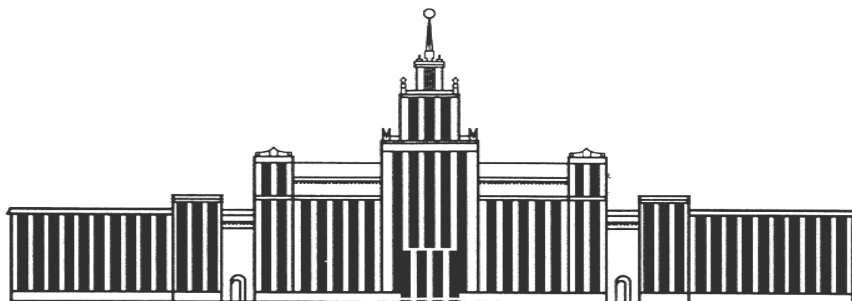


---

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

---



---

---

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

---

624.04(07)  
С605

В.И. Соломин

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.  
ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

---

Челябинск  
2010

---

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет

624.04(07)  
С605

В.И. Соломин

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.  
ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2010

УДК [642.04:512.64] (075.8)  
С605

*Одобрено учебно-методической комиссией  
архитектурно-строительного факультета*

*Рецензенты:*

**Позин Б.М.**, доктор технических наук, профессор, главный конструктор направления ООО «ГСКБ ЧТЗ»;

**Шматков С.Б.**, кандидат технических наук, профессор, директор ООО ПТИ «Спецжелезобетонпроект»

**Соломин, В.И.**  
С605      Метод конечных элементов. Плоские стержневые системы: учебное пособие / В.И. Соломин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 73 с.

В пособии излагаются основы метода конечных элементов на примере плоских стержневых систем. Приведены необходимые сведения из теории матриц. Пособие предназначено для студентов, изучающих строительную механику. Оно может быть полезно для преподавателей, читающих этот курс, а также для аспирантов.

УДК [642.04:512.64] (075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	5
ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
1. СТАТИЧЕСКАЯ И КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МАТРИЦЫ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ СТАТИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	
1.1. Уравнения равновесия. Статическая матрица .....	8
1.2. Уравнения неразрывности деформаций. Матрица деформаций ....	9
1.3. Принцип двойственности статических и кинематических уравнений .....	9
2. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	
2.1. Матрицы собственной жесткости типовых элементов .....	10
2.1.1. Шарнирный элемент .....	10
2.1.2. Комбинированный элемент .....	10
2.1.3. Защемленный элемент .....	11
3. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	
3.1. Шарнирный (ферменный) элемент .....	12
3.2. Комбинированный элемент .....	14
3.3. Защемленный элемент .....	18
4. НАГРУЗКИ И ВОЗДЕЙСТВИЯ .....	21
4.1. Нагрузки (силовые воздействия) .....	21
4.2. Температурные воздействия .....	22
4.3. Осадки опор .....	23
5. ПОРЯДОК РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ	
5.1. Приступая к расчету .....	23
5.2. Построение матриц жесткости стержней .....	24
5.3. Построение глобальной матрицы жесткости и уравнений равно- весия узлов .....	24
5.4. Определение усилий в стержнях .....	24
6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ	
6.1. Ферма из двух стержней .....	25
6.2. Рама из двух стержней .....	28
6.3. Рама из трех стержней .....	31
6.4. Балка .....	35

6.5. Ферма из нескольких стержней .....	39
6.6. Комбинированная стержневая система .....	43
6.7. Балка с податливой опорой .....	48
6.8. Рама. Расчет на осадку опоры .....	51
6.9. Рама. Расчет на температурное воздействие .....	56
7. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (МП) И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ) .....	59
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	60
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	
Приложение 1. Усилия в однопролетных балках .....	61
Приложение 2. Матрицы жесткости стержней. Формулы усилий .....	62
Приложение 3. Некоторые элементы теории матриц .....	67
ПЗ.1. Виды матриц .....	67
ПЗ.2. Алгебраические операции над матрицами .....	69
ПЗ.3. Примеры .....	70

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$l$  – длина элемента (стержня);

$E$  – модуль упругости материала;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$EA$  – продольная жесткость;

$I$  – момент инерции поперечного сечения;

$EI$  – изгибная жесткость;

$i = EI/l$  – изгибная погонная жесткость;

$A$  – статическая матрица;

$B$  – кинематическая матрица;

$k$  – матрица собственной жесткости конечного элемента;

$z$  – локальная степень свободы;

$Z$  – глобальная степень свободы;

$Z$  – матрица глобальных степеней свободы;

$s$  – усилие в стержне (продольная сила, изгибающий момент, поперечная сила);

$S$  – матрица усилий;

$s_0$  – усилия от нагрузок, приложенных непосредственно к стержням;

$r$  – силы, действующие в связях, наложенных на стержень;

$F$  – матрица нагрузок;

$(M)$ ,  $(Q)$ ,  $(N)$  – эпюры внутренних сил;

$\lambda$  – податливость опоры.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) находит применение в различных областях техники. Он позволяет решать задачи консолидации, массопереноса, теплопроводности, механики сплошных сред и др.

В строительной механике он стал основным методом расчета усилий и перемещений, возникающих в сооружениях при различных воздействиях. Сейчас практически все проектные строительные организации выполняют расчеты, пользуясь пакетами прикладных программ, такими как Lira Windows, MicroFe, Scad, Ansys, NASTRAN, Cosmos и др. В основе всех этих программ лежит МКЭ.

Поэтому его изучение студентами строительных специальностей предусмотрено Государственным образовательным стандартом. В большинстве вузов это уже делается, однако зачастую ограничиваются обучением практического применения тех или иных пакетов, в то время как освоению самого метода конечных элементов не уделяется должного внимания.

Методу конечных элементов посвящена обширная литература. Здесь указаны лишь некоторые источники, с которыми изучающему МКЭ по мнению автора полезно ознакомиться в первую очередь. Это монография О. Зенкевича и И. Чанга [1], учебник А.В. Даркова и Н.Н. Шапошникова [2], методические пособия: Р.А. Хечумова с соавторами [3], С.Б. Синицына и М.Г. Ванюшенкова [4, 5].

Настоящее пособие имеет целью помочь усвоить идею МКЭ на примере плоских стержневых систем. Ограничиваясь плоскими стержневыми системами, можно наиболее доходчиво изложить основы метода конечных элементов. Усвоивший эти основы без особых усилий поймет, как решаются и пространственные задачи.

Пособие рассчитано на студентов, уже знакомых с методом перемещений. В МКЭ также как и в методе перемещений неизвестными являются углы поворотов и линейные перемещения узлов.

Перемещения определяются из условий равновесия узлов, сформулированных в виде уравнений, которые называются каноническими уравнениями

$$\mathbf{K} \mathbf{Z} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{K}$  – матрица жесткости стержневой системы;  $\mathbf{Z}$  – матрица перемещений узлов;  $\mathbf{F}$  – матрица нагрузок.

МКЭ позволяет рассчитывать практически любые стержневые системы: рамы, фермы, балки, комбинированные конструкции. Расчеты могут выполняться при различных воздействиях: силовых и кинематических (например, осадках опор), изменениях температуры. Не имеет значения, является конструкция статически неопределимой или она статически определима.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей, изучающих строительную механику, Оно может быть полезно для преподавателей, читающих этот курс, а также для аспирантов.

Любая плоская стержневая система может быть представлена состоящей из трех типов конечных элементов:

1. *Шарнирный (ферменный) элемент* – это стержень, у которого оба конца имеют шарниры.

2. *Комбинированный элемент* – это стержень, у которого на одном конце заделка, а на другом, шарнир.

3. *Защемленный элемент* – стержень, у которого оба конца защемлены.

Для расчета стержневой системы методом конечных элементов необходимо предварительно построить матрицы жесткости элементов перечисленных типов. Заметим, что вместо нескольких конечных элементов можно построить один, обладающий матрицей жесткости, включающей все возможные варианты закрепления концов стержня. Однако это привело бы к нежелательному увеличению общего числа неизвестных.

Матрицы жесткости отдельных стержней и стержневой системы в целом включают в себя следующие группы уравнений: равновесия, неразрывности деформаций и физические уравнения.

