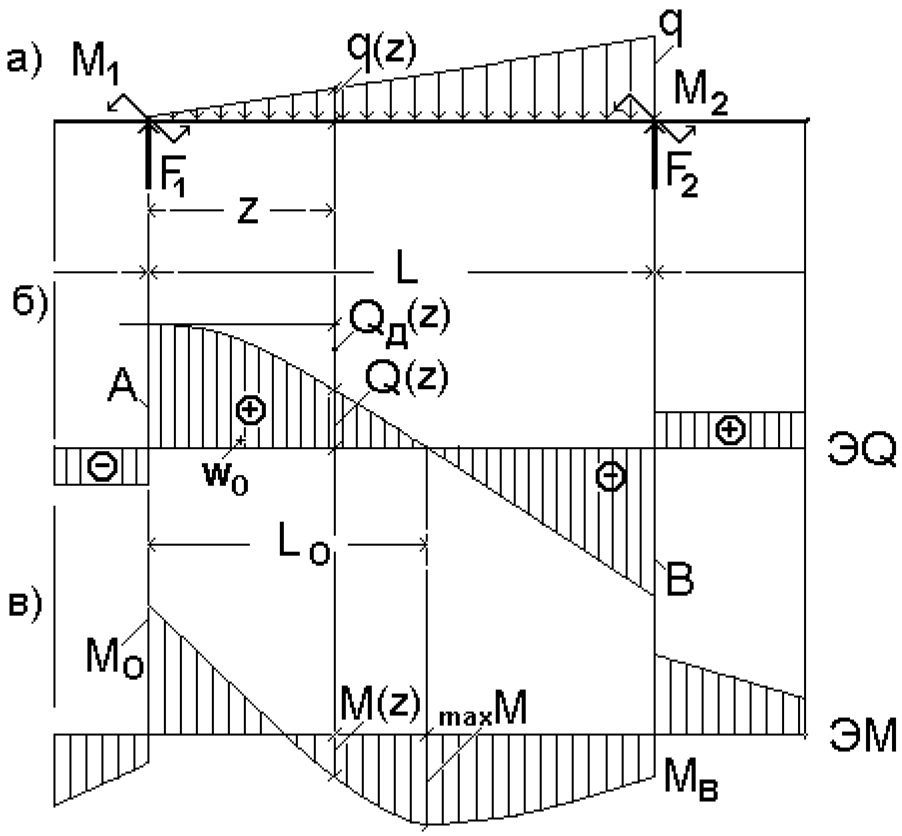

Рис. 3

Эпюра поперечной силы на участке пусть имеет вид, как изображено на рис. 3, б, т.е. знакопеременная. Это квадратная парабола, обращенная выпуклостью вверх, так как в начале участка (при z = 0) находится её вершина (касательная к которой должна быть параллельна базисной линии).

Эпюра изгибающего момента при такой эпюре Q(z) пусть имеет вид, как изображено на рис. 3, в, и в характерном («нулевом») сечении, где поперечная сила равна нулю, имеет экстремум. Пусть это будет сечение с координатой L_O.

Предполагается, что ординаты поперечной силы и изгибающего момента в начале участка известны и равны **A** и $\mathbf{M_O}$ соответственно.

Поперечная сила в произвольном сечении на участке по правилу площадей равна

$$Q(z) = A - ½\, q(z) \cdot z = A - ½\, qz^2/L. \qquad (2.2)$$

По условию задачи в сечении $z = L_O$ поперечная сила равна нулю. Тогда из этого уравнения следует равенство

$$Q(L_O) = A - ½\, q(L_O)^2/L = 0. \qquad (2.3)$$

Откуда находим

$$L_O = \sqrt{(2AL/q)} = L\cdot\sqrt{2A/qL} \qquad (2.4)$$

Итак, чтобы найти расстояние от начала участка до «нулевого» сечения, нужно *извлечь квадратный корень из отношения удвоенного произведения ординаты поперечной силы в начале участка на длину участка к наибольшей интенсивности нагрузки.*

Если оценивать это вычисление с классическим, то видим, что оно проще, так как нет необходимости составлять аналитическое выражение для Q(z) и решать квадратное равнение.