Переходя к построению матриц жесткости типовых элементов, остановимся на таких понятиях как статическая матрица, матрица неразрывности деформаций (кинематическая матрица), матрица жесткости, а также принцип двойственности статических и кинематических уравнений.



# 1. СТАТИЧЕСКАЯ И КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МАТРИЦЫ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ СТАТИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 1.1. Уравнения равновесия. Статическая матрица

Рассмотрим ферму, нагруженную силами  $F_1$  и  $F_2$ , действующими в направлении возможных перемещений нагруженного узла (рис. 1.1).

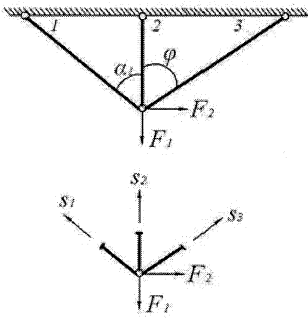


Рис. 1.1

Вырезая узел и проектируя силы на вертикаль и горизонталь, получаем:

$$\begin{aligned} F_1 &= s_1 \cos \alpha + s_2 + s_3 \cos \varphi, \\ F_2 &= s_1 \sin \alpha - s_3 \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\text{или } \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 & \cos \varphi \\ \sin \alpha & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 & \cos \varphi \\ \sin \alpha & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $A$  – статическая матрица, выражающая внешние узловые силы через усилия в стержнях фермы.

В качестве другого примера построения статической матрицы рассмотрим раму, изображенную на рис. 1.2. Возможными перемещениями в данном случае являются угол поворота жесткого узла и линейное перемещение горизонтального элемента. Направления нагрузок  $F_1$  и  $F_2$  приняты соответствующими возможным перемещениям: по часовой стрелке и слева направо соответственно, тогда положительные изгибающие моменты  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  вращают стержни по часовой стрелке.

Из условий равновесия узла и горизонтального элемента получаем:

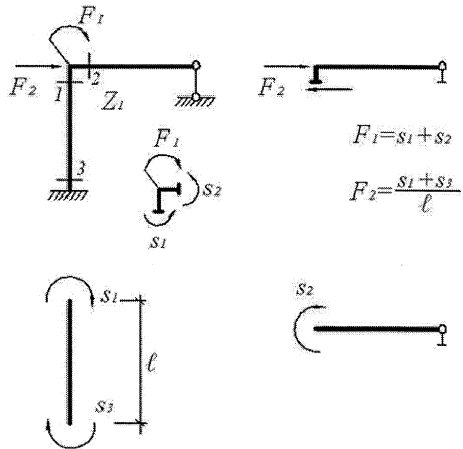


Рис. 1.2. К построению статической матрицы рамы

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/l & 0 & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в данном примере статическая матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}.$$

### 1.2. Уравнения неразрывности деформаций. Матрица деформаций

Когда происходят перемещения узлов  $\mathbf{Z}$  стержневой системы, перемещаются концы стержней, сходящихся в этих узлах, изменяются длины стержней ( $e$ ).

Уравнения неразрывности деформаций устанавливают связь между перемещениями  $\mathbf{Z}$  узлов системы и деформациями ( $e$ ) стержней.

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 1.3. Подвижный узел этой фермы имеет две степени свободы  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Задавая перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$ , получаем соответственно:

$$\begin{aligned} e_1 &= Z_1 \cos \alpha, & e_1 &= Z_2 \sin \varphi, \\ e_2 &= Z_1, & e_2 &= 0, \\ e_3 &= Z_1 \cos \varphi, & e_3 &= -Z_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\text{или } \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение неразрывности деформаций, следовательно, матрица деформаций в данном случае

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

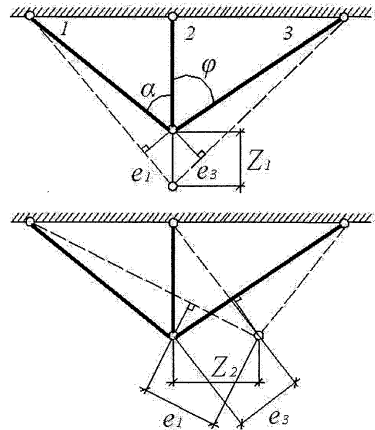


Рис. 1.3

### 1.3. Принцип двойственности статических и кинематических уравнений

Сравнивая матрицы (1.1) и (1.2), видим, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \text{ или } \mathbf{B} = \mathbf{A}^T, \quad (1.3)$$

то есть матрицы статических и кинематических уравнений оказываются транспонированными в отношении друг друга.

Используя это свойство матриц, уравнение неразрывности деформаций можно записать так

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T \mathbf{Z},$$

где  $\mathbf{D}$  – матрица деформаций;  $\mathbf{Z}$  – матрица перемещений.

Хотя равенство (1.3) получено для частной конструкции, оно является справедливым для любой линейно деформированной системы.

Это свойство линейно деформируемых систем называется *принципом двойственности статических и геометрических уравнений*. Оно широко используется при построении расчетных уравнений, поскольку получить статическую матрицу гораздо проще, чем кинематическую.

Доказательство этого принципа можно найти, например в [2, 4, 6].

## 2. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Матрицы собственной жесткости типовых элементов

Матрицы собственной жесткости связывают линейные деформации стержней или углы поворотов их концов ( $e$ ) с соответствующими усилиями ( $s$ ).

#### 2.1.1. Шарнирный элемент

При осевом растяжении–сжатии линейная деформация стержня (рис. 2.1) определяется по формуле, известной из курса сопротивления материалов.

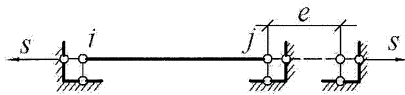


Рис. 2.1

$$e = \frac{sl}{EA} \text{ или } s = \left( \frac{EA}{l} \right) e.$$

$$\text{Следовательно, } \mathbf{k}_{\text{ш}} = \left[ \frac{EA}{l} \right], \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{k}_{\text{ш}}$  – собственная матрица жесткости шарнирного стержня;  $E$  – модуль упругости;  $l$  – длина стержня;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $s$  – усилие в стержне;  $e$  – удлинение стержня.

#### 2.1.2. Комбинированный элемент

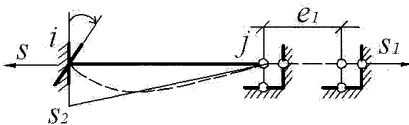


Рис. 2.2

Для того чтобы повернуть заземленный конец (рис. 2.2) на величину ( $e_2$ ), к нему нужно приложить усилие ( $s_2$ ). Формула, связывающая

$$\text{усилие и перемещение } s_2 = \frac{3EI}{l} e_2,$$

взята из таблиц однопролетных балок метода перемещений (прил. 1).

В этом стержне могут иметь место и продольная сила ( $s_1$ ) и изгибающий момент ( $s_2$ ), поэтому усилия в нем равны

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

где матрица собственной жесткости комбинированного элемента

$$\mathbf{k}_k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

### 2.1.3. Защемленный элемент

При повороте левого узла на угол  $e_2$  на концах этого стержня (рис. 2.3) возникают усилия

$$s_2 = 4ie_2 \text{ и } s_3 = 2ie_2,$$

при повороте правого узла на угол  $e_3$ , получаем

$$s_2 = 2ie_3, \quad s_3 = 4ie_3.$$

Эти формулы также взяты из таблиц однопролетных балок метода перемещений (см. прил. 1). Выражения усилий, возникающих в элементе от угловых деформаций, запишем в матричной форме

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

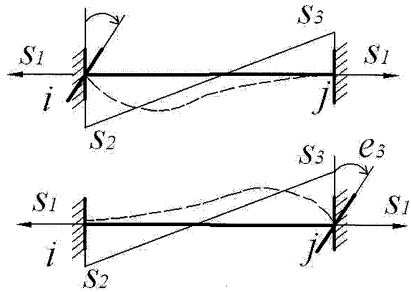


Рис. 2.3

В этом стержне имеют место и продольные деформации, следовательно, уравнение равновесия элемента имеет вид

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 2i \\ 0 & 2i & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 2i \\ 0 & 2i & 4i \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $k_3$  – матрица жесткости защемленного элемента.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 3.1. Шарнирный (ферменный) элемент

Это элемент, на концах которого имеются шарниры. На рис. 3.1 изображены: *a* – расчетная схема элемента; *b* – возможные локальные перемещения его концов ( $z_1, \dots, z_4$ ); *c* – усилия в связях, наложенных на стержень ( $r_1, \dots, r_4$ ) и усилие в стержне ( $s_1$ ).

Чтобы получить статическую матрицу рассмотрим равновесие узлов *i* и *j*. Получаем:

$$\text{в узле } i: \quad r_1 = -s_1 \cos \alpha, \quad r_2 = -s_1 \sin \alpha;$$

$$\text{в узле } j: \quad r_3 = s_1 \cos \alpha, \quad r_4 = s_1 \sin \alpha.$$

Перепишем эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot s_1, \quad \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{A}_m$  – статическая матрица шарнирного элемента.

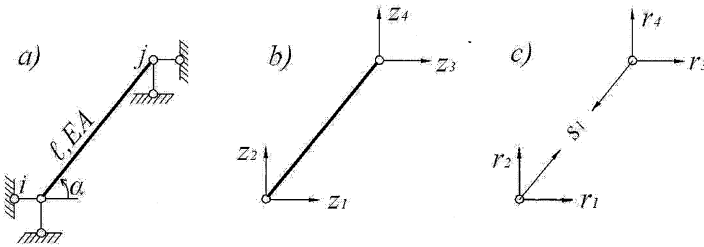


Рис. 3.1

Матрица деформаций стержня в соответствии с (1.3) имеет вид

$$\mathbf{A}_m^T = [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha].$$

Геометрический смысл элементов этой матрицы изображен на рис 3.2 (опорные стержни не показаны).

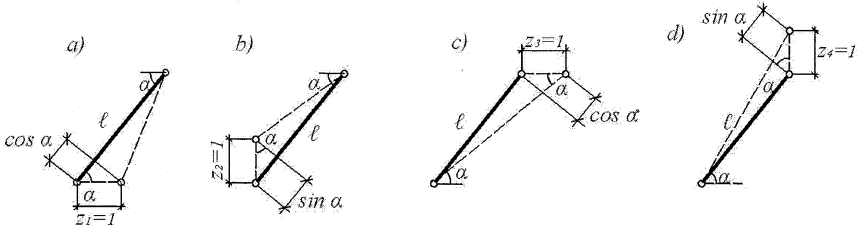


Рис. 3.2

Поскольку формула внутренней жесткости  $\mathbf{k}_{\text{м}}$  стержня известна (2.1), получаем усилие в стержне

$$s_1 = \left( \frac{EA}{l} \right) [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T,$$

или

$$s_1 = \mathbf{k}_{\text{м}} \mathbf{A}_{\text{м}}^T \mathbf{Z}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{Z}$  – матрица узловых перемещений.

Поставив (3.2) в (3.1), выражаем усилия в связях через узловые перемещения

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{EA}{l} \right) \cdot [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

После перемножения матриц получаем

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Обозначим

$$\mathbf{K}_{\text{м}} = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

или

$$\mathbf{K}_{\text{м}} = \mathbf{A}_{\text{м}} \mathbf{k}_{\text{м}} \mathbf{A}_{\text{м}}^T,$$

где  $\mathbf{K}_ш$  – матрица жесткости шарнирного стержня. Ее элементы суть усилия в связях, возникающие при единичных перемещениях узлов. Например, при  $z_1=0, z_2=1, z_3=z_4=0$ , получаем (3.4):  $r_{12} = \left(\frac{EA}{l}\right) \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $r_{22} = \left(\frac{EA}{l}\right) \sin^2 \alpha$ ,  $r_{23} = -\left(\frac{EA}{l}\right) \cdot \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $r_{24} = -\left(\frac{EA}{l}\right) \sin^2 \alpha$ .

Элементы этой матрицы можно получить путем геометрических построений. Такое построение (рис. 3.3) сделано для первой строки (или первого столбца) матрицы, множитель  $EA/l$  опущен.

Аналогичные построения можно сделать и для других элементов – комбинированного и защемленного.

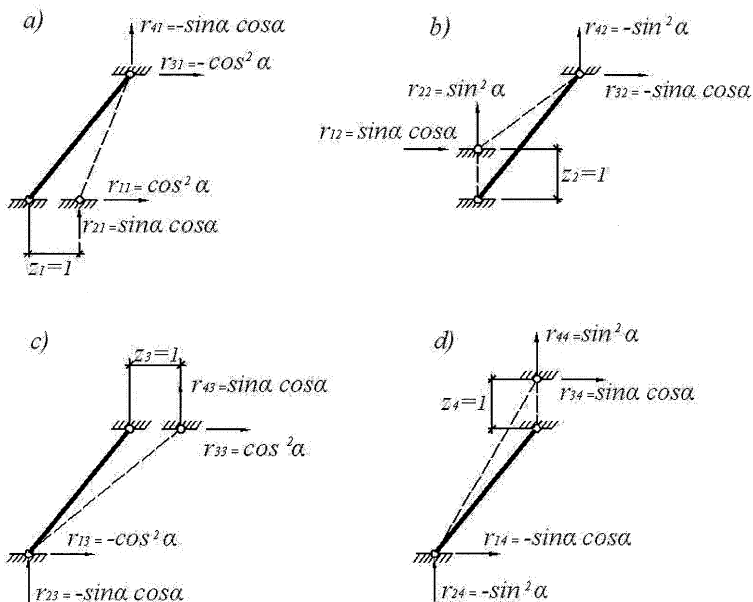


Рис. 3.3

### 3.2. Комбинированный элемент

Это стержень, один конец которого заделан, а другой является шарниром. На рис. 3.4 изображены: *a* – расчетная схема элемента; *b* – возможные локальные перемещения узлов ( $z_1, \dots, z_5$ ); *c* – усилия в стержне ( $s_1$  и  $s_2$ ); *d* – реакции в связях ( $r_1, \dots, r_5$ ).

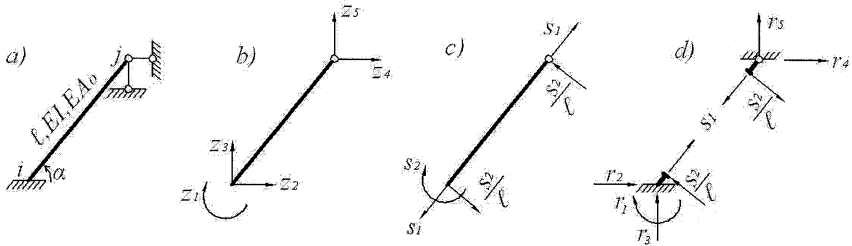


Рис. 3.4

Чтобы получить статическую матрицу рассмотрим равновесие узлов  $i$  и  $j$ .

Узел  $i$ :

Узел  $j$ :

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &\Rightarrow r_1 = s_2; & \sum X = 0 &\Rightarrow r_4 = s_1 \cos \alpha - \frac{s_2}{l} \sin \alpha; \\ \sum X = 0 &\Rightarrow r_2 = -s_1 \cos \alpha + \frac{s_2}{l} \sin \alpha; & \sum Y = 0 &\Rightarrow r_5 = s_1 \sin \alpha + \frac{s_2}{l} \cos \alpha. \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow r_3 = -s_1 \sin \alpha - \frac{s_2}{l} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Перепишем эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{A}_k$  – статическая матрица комбинированного элемента.

Матрица деформаций стержня в соответствие с (1.3) имеет вид

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k^T = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}.$$



Имея формулу внутренней жесткости элемента (2.2), находим усилия в стержне

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \frac{\sin\alpha}{l} & -\frac{\cos\alpha}{l} & -\frac{\sin\alpha}{l} & \frac{\cos\alpha}{l} \end{bmatrix} \cdot [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5]^T.$$

После перемножения матриц

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha \\ 3i & \frac{3i}{l}\sin\alpha & -\frac{3i}{l}\cos\alpha & -\frac{3i}{l}\sin\alpha & \frac{3i}{l}\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

или

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{k}_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{Z}. \quad (3.8)$$

Поставив (3.7) в (3.6), имеем

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{l} \\ -\sin\alpha & -\frac{\cos\alpha}{l} \\ \cos\alpha & -\frac{\sin\alpha}{l} \\ \sin\alpha & \frac{\cos\alpha}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \frac{\sin\alpha}{l} & -\frac{\cos\alpha}{l} & -\frac{\sin\alpha}{l} & \frac{\cos\alpha}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц получаем уравнение, связывающее усилия в связях, наложенных на стержень, с перемещениями его узлов (3.9) и матрицу жесткости комбинированного элемента (3.10).