Теперь используем правило площадей для отыскания экстремального значения изгибающего момента. Из этого правила следует, что экстремум M(z) равен моменту в начале участка M_A плюс площадь эпюры Q(z), заключённая между началом участка и «нулевым» сечением, т.е.

$$\max M = M_O \pm \boldsymbol{\omega_O}. \qquad (2.5)$$

Для нагрузок, изменяющихся по закону треугольника, площадь такой параболы определяется просто. В данном случае из аналитической геометрии следует, что площадь параболы

$$\omega_O = 2/3\cdot A\cdot L_O = (2\sqrt{2})/3\cdot AL\sqrt{A/qL}. \qquad (2.6)$$

Подставив в уравнение (2.5) значение ω_O из формулы (2.6), окончательно получаем

$$\max M = M_O \pm (2\sqrt{2})/3\cdot AL\sqrt{A/qL} = M_O \pm \sqrt{8A^3L/9q}\,, \qquad (2.7)$$

т.е. *для вычисления экстремума изгибающего момента достаточно в начале участка знать только величины изгибающего момента и поперечной силы и воспользоваться формулой (2.7).*

Это, конечно, сделать гораздо проще, по сравнению с предлагаемыми в учебной литературе приёмами.

Проиллюстрируем изложенный материал на примере.

<u>Пример 2.</u> Балка на двух опорах пролётом $3\boldsymbol{l}$ подвержена треугольной нагрузкой с наибольшей интенсивностью 2q и сосредоточенными моментами у опор по $1{,}5q\boldsymbol{l}^2$, как показано на рис. 4, а. Построить эпюры поперечных сил Q(z) и изгибающих моментов M(z).

Из условий равновесия определим сначала реакции опор:

$$\sum M_B = 0;\ У_A\cdot 3\boldsymbol{l} - 1{,}5q\boldsymbol{l}^2 - 1{,}5q\boldsymbol{l}^2 - 0{,}5\cdot 2q\cdot 3\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l} = 0;$$

$$\sum M_A = 0;\ \mathbf{У_B}\cdot\mathbf{3}\boldsymbol{l} - 1{,}5q\boldsymbol{l}^2 - 1{,}5q\boldsymbol{l}^2 + 0{,}5\cdot 2q\cdot 3\boldsymbol{l}\cdot 2\boldsymbol{l} = 0.$$

Откуда находим $У_A = 2q\boldsymbol{l}$; $У_B = q\boldsymbol{l}$.

Построим эпюру Q(z). Около левой опоры поперечная сила равна плюс $2q\boldsymbol{l}$, у правой − минус $q\boldsymbol{l}$. По формуле (2.4) находим: $L_O = 3\boldsymbol{l}\sqrt{(2\cdot 2q\boldsymbol{l})/(2q\cdot 3\boldsymbol{l})} = \sqrt{6}\boldsymbol{l}$. По этим трем параметрам построена эпюра Q(z). Она изображена на рис. 4, б.

Переходим к построению эпюры M(z). В сечениях около опор изгибающие моменты известны и равны по $1{,}5q\boldsymbol{l}^2$: слева отрицательный (растянутые волокна сверху), справа – положительный (растянутые волокна снизу). Из эпюры Q(z) видно, что на эпюре M(z) имеется характерное сечение, в котором должен быть экстремум.

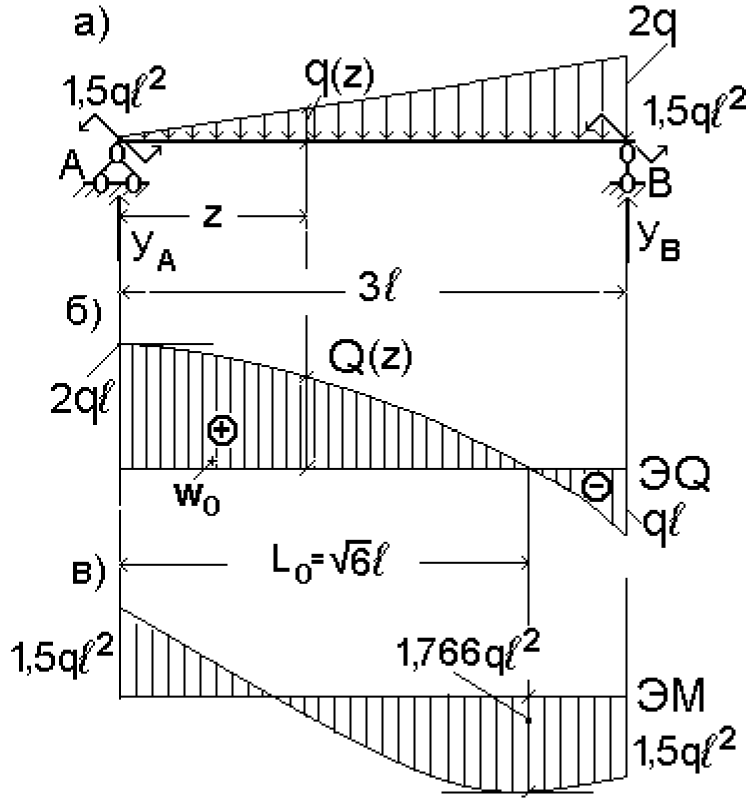

Рис. 4

По формуле (2.7) вычисляем этот экстремум. Получаем:

$$\max M = -\,1{,}5q\boldsymbol{l}^2 + (2\sqrt{2})/3\cdot 2q\boldsymbol{l}\cdot 3\boldsymbol{l}\cdot\sqrt{(2q\boldsymbol{l})/(2q\cdot 3\boldsymbol{l})} = 1{,}766\ q\boldsymbol{l}^2.$$

По этим трём ординатам построена кубическая парабола с вершиной в «нулевом» сечении и выпуклостью книзу. Она изображена на рис. 4, в.

3. НАГРУЗКА, РАСПРЕДЕЛЁННАЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ

На одном из участков балка, имеющая длину L, нагружена распределённой нагрузкой с наибольшей интенсивностью q, изменяющейся по степенному закону (рис. 5, а).

Выберем начало координат на левом конце участка, направив ось z вправо. В произвольном сечении на расстоянии z от начала координат интенсивность нагрузки пусть определяется зависимостью

$$q(z) = q\,(z/L)^N \quad (N = 0,1,2,3,\ldots)\,. \tag{3.1}$$

Эпюра поперечной силы Q(z) балки пусть имеет вид, как показано на рис. 5, б, т.е. она знакопеременна. Ордината поперечной силы на левом конце балки пусть равна А, а на правом – В. Эпюра Q(z) обращена выпуклостью вверх, так как в сечении z = 0 находится её вершина (здесь производная dQ(z)/dz равна нулю) и касательная к эпюре Q(z) в этом сечении должна быть параллельна базисной линии. Поэтому для вычисления площадей снова можно воспользоваться известными формулами из аналитической геометрии.

Эпюра изгибающего момента при такой эпюре Q(z) пусть имеет вид, как изображено на рис. 5, в, т.е. имеет в начале участка величину M_O, а в характерном («нулевом») сечении, где поперечная сила равна нулю, экстремум.

Пусть это будет сечение с координатой L_O.

Поперечная сила и изгибающий момент (согласно дифференциальным зависимостям) будут описываться степными функциями более высокого порядка, чем нагрузка.