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{3i}{l} \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ -\frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Обозначим

$$\mathbf{K}_K = \begin{bmatrix} 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{3i}{l} \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ -\frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

или

$$\mathbf{K}_K = \mathbf{A}_K \mathbf{k}_K \mathbf{A}_K^T.$$

где  $\mathbf{K}_K$  — матрица жесткости комбинированного элемента.

### 3.3. Защемленный элемент

Это стержень, у которого оба конца защемлены. На рис. 3.5 изображены: *a* – расчетная схема элемента; *b* – возможные локальные перемещения узлов ( $z_1, \dots, z_6$ ); *c* – усилия в стержне ( $s_1, \dots, s_3$ ); *d* – (реакции) в связях ( $r_1, \dots, r_6$ ).

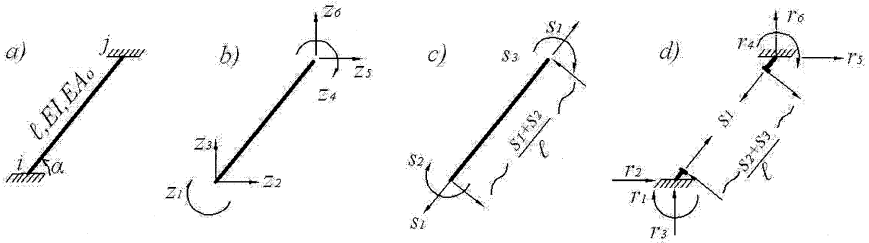


Рис. 3.5

Чтобы получить статическую матрицу стержня рассмотрим равновесие его узлов *i* и *j*.

Узел *i*:

$$\sum M = 0 \Rightarrow r_1 = s_2;$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow r_2 = -s_1 \cos \alpha + \frac{s_2 + s_3}{l} \sin \alpha;$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow r_3 = -s_1 \sin \alpha - \frac{s_2 + s_3}{l} \cos \alpha.$$

Узел *j*:

$$\sum M = 0 \Rightarrow r_4 = s_3;$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow r_5 = s_1 \cos \alpha - \frac{s_2 + s_3}{l} \sin \alpha;$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow r_6 = s_1 \sin \alpha + \frac{s_2 + s_3}{l} \cos \alpha.$$

Запишем эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{A}_3$  – статическая матрица защемленного элемента.

Матрица деформаций защемленного стержня имеет вид

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & 0 & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} & 1 & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}.$$

Имея формулу внутренней жесткости (2.3)

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 2i \\ 0 & 2i & 4i \end{bmatrix},$$

находим усилия в стержне по формуле

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{k}_3 \mathbf{A}_3^T \mathbf{Z}.$$

Перемножив матрицы, получаем усилия, возникающие в связях, наложенных на стержень, при перемещениях его узлов

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

После подстановки (3.12) в (3.11) и перемножения матриц получаем усилия в связях (3.13) и матрицу жесткости (3.14) защемленного элемента.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ -\frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Обозначим

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ -\frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

или

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{A}_3^T.$$

где  $\mathbf{K}_3$  – матрица жесткости защемленного элемента.

## 4. НАГРУЗКИ И ВОЗДЕЙСТВИЯ

На первом этапе расчета методом конечных элементов все нагрузки приводятся к узловым.

Ниже даются значения узловых нагрузок и усилий ( $s_0$ ) при различных воздействиях.

### 4.1. Нагрузки (силовые воздействия)

Расчет выполняется в два этапа: сначала определяются усилия ( $s$ ) от узловых нагрузок, а затем к ним добавляются усилия от нагрузок, примененных непосредственно к стержням ( $s_0$ ). Окончательные значения усилий получаются сложением

$$(s_{ок}) = (s) + (s_0).$$

Чтобы пояснить сказанное, обратимся к рис. 4.1, где изображены:  $a$  – расчетная схема рамы;  $b$  – искомые (глобальные) перемещения узлов;  $c$  – эпюра ( $s_0$ ) или грузовая эпюра метода перемещений;  $d$  – узловые нагрузки или матрица нагрузок.

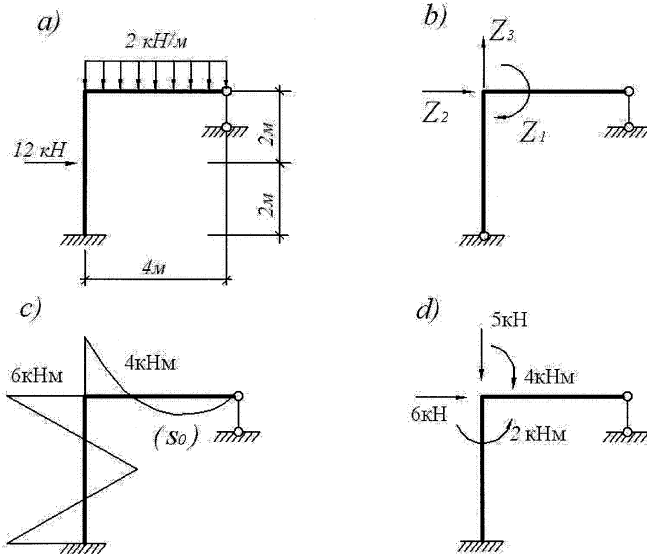


Рис. 4.1

Усилия ( $s_0$ ) при других воздействиях можно найти в прил. 1.

Вектор нагрузок

$$\mathbf{F} = [-2 \ 6 \ -5]^T.$$

## 4.2. Температурные воздействия

Если температура среды, в которой находится статически неопределимая стержневая система, изменяется, в ее стержнях появляются усилия. При расчете таких систем принято считать, что по длине стержня температура остается постоянной, а по высоте поперечного сечения изменяется по линейному закону.

Пусть с одной стороны стержня действует температура  $t_1$ , а с другой – температура  $t_2$ . Разложим ее на составляющие:  $t_0$  – температура нейтрального слоя стержня (если нейтральный слой делит высоту поперечного сечения  $h$  пополам  $t_0 = (t_1 + t_2)/2$ ). Другая составляющая – перепад температур по высоте сечения – равна  $\Delta t = (t_1 - t_2)$ .

При равномерном нагреве на  $t_0$  деформация стержня составит  $\alpha t_0$ , но, поскольку концы его закреплены, и длина стержня меняться не может, в нем возникает продольная сила  $N = EA\alpha t_0$ .

От перепада температур  $\Delta t = (t_1 - t_2)$  стержень искривляется, но так как оба конца его заделаны и поворачиваться не могут, в нем возникает изгибающий момент  $M = \alpha EI \Delta t / h$ , где  $h$  – высота поперечного сечения. Если один из концов стержня шарнирный, максимальный момент в стержне будет равен  $M = 3\alpha EI \Delta t / 2h$  (см. прил. 1).

Продольные силы, изгибающие моменты и узловые нагрузки, возникающие в элементе при изменении температуры, показаны на рис. 4.2.

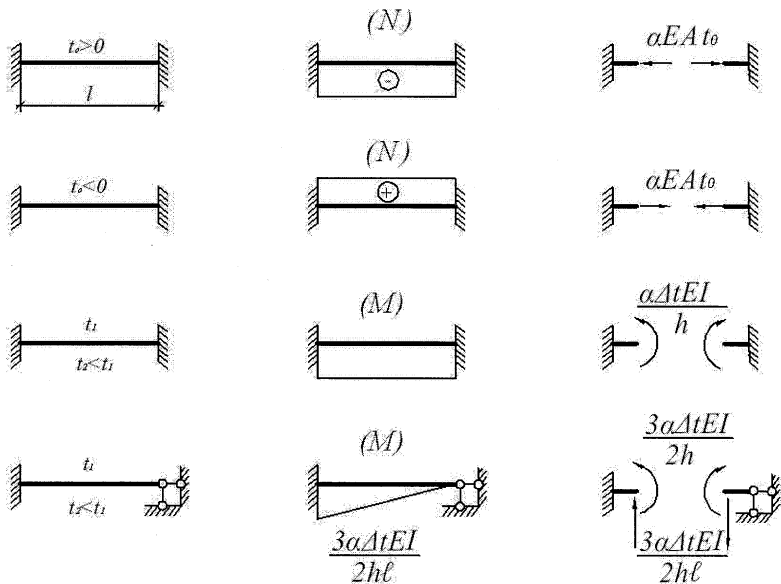


Рис. 4.2

### 4.3. Осадки опор

Осадки основания и, следовательно, опор (фундаментов) возникают обычно вследствие его замачивания или промораживания. Они обнаруживаются и фиксируются. В этом случае требуется определить дополнительные усилия в уже существующей конструкции, когда осадки заданы.