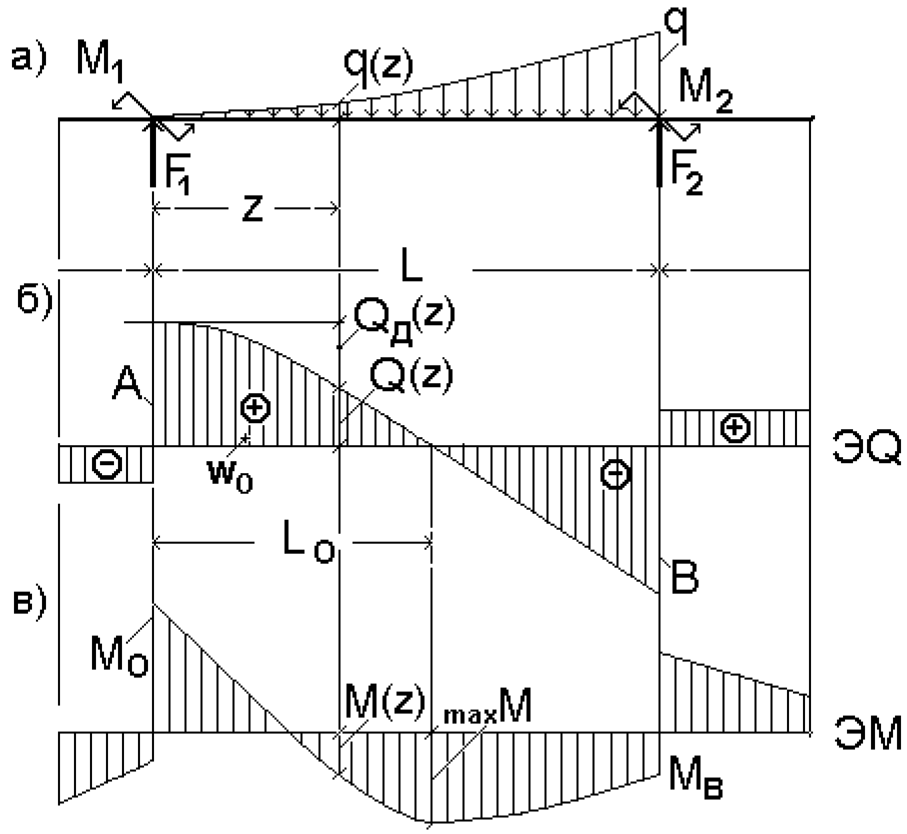

Рис. 5

Введем понятие «дополнительной» поперечной силы $Q_Д(z)$ (рис. 5, б); это разность между ординатой A и величиной поперечной силы в сечении. Имеем

$$Q_Д(z) = A - Q(z). \qquad (3.2)$$

Поскольку Q(z) имеет экстремум в начале участка, то в сечении z

$$Q(z) = (1/N+1)\cdot q\cdot(z/L)^{N}\cdot z \qquad (3.3)$$

В сечении, где Q(z) равна нулю, координата $z = L_O$. Тогда из уравнения (3.2) получаем

$$Q(L_O) = 0; \quad A - (1/N+1)\, q\, (L_O/L)^{N}\, L_O = 0. \qquad (3.4)$$

Откуда

$$L_O = \sqrt[N+1]{(N+1)AL^{N}/q} = L\cdot\sqrt[N+1]{(N+1)A/qL} \qquad (3.5)$$

Площадь эпюры Q, расположенной левее экстремума изгибающего момента, (согласно геометрии) будет равна:

$$w_O = (N+1)/(N+2)\cdot A\cdot L_O = (N+1)/(N+2)\cdot A\cdot L\,\sqrt[N+1]{(N+1)A/qL} \qquad (3.6)$$

Теперь окончательно получаем уравнение:

$$\max M = M_O \pm (N+1)/(N+2)\cdot AL\cdot \sqrt[N+1]{(N+1)A/qL} \qquad (3.7)$$

Как и в предыдущих случаях *для вычисления расстояния от начала участка до сечения, в котором изгибающий момент имеет экстремум и самого экстремума, нужно знать только параметры участка, ординату поперечной силы в начале участка, т.е. ординату А.*

Частные случаи.

1. Если на участке балки (рамы) действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности q, то в условии (3.1) нужно принять N = 0. Тогда нетрудно заметить, что уравнения (3.5) и (3.7) упрощаются и преобразуются в формулы (1.3) и (1.5).

2. Если участок балки подвержен действию треугольной нагрузки с наибольшей интенсивностью q, то в условии (3.1) нужно положить N = 1. Тогда уравнения (3.5) и (3.7) после элементарных преобразований переходят в соотношения (2.4) и (2.7).

4. ТРАПЕЦЕВИДНАЯ НАГРУЗКА

Рассмотрим ещё одно нагружение балки, довольно часто встречающейся в практике проектирования. Это нагрузка, тоже изменяющаяся вдоль балки (рамы), по линейному закону, а именно: по закону трапеции; одна из таких

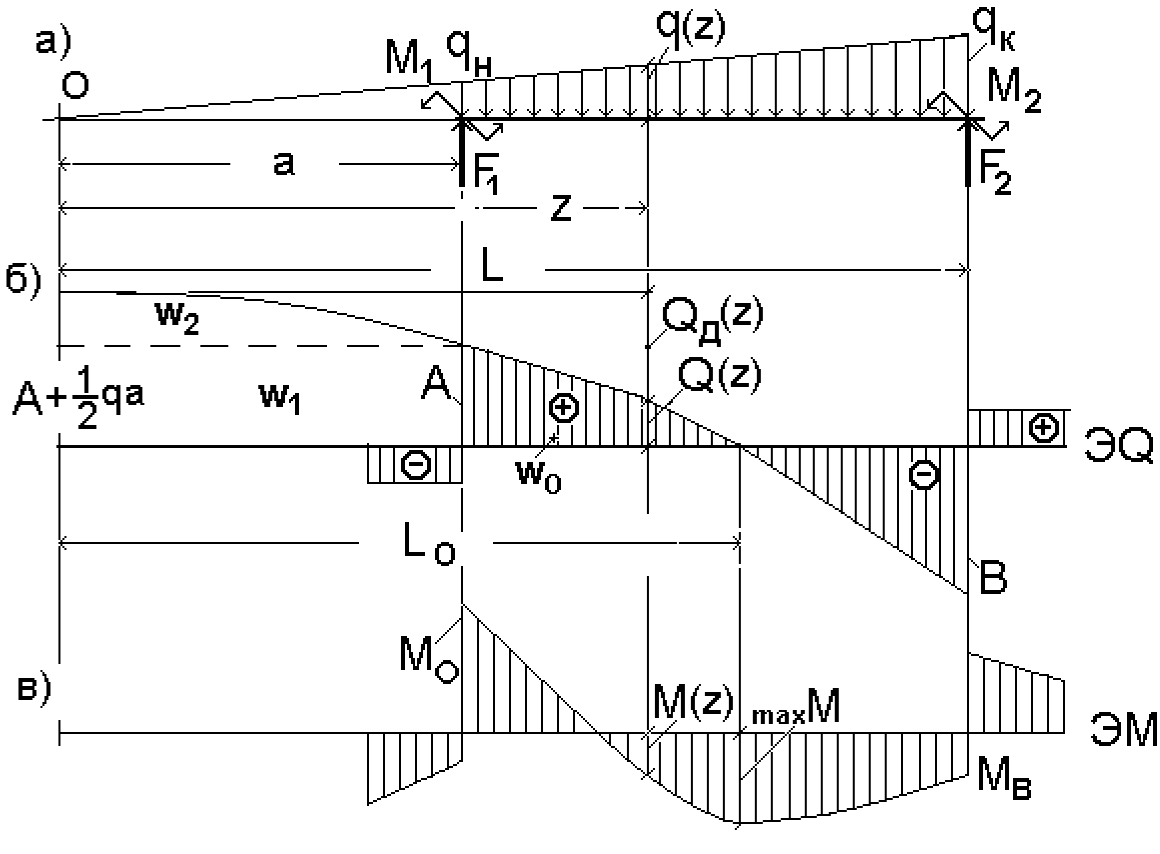

Рис. 5

нагрузок показана, например, на рис. 6, а. Итак, пусть на балке несколько участков. Исследуемый участок, длина которого ℓ, подвержен действию трапециевидной нагрузки (рис. 6,а). В начале участка интенсивность нагрузки $q_Н$, а в конце – $q_К$.

Напомним, что при таком нагружении поперечная сила изменяется по закону квадратной параболы, а изгибающий момент – по закону кубической параболы. Но эти законы несколько посложнее, чем при действии на балку треугольной нагрузки.

Эпюра поперечной силы пусть имеет вид, как изображено на рис. 6, б. Здесь заметим, что Q(z) в начале участка экстремума не имеет. Ордината поперечной силы в начале участка пусть равна **A**.

Эпюра изгибающего момента пусть имеет вид, показанный на рис. 6, в. Ордината M(z) в начале участка тоже известна и равна $M_О$.

Для решения задачи возьмем начало координат на расстоянии **a** от левого конца участка, направив ось z вправо. Оно определено тем, что в этой точке интенсивность нагрузки равна нулю, и находится из подобия треугольников.

Составив отношение сторон треугольников, получаем $\mathbf{a}:q_Н = L:q_К$. Откуда

$$a = L\cdot q_Н/q_К. \qquad (4.1)$$

В произвольном сечении, отстоящем на расстоянии z от начала координат, интенсивность нагрузки тоже находится из подобия треугольников:

$$q(z) = q_К\cdot z/L. \qquad (4.2)$$

Дополнительная поперечная сила $Q_Д(z)$ в произвольном сечении по правилу площадей равна величине нагрузки

$$Q_Д(z) = 0{,}5\cdot q(z)\cdot z = 0{,}5\cdot q_К\cdot z/L\cdot z = ½\, q_К\cdot z^2/L. \qquad (4.3)$$

В начале координат фиктивная поперечная сила равна $A + ½\, q_Н\cdot\mathbf{a}$. Это сечение характерно ещё и тем, что в нём и Q(z), и $Q_Д(z)$ имеют экстремумы.