Формулы, по которым в этом случае могут быть определены узловые нагрузки, даны в прил. 1.

В другом случае, при расчете конструкций на упругом основании, величина осадок заранее неизвестна, должна быть задана податливость основания  $\lambda$ . Она определяется экспериментально и, следовательно, расчетчику задается обычно в виде дискретной функции. В этом случае основание моделируется стержнями единичной длины, находящимся под действием единичной нагрузки. Тогда получаем  $\lambda = 1 / EA_{\text{мс}}$  или  $EA_{\text{мс}} = 1 / \lambda$ , где  $EA_{\text{мс}}$  – продольная жесткость моделирующего стержня. Этот прием позволяет свести расчет конструкции на упругом основании к расчету стержневой системы.

## 5. ПОРЯДОК РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

**5.1. Приступая к расчету**, целесообразно составить сетку координат ее узлов. Имея эти координаты, можно найти длины стержней и необходимые угловые функции (рис. 5.1) по известным формулам.

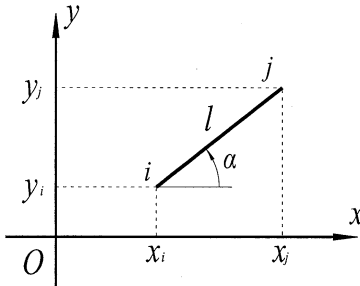


Рис. 5.1

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{l},$$

$$\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{l}.$$

Разумеется, такой подход необходим, только тогда, когда число узлов достаточно велико. В более простых случаях эти операции можно сделать вручную.

Далее следует пронумеровать узлы заданной стержневой системы и их перемещения, которые называются глобальными. Когда  $l$ ,  $\alpha$  и жесткости стержней определены, можно переходить к построению матриц жесткости.



## 5.2. Построение матриц жесткости стержней

Формулы матриц (3.5), (3.10), (3.14) и рисунки к ним приведены выше и, кроме того, даны в прил. 2. Там же имеются выражения реакций в связях (3.6), (3.11) и (3.13), где показаны и пронумерованы локальные перемещения концов стержня.

Эти номера следует заменить номерами глобальных перемещений узлов заданной системы, к которым примыкает данный стержень и, зная  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , найти элементы матрицы жесткости стержня. Если при этом какие-либо из перемещений окажутся равными нулю, строки и столбцы, соответствующие номерам этих перемещений из матрицы жесткости стержня следует убрать. Описание этой процедуры приведено в примере 6.1.

Порядок матрицы жесткости каждого стержня должен быть равен порядку глобальной матрицы. Это достигается путем изъятия или добавления в матрицу стержня нулевых строк и столбцов.

## 5.3. Построение глобальной матрицы жесткости и уравнений равновесия узлов

Глобальная матрица есть сумма матриц жесткости стержней. Складывая матрицы жесткости стержней, следует иметь в виду, что их место в глобальной матрице определяется номерами их концов.

Чтобы найти перемещения  $\mathbf{Z}$ , надо решить следующую систему уравнений  $\mathbf{KZ} = \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{K}$  – глобальная матрица,  $\mathbf{Z}$  – вектор перемещений,  $\mathbf{F}$  – вектор нагрузок.

## 5.4. Определение усилий в стержнях

Когда система канонических уравнений решена, и перемещения узлов  $\mathbf{Z}$  найдены, определяются усилия ( $s$ ), возникающие от перемещений, вызванных узловыми нагрузками. Это делается для каждого стержня отдельно по формулам (3.2), (3.7) и (3.11), которые содержатся в прил. 2.

Окончательные значения усилий определяются как сумма усилий

$$(s_{\text{ок}}) = (s_0) + (s),$$

где  $(s_0)$  – усилия от нагрузок, приложенных непосредственно к стержням.

Теперь можно построить эпюры внутренних сил и сделать проверки решения.

## 6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

### 6.1. Ферма из двух стержней

Требуется методом конечных элементов определить усилия в стержневой системе, изображенной на рис. 5.1. На рисунке показаны: *a* – расчетная схема; *b* – возможные глобальные перемещения ( $Z_1$  и  $Z_2$ ) узла *B*; *c* – возможные локальные перемещения ( $z_1, z_2, z_3, z_4$ ) концов стержней; *d* – реакции ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ ) и усилие  $s_1$ .

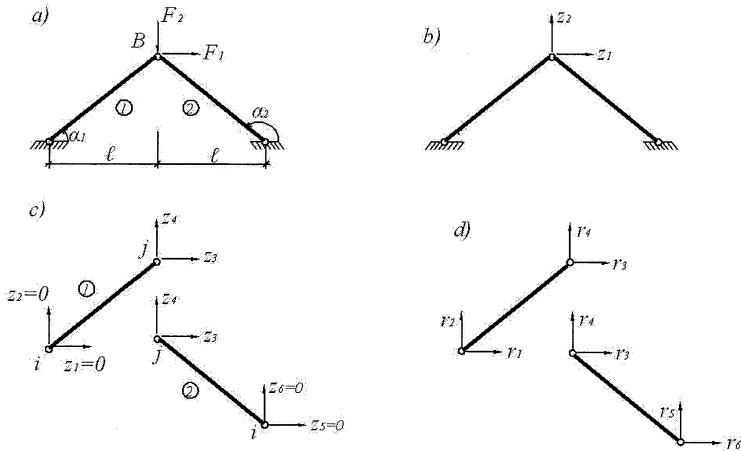


Рис. 6.1

Дано:  $F_1, F_2, l, \alpha_1 = \alpha, A_1 = EA_2 = EA$ . Вектор нагрузок  $\mathbf{F} = [F_1 \ -F_2]^T$ .

Знаки нагрузок определяются принятыми направлениями глобальных степеней свободы.

Для решения задачи необходимо найти перемещения узла *B* фермы. Они находятся из условий равновесия узла

$$\mathbf{KZ} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{K}$  – матрица жесткости фермы,  $\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_2]$  – матрица перемещений узла фермы,  $\mathbf{F}$  – вектор внешних сил.

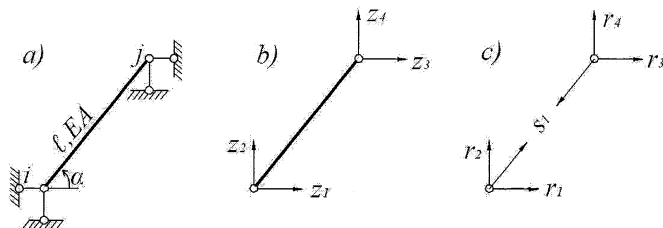
Матрица жесткости фермы равна сумме матриц жесткости стержней

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2.$$

#### Матрицы жесткости стержней

Составим вначале матрицу жесткости первого стержня. Учитывая, что узел *i* расположен на его левом конце,  $\alpha_1 = \alpha, z_1 = z_2 = 0$ , длина стержня есть  $l/\cos\alpha$ .

Это шарнирный элемент, для построения матрицы его жесткости обратимся к прил. 2. **Шарнирный элемент**



Выражение узловых реакций через узловые перемещения

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрица жесткости шарнирного стержня

$$\mathbf{K}_m = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Усилие в стержне

$$s_1 = \left( \frac{EA}{l} \right) [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T. \quad (3.2)$$

Покажем, что при  $z_1 = z_2 = 0$ , в матрице (3.5) можно убрать (вычеркнуть) две первых строки и два первых столбца. Рассмотрим уравнение (3.4). Очевидно, что при перемножении матриц два первых столбца матрицы исчезнут. В остающихся третьем и четвертом столбцах можно отбросить (вычеркнуть) две первых строки, поскольку реакции  $r_1$  и  $r_2$  в уравнениях равновесия узла B участвовать не будут.

Переносим эти выводы в (3.5), получаем матрицу жесткости первого стержня (не забудем: длина первого стержня равна  $l/\cos \alpha$ ).

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^3 \alpha & \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Аналогично запишем матрицу жесткости стержня 2, принимая во внимание, что  $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^3 \alpha & -\sin \alpha \cos^2 \alpha \\ -\sin \alpha \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

При решении следующих задач процедура построения матриц жесткости стержней не будет излагаться столь же подробно, поскольку она всегда одинакова, а данные для других типов стержней можно найти в прил. 2.

**Матрица жесткости фермы. Уравнение равновесия узла**

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 \cos^3 \alpha & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Уравнения равновесия (3.4) узла

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 \cos^3 \alpha & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix},$$

откуда получаем:  $Z_3 = \frac{F_1 l}{2EA \cos^3 \alpha}$ ,  $Z_4 = -\frac{F_2 l}{2EA \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$ .

**Определение усилий**

Усилия  $S$  в стержнях 1 и 2 можно найти по формуле (3.2). В нашем примере

$$S = \frac{EA \cos \alpha}{l} [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \cdot \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}.$$

Так усилие в стержне 1 равно

$$s_1 = \frac{EA_0 \cos \alpha}{l} [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \cdot \begin{bmatrix} \frac{F_1 l}{2EA_0 \cos^3 \alpha} \\ -\frac{F_2 l}{2EA_0 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} \end{bmatrix} = \frac{F_1}{2 \cos \alpha} - \frac{F_2}{2 \sin \alpha};$$

усилие в стержне 2

$$s_2 = \frac{EA_0 \cos \alpha}{l} [-\cos \alpha \quad \sin \alpha] \cdot \begin{bmatrix} \frac{F_1 l}{2EA_0 \cos^3 \alpha} \\ -\frac{F_2 l}{2EA_0 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} \end{bmatrix} = -\frac{F_1}{2 \cos \alpha} - \frac{F_2}{2 \sin \alpha}.$$

### Проверка решения

Ферма является статически определимой, поэтому усилия в ней найдем из условий равновесия узла В (рис. 6.2)

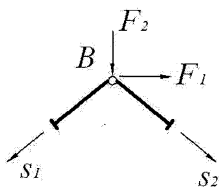


Рис. 6.2

$$\begin{aligned} \sum X &= F_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \cos \alpha = 0, \\ F_1 - \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2 \sin \alpha} \cos \alpha - \frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2 \sin \alpha} \cos \alpha &= 0, \\ \sum Y &= F_2 + (s_1 + s_2) \sin \alpha = 0, \\ F_2 + \frac{F_1}{2 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{F_2}{2} - \frac{F_1}{2 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{F_2}{2} &= 0. \end{aligned}$$

### 6.2. Рама из двух стержней

Требуется определить усилия в раме, изображенной на рис. 6.3, где показаны: *a* – расчетная схема; *b* – глобальные перемещения ( $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$ ).

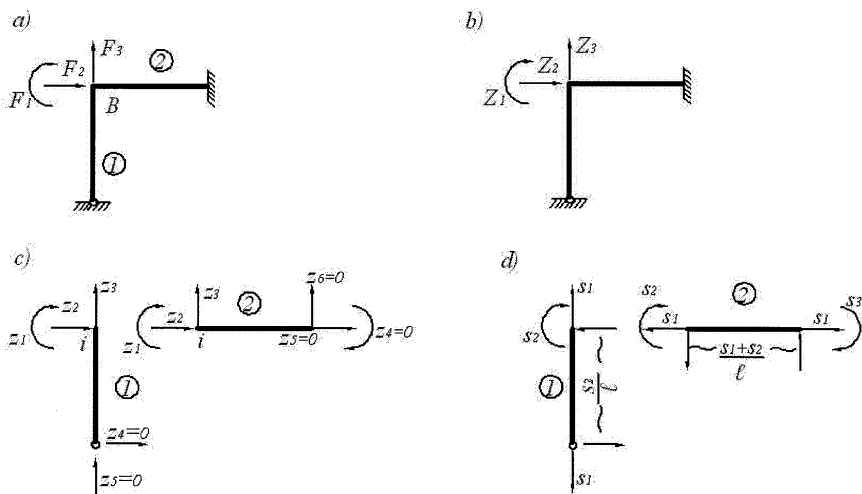


Рис. 6.3

Дано: нагрузки  $F_1, F_2, F_3$ ; длина стержней  $l$ ; жесткости стержней:  $EI, EA = EI/l^2$ . Вектор внешних нагрузок  $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3]^T$ . Знаки нагрузок определяются принятыми направлениями глобальных степеней свободы.

Для решения задачи необходимо найти перемещения узла В рамы. Они находятся из условий равновесия узла

$$\mathbf{KZ} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{K}$  – матрица жесткости рамы;  $\mathbf{Z}$  – матрица перемещений узла рамы.

Матрица жесткости рамы равна сумме матриц жесткости образующих ее стержней

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2.$$

Поскольку в этой раме три неизвестных глобальных перемещения, матрица  $\mathbf{K}$  имеет третий порядок, такой же порядок должны иметь и матрицы стержней.

### *Матрицы жесткости стержней*

*Стержень 1.* Это «комбинированный элемент» (рис. 3.4), матрица жесткости которого известна (3.10). Строя эту матрицу помещаем узел  $i$  стержня в узел  $B$  рамы. Тогда  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ . Учтем, что  $z_4 = z_5 = 0$ . Внеся эти данные в (3.10), получаем

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 3i & -\frac{3i}{l} & 0 \\ -\frac{3i}{l} & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

*Стержень 2.* Это «защемленный элемент», матрица которого также известна (3.13). При построении его матрицы жесткости конец  $i$  располагаем в узле  $B$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ . Учтем, что  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Внеся эти данные в (3.13), получаем

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 4i & 0 & -\frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

Как видим, в данном примере матрицы жесткости стержней имеют порядок равный порядку глобальной матрицы, поэтому операции с нулевыми строками и столбцами не потребовались.

### *Матрица жесткости рамы. Уравнения равновесия*

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 7i & -\frac{3i}{l} & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{3i}{l} & \frac{4i}{l^2} & 0 \\ -\frac{6i}{l} & 0 & \frac{13i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

При выполнении дальнейших расчетов примем:  $l = 10$  м,  $F_1 = 1$  кН,  $F_2 = 5$  кН,  $F_3 = 5$  кН. Тогда уравнение равновесия узла

$$\mathbf{KZ} = \mathbf{F}$$

имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,003 & -0,006 \\ -0,003 & 0,004 & 0 \\ -0,006 & 0 & 0,013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем:  $EI Z_1 = 310,9$  кНм;  $EI Z_2 = 3581$  кН;  $EI Z_3 = 1819$  кН.

### Определение усилий

*Стержень 1.* Усилия в этом стержне определяются по формуле (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} & \frac{3i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5]^T.$$

Учитывая, что  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ ,  $z_4 = z_5 = 0$ ,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ ,  $l = 10$ , получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,001 & 0 & -0,001 \\ 0,3 & -0,03 & 0 & 0,03 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} [310,9 \ 3581 \ 1819 \ 0 \ 0]^T,$$

откуда:  $s_1 = 1,819$  кН;  $s_2 = -14,18$  кНм.

*Стержень 2.* Усилия в нем определяются из уравнения (3.11)

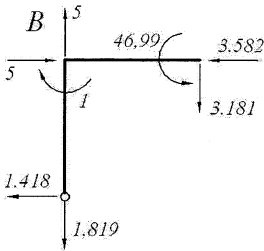
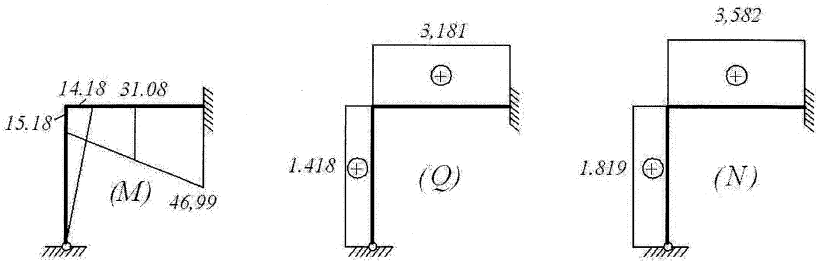
$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix}.$$

В данном случае:  $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ , поэтому

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,001 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0 & -0,006 & 0,2 & 0 & 0,06 \\ 0,2 & 0 & -0,06 & 0,4 & 0 & 0,06 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} [310,9 \ 3581 \ 1819 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

откуда:  $s_1 = -3,581$  кН;  $s_2 = 15,18$  кНм;  $s_3 = -46,99$  кН.