В сечении $L_О$, в котором действительная $Q(L_О)$ равна нулю, дополнительная поперечная сила

$$Q_Д(L_О) = A + 0{,}5\cdot q_Н\cdot a. \qquad (4.4)$$

Заменив в уравнении (6.3) z на $L_О$, получаем следующее равенство

$$0{,}5\cdot q_К\cdot L_О^2/L = A + 0{,}5\cdot q_Н\cdot a^2. \qquad (4.5)$$

Решив это уравнение относительно $L_О$, находим

$$L_О = \sqrt{2AL/q_К + a^2}\,. \qquad (4.6)$$

Итак, для вычисления расстояния от начала координат до «нулевого» сечения нужно знать только два параметра: **A** и **a.** Один из них находим на этапе построения эпюры Q, а другой легко вычисляется по формуле (4.1). Расстояние от начала участка до «нулевого» сечения равно $L_О$ – **a**.

При **a** = 0 (треугольная нагрузка), зависимость (6.6) превращается в (4.4).

Теперь можно найти площадь эпюры поперечной силы $w_О$, расположенную между началом участка и «нулевым» сечением. Из геометрии замечаем, что

$$w_О = w - w_1 - w_2. \qquad (4.7)$$

Площадь эпюры Q(z) между началом координат и «нулевым» сечением w = = $⅔(A + ½\, q_Н\mathbf{a})L_О$. Площадь эпюры Q(z) от начала координат до начала участка представим в виде двух площадей w_1 и w_2, где w_1 – площадь прямоугольника равная $A\cdot L_О$, и w_2 – площадь параболы равная $⅔\cdot½\cdot q_Н\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$.

Подставив эти площади в уравнение (4.7), получаем после элементарных преобразований следующее равенство

$$w_O = A(⅔L_O - \mathbf{a}) + ⅓q_H \cdot a(L_O - \mathbf{a}) . \qquad (4.8)$$

Итак, окончательно полуаем

$$\max M = M_O \pm [A(⅔L_O - \mathbf{a}) + ⅓q_H \cdot a(L_O - \mathbf{a})] \qquad (4.9)$$

Нужно отметить, что формула (4.9) достаточно проста и удобна.

<u>Частный случай</u>. Если параметр **a** равен нулю, то нужно положить $q_H = 0$, а $q_K = q$. Формулы (4.6) и (4.9) упрощаются и переходят в уравнения (2.4) (2.7).

Читателю предоставляется самому выполнить эти простые выкладки.

Пример 3. Для иллюстрации вышеизложенных приёмов при построении эпюр Q и M рассмотрим балку на двух опорах, нагруженную как показано на рис. 7,а. На балке три участка, каждый из которых имеет длину 3ℓ. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Сначала находим реакции опор. Из уравнений равновесия

$$\sum M_B = У_A \cdot 9ℓ - 0,5 \cdot 4q \cdot 3ℓ \cdot 7ℓ - 9qℓ^2 + 2q \cdot 3ℓ \cdot 4,5ℓ - 0,5 \cdot 2q \cdot 3ℓ \cdot ℓ - 2q \cdot 3ℓ \cdot 1,5ℓ = 0;$$

$$\sum M_A = У_B \cdot 9ℓ - 0,5 \cdot 4q \cdot 3ℓ \cdot 2ℓ + 9qℓ^2 + 2q \cdot 3ℓ \cdot 4,5 \cdot ℓ - 0,5 \cdot 2q \cdot 3ℓ \cdot 8ℓ - 2q \cdot 3ℓ \cdot 7,5ℓ = 0$$

$$У_A = 4qℓ; \quad У_B = 5qℓ.$$

Строим эпюру Q(z), показанную на рис. 7, б. Рассуждаем следующим образом. В начале 1-го участка, с учётом правила знаков, поперечная сила равна «плюс» 4qℓ; площадь эпюры нагрузки на участке отрицательная. Поэтому, согласно дифференциальной зависимости между Q(z) и q(z), для вычисления поперечной силы в произвольном сечении её надо из ординаты **A** вычитать. В конце участка Q(z) будет равна: $Q(3\boldsymbol{l}) = 4q\boldsymbol{l} - 0,5 \cdot 4q \cdot 3\boldsymbol{l} = -2qℓ$. В начале 2-го участка поперечная сила имеет величину, как и в конце первого