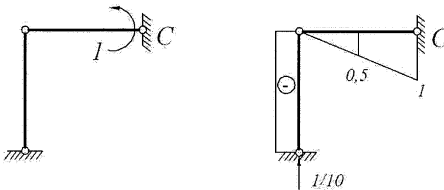
## Эюры внутренних сил



Проверка равновесия рамы

1.  $\Sigma X = 5 - 3,582 - 1,418 = 0$ ,
2.  $\Sigma Y = 5 - 3,181 - 1,819 = 0$ ,
3.  $\Sigma M_B = 1 - 46,99 + 3,181 \cdot 10 + 1,418 \cdot 10 = 0$ .

Рис. 6.4



Кинематическая проверка  
(рис. 6.5)

Угол поворота сечения  $C$  равен:  
 $\Theta_C = 10/6E \cdot (4 \cdot 0,5 \cdot 31,08 + 1 \cdot 46,99) -$   
 $- 10^2 / EI \cdot (1,819 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,1) = 0$ .

В дальнейшем будут выполняться только статические проверки.

Рис. 6.5

### 6.3. Рама из трех стержней

Требуется определить усилия в раме, изображенной на рис. 6.6:  $a$  – расчетная схема, на которой обозначены номера узлов, даны размеры и нагрузки;  $b$  – глобальные перемещения  $Z_1, \dots, Z_5$ ;  $c$  – узловые нагрузки;  $d$  – грузовая эюра моментов ( $s_0$ ). Вектор нагрузок  $F = [45 \ 30 \ -75 \ 0 \ -45]$ .



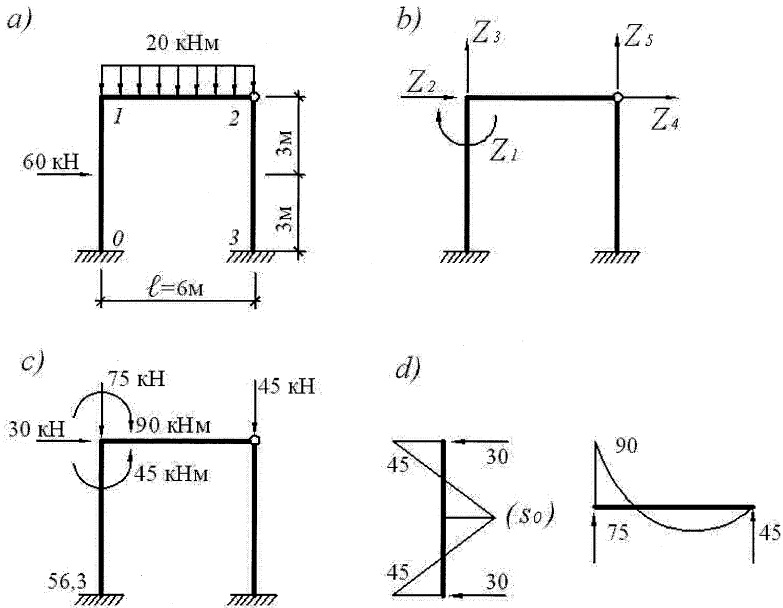


Рис. 6.6

Здесь мы имеем пять неизвестных, следовательно, глобальная матрица и матрицы жесткости стержней должны быть пятого порядка.

**Матрицы жесткости стержней**

*Стержень 01.* Обратимся к уравнению (3.13) и рис. 3.5 прил. 2. Поместим узел  $i$  в узел 1 рамы, тогда угол  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ . Учтем, что  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Подставив эти данные в (3.13) и, введя обозначения  $i = EI/l$  и  $EA = EI/l^2$ , получаем

$$\begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} & 0 \\ \frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{l^2} \end{bmatrix}$$

Увеличим ее порядок до пятого, тогда она приобретает вид

$$\mathbf{K}_{01} = \begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 12.* Формируя эту матрицу, обратимся к уравнению (3.10) и рис. 3.4. Поместим узел  $i$  в узел 1 рамы, тогда угол  $\alpha=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ ,  $z_1=Z_1$ ,  $z_2=Z_2$ ,  $z_3=Z_3$ ,  $z_4=Z_4$ ,  $z_5=Z_5$ . Подставив эти данные в (3.10) получаем матрицу жесткости стержня 12

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 3i & 0 & -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l} \\ 0 & \frac{i}{l^2} & 0 & -\frac{i}{l^2} & 0 \\ -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 & -\frac{3i}{l^2} \\ 0 & -\frac{i}{l^2} & 0 & \frac{i}{l^2} & 0 \\ \frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & \frac{3i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

*Стержень 23.* Для формирования этой матрицы обратимся к уравнениям (3.9), (3.10) и рис. 3.4. Поместим узел  $i$  в узел 3 рамы, тогда угол  $\alpha=90^\circ$ ,  $\sin\alpha=1$ ,  $\cos\alpha=0$ . Примем:  $z_4=Z_4$ ,  $z_5=Z_5$ , и, в соответствии с граничными условиями,  $z_1=z_2=z_3=0$ . Подставив эти данные в (3.9), имеем

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

### Матрица жесткости рамы. Уравнение равновесия узлов

Матрица жесткости рамы  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{10} + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23}$ , следовательно,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7i & \frac{6i}{l} & -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & \frac{13i}{l^2} & 0 & -\frac{i}{l^2} & 0 \\ -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{4i}{l^2} & 0 & -\frac{3i}{l^2} \\ 0 & -\frac{i}{l^2} & 0 & \frac{4i}{l^2} & 0 \\ \frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & \frac{4i}{l^2} \end{bmatrix}.$$

Подставляя в эту матрицу  $l = 6$  м, получаем систему уравнений равновесия узлов рамы (канонических уравнений)

$$\begin{bmatrix} 7i & -i & -0,5i & 0 & 0,5i \\ -i & 0,361i & 0 & -0,0278i & 0 \\ -0,5i & 0 & 0,111i & 0 & -0,083i \\ 0 & -0,0278i & 0 & 0,111i & 0 \\ 0,5i & 0 & -0,083i & 0 & 0,111i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -45 \\ -30 \\ 75 \\ 0 \\ 45 \end{bmatrix} = 0.$$

Решением этой системы являются:  $Z_1 = 32,8 \frac{1}{i}$ ,  $Z_2 = 177,4 \frac{1}{i}$ ,  $Z_3 = -2136 \frac{1}{i}$ ,  
 $Z_4 = 44,42 \frac{1}{i}$ ,  $Z_5 = -2150 \frac{1}{i}$ .

### Определение усилий

*Стержень 01.* Это «зашемленный стержень», рис. 3.5. Узел  $i$  стержня находится в узле 1 рамы,  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ . Для определения усилий воспользуемся выражением (3.11). Учтем, что в данном случае:  $l = 6$ ,  $EI/l = i$ ,  $EA/l = i/l^2$ ,  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ .

Подставляя эти значения в (3.11), получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0278 & 0 & 0 & -0,0278 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{1}{i} [32,8 \quad 177,4 \quad -2136 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = \begin{bmatrix} -59,4 \\ -46,18 \\ -111,8 \end{bmatrix}$$

или с учетом  $s_0$ :  $s_1 = -59,4$  кН,  $s_2 = -1,18$  кНм,  $s_3 = -156,8$  кНм.

*Стержень 12.* Это «комбинированный» стержень рис. 3.4. Узел  $i$  стержня находится в узле 1 рамы,  $\alpha=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ . Усилия в этом стержне находятся по выражению (3.7). Поставляя соответствующие значения в (3.7), получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & -0,0278 & 0 & 0,0278 & 0 \\ 3 & 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{1}{i} [32,8 \quad 177,4 \quad 2136 \quad 44,42 \quad -2150]^T = \begin{bmatrix} -3,7 \\ 91,18 \end{bmatrix}.$$

С учетом  $s_0$ :  $s_1 = -3,7$  кН,  $s_2 = 1,18$  кНм.