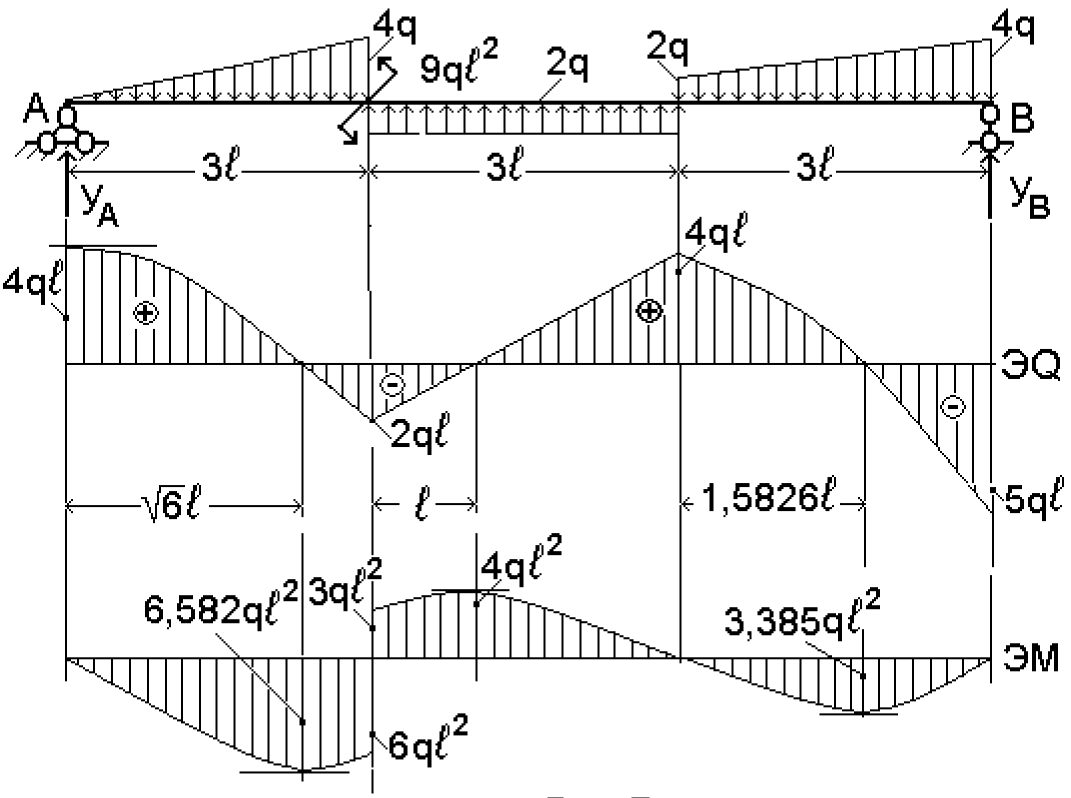

Рис. 7

участка. Площадь эпюры нагрузки на участке положительная. Поэтому поперечная сила в конце 2-го участка равна: $Q(3\boldsymbol{l}) = -2q\boldsymbol{l} + 2q\cdot 3\boldsymbol{l} = 4q\boldsymbol{l}$. Такое же значение имеет поперечная сила в начале 3- го участка. Площадь эпюры нагрузки на участке отрицательная. Поэтому при вычислении Q(z) её нужно вычитать. Тогда в конце 3-го участка Q(z) равна: $Q(3\boldsymbol{l}) = 4q\boldsymbol{l} - (2+4)q/2\cdot 3\boldsymbol{l} =$ $= -5q\ell$.

Ординаты поперечной силы на концах 1-го участка соединяем кривой − квадратной параболой, имеющей экстремум (вершину) в начале участка. Ординаты поперечной силы на 2 –м участке соединяем прямой, а на 3-м снова кривой − это квадратная парабола, но без экстремума в начале участка. Эпюра Q(z) показана на рис. 7,б.

Замечаем, что эпюры поперечной силы на всех участках знакопеременны. Следовательно, для окончательного построения этих эпюр нужно найти положения «нулевых» сечений.

Участок 1. Расстояние, в котором поперечная сила равна нулю, вычисляем по формуле (2.4). Получаем

$$L_O = 3\ell\sqrt{2\cdot 4\ell/4q\cdot 3\ell} = \sqrt{6}\,\ell.$$

Участок 2. Расстояние от левого конца участка до сечения, в котором Q(z) равна нулю, находим по формуле (1.3). Получаем

$$L_O = 2q\ell/2q = \ell.$$

Участок 3. Сначала находим размер L_O. Для этого воспользуемся формулой (4.6). Получаем:

$$L_O = \sqrt{2\cdot 4q\ell\cdot 3\ell/2q + (3\ell)^2} = \sqrt{21}\,\ell = 4{,}5826\ell.$$

Теперь вычисляем расстояние от начала участка до «нулевого» сечения:

$$L_O - \mathbf{a} = 4{,}5826\ell - 3\ell = 1{,}5826\ell.$$

Полученные концевые ординаты соединяем кривой, которая имеет нулевое значение в сечении на расстоянии $1{,}5826\ell$ от начала участка.

Строим эпюру M(z). Теперь рассуждаем так.

1. Участок 1. Изгибающий момент в начале участка $M_O = 0$ нулю, а в конце – «плюс» $6q\ell^2$ (по принятому правилу знаков). Площадь эпюры поперечной силы, заключённая между началом участка и «нулевым сечением» имеет знак положительный. Поэтому в формуле (2.7) второе слагаемое берём со знаком плюс. M(z) на этом участке изменяется по закону кубической параболы и имеет экстремум, так как поперечная сила на этом участке в сечении при $L_{O1} =$ $= 2{,}4495\ell$ равна нулю. Вычислив его по формуле (2.7), получаем

$$\max M = 0 + \sqrt{8\cdot(4q\ell)^3\cdot 3\ell/9\cdot 4q} = 4\sqrt{2}\,q\ell^2 = 6{,}532q\ell^2.$$

Полученные три ординаты соединяем кривой; это кубическая парабола с экстремумом в указанном выше сечении, т.е. так, как изображено на рис. 7, в.

2. Участок 2. В начале 2 го участка изгибающий момент равен «минус» $3q\ell^2$, а в конце участка – 0. Площадь эпюры поперечной силы, расположенная между началом участка и «нулевым сечением» отрицательная. Следовательно, второе слагаемое в формуле (1.5) берём со знаком «плюс». На участке M(z) имеет экстремум в сечении $L_{O2} = \ell$. Найдем его по этой же формуле. Получаем:

$$\min M = -3q\ell^2 - (2q\ell)^2/2\cdot 2q = -4q\ell^2.$$

Три вычисленные ординаты соединяем квадратной параболой, имеющей вершину в указанном выше сечении, т.е. так, как показано на рис. 7, в.

3. <u>Участок 3</u>. В начале и конце участка изгибающие моменты равны нулю. Площадь эпюры поперечной силы, расположенная между началом участка и «нулевым сечением» положительная. Поэтому в формуле (4.9) второе слагаемое берем с плюсом. Но изгибающий момент, изменяясь по закону кубической параболы, на участке имеет экстремум, так как Q(z) в сечении $L_{O3} = 4{,}5826\ell$ равна нулю. Вычислив его по формуле (4.9), получаем:

$$\max M = 0 + 4q\ell(\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{21}\ell - 3\ell) + \tfrac{1}{3}\cdot 2q\cdot 3\ell(\sqrt{21}\ell - 3\ell) = 3{,}385q\ell^2.$$

Вычисленные три ординаты соединяем кривой так чтобы в указанном выше сечении эпюра M(z) имела бы экстремум, т.е. так, как показано на рис. 7, в.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов /А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – 4-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1075. – 654 с.

2. Александров, А.В. Сопротивление материалов: учебник для вузов /А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2001. – 560 с.

3. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебник для вузов / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 407 с.

4. Сопротивление материалов: учебник для вузов / под ред. Г.С. Писаренко. – 3-е изд., испр. и доп. – Киев, Высшая школа, 1973. – 671 с.

5. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов /Н.М. Беляев; под ред. В.К. Кочурина. – 11-е изд., стереотипное. – М.: Наука, 1968. – 352 с.

6. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для вузов / под ред. А.В. Александрова. – М.: Стройиздат, 1977. – 335 с.

7. Икрин, В.А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости: учебник для вузов / В.А. Икрин. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ. 2005. – 510 с.

8. Широков, В Н. Эпюры внутренних силовых факторов: учебное пособие / В.Н. Широков. – Челябинск: ЧПИ, 1975. – 95 с.

9. Икрин, В.А. Эпюры внутренних силовых факторов: учебное пособие для самостоятельной работы / В.А. Икрин, В.Н. Широков. – Челябинск: ЧПИ, 1988. – 69 с.

10. Розин, Л.А. Расчет статически определимых стержневых систем: учебное пособие / Л.А. Розин, И.А. Константинов, В.А. Смелов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. − 228 с.

11. Агеева С.А. К вопросу об определении экстремальных значений изгибающих моментов / С.А. Агеева, В.Ф Сбитнев / Наука ЮУрГУ: материалы 61-й научной конференции. Секции технических наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – Т. 1. – С. 40–43.