*Стержень 23.* Это тоже «комбинированный» стержень, узел  $i$  стержня помещен в узел 3 рамы. В этом случае  $\alpha=90^\circ$ ,  $\sin\alpha=1$ ,  $\cos\alpha=0$ . Усилия определяются подстановкой перечисленных данных в (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0278 & 0 & 0,0278 \\ 3 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{i} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 44,42 \quad -2150]^T = \begin{bmatrix} -59,8 \\ -22,21 \end{bmatrix}.$$

### Эпюры внутренних сил

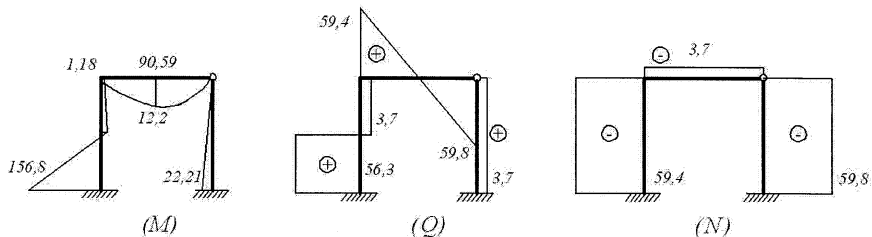


Рис. 6.7

Статическая проверка.

Уравнения равновесия сил, показанных на рис. 6.8,

$$\Sigma X = 60 - 56,3 - 3,7 = 0;$$

$$\Sigma Y = 20 \cdot 6 - 59,4 - 59,8 = 0,8, \text{ погр. } 0,7 \%;$$

$$\Sigma M_C = 20 \cdot 6 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 156,8 + 22,21 - (56,3 + 3,7) \cdot 6 - \\ - 59,4 \cdot 6 = 2,4; \text{ погр. } 0,3 \%.$$

Расчет выполнен верно.

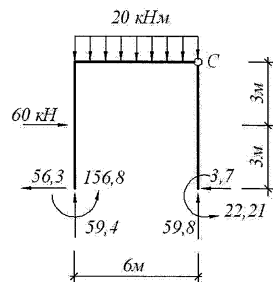


Рис. 6.8

### 6.4. Балка

Требуется определить усилия в балке, изображенной на рис. 6.9, где показаны:  $a$  – расчетная схема, на которой обозначены номера узлов, даны размеры и нагрузки;  $b$  – основная система и глобальные перемещения  $Z_1, Z_2$ ;  $c$  – грузовая эпюра моментов ( $s_0$ ) Вектор нагрузок  $\mathbf{F} = [30 \quad -30]^T$ .

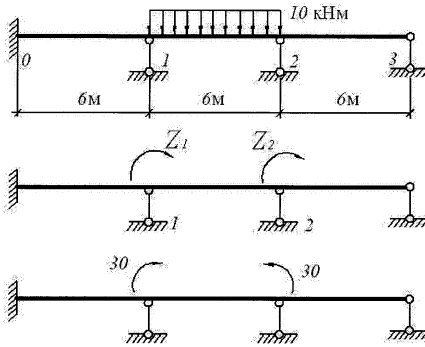


Рис. 6.9

Балка имеет два угловых перемещения ( $Z_1$  и  $Z_2$ ), которые находятся из условий равновесия узлов 1 и 2.

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 30,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = -30,$$

где  $r_{11}$  и  $r_{12}$  – реакции, возникающие от единичного поворота  $Z_1$  в первом и втором узлах соответственно;  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  – реакции, возникающие в первом и втором узлах от единичного поворота  $Z_2$ ; 30 и  $-30$  – реакции в узлах от нагрузки.

### Матрицы жесткости стержней

*Стержень 01.* Это «зашемленный стержень». Для формирования его матрицы воспользуемся выражениями (3.13) и рис. 3.5 прил. 2. Поместим узел  $i$  в узел 1 балки, тогда угол  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ . Примем:  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = z_5 = 0$  и учтем граничные условия:  $z_3 = z_4 = z_6 = 0$ . Подставив эти значения в (3.9) и введя обозначение  $i = EI/l$ , получаем

$$\mathbf{K}_{01} = 4i[1].$$

В данной задаче имеется два неизвестных  $Z_1$  и  $Z_2$  значит, глобальная матрица будет иметь второй порядок и матрицы всех стержней должны быть того же порядка. Таким образом, матрица жесткости стержня 01 есть

$$\mathbf{K}_{01} = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 12.* Это также «зашемленный стержень». Формируя его матрицу, опять воспользуемся выражениями (3.12) и (3.13) и рис. 3.5. Поместим узел  $i$  в узел 1 балки, тогда угол  $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ . Примем:  $z_1 = Z_1$ ,  $z_4 = Z_2$ ,  $z_2 = z_5 = 0$  и учтем граничные условия:  $z_3 = z_6 = 0$ . Подставив эти значения в (3.12) и отбрасывая нулевые строки и столбцы, получаем

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}.$$

*Стержень 23.* Это «комбинированный стержень». Для формирования его матрицы воспользуемся выражениями (3.10) и рис. 3.4 прил. 2. Поместим узел  $i$  в узел 2 балки. Тогда угол  $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $z_1 = Z_2$ ,  $z_2 = z_4 = z_3 = z_5 = 0$ . Подставив эти значения в (3.9), получаем

$$\mathbf{K}_{23} = [1].$$

Здесь  $3i$  – это реакция  $r_{22}$ , возникающая на левом конце стержня 23 при повороте узла 2 на угол  $Z_2 = 1$ , следовательно, матрица жесткости

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3i \end{bmatrix}.$$

**Матрица жесткости балки. Уравнение равновесия узлов**

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23}$ , следовательно,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8i & 2i \\ 2i & 7i \end{bmatrix}.$$

Углы поворота  $Z_1$  и  $Z_2$  находятся из уравнений равновесия узлов балки

$$8Z_1 + 2Z_2 = \frac{30}{i},$$

$$2Z_1 + 7Z_2 = -\frac{30}{i}.$$

Решив эту систему, получаем:  $Z_1 = \frac{5,19}{i}$ ,  $Z_2 = -\frac{5,77}{i}$ .

**Определение усилий**

*Стержень 01.* Для определения усилий в этом стержне воспользуемся уравнением (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{l^2} \cos \alpha & -\frac{i}{l^2} \sin \alpha & 0 & \frac{i}{l^2} \cos \alpha & \frac{i}{l^2} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

В этом стержне:  $s_1 = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $z_4 = Z_1 = \frac{5,19}{i}$ ,  $z_1 = z_2 = z_3 = z_5 = z_6 = 0$ .

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & -\frac{6i}{l} & \frac{6i}{l} \\ 2i & 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5,19}{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10,38 \\ 20,77 \end{bmatrix} \text{ кНм}.$$

*Стержень 12.* В этом стержне:  $s_1 = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $z_1 = Z_1 = \frac{5,19}{i}$ ,  $z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0$  и тоже используется уравнение (3.11).

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} \\ 2i & 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5,19}{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 20,77 \\ 10,38 \end{bmatrix} \text{ кНм.}$$

Стержень 12. В этом стержне:  $s_1=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ ,  $z_4=Z_2=-\frac{5,77}{i}$ ,  $z_1=z_2=z_3=z_5=z_6=0$  и тоже используется уравнение (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} \\ 2i & 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{5,77}{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -11,53 \\ -23,07 \end{bmatrix} \text{ кНм.}$$

Стержень 23. Для определения усилия в этом стержне воспользуемся уравнением (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{l^2} \cos\alpha & -\frac{i}{l^2} \sin\alpha & \frac{i}{l^2} \cos\alpha & \frac{i}{l^2} \sin\alpha \\ 3i & \frac{3i}{l} \sin\alpha & -\frac{3i}{l} \cos\alpha & -\frac{3i}{l} & \frac{3i}{l} \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

В этом стержне:  $s_1=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ ,  $z_1=Z_2=-\frac{5,77}{i}$ ,  $z_2=z_3=z_4=z_5=0$ .

$$s_2 = \begin{bmatrix} 3i & 0 & -\frac{3i}{l} & -\frac{3i}{l} & \frac{3i}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5,77}{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = -17,3 \text{ кНм.}$$

### Эпюры внутренних сил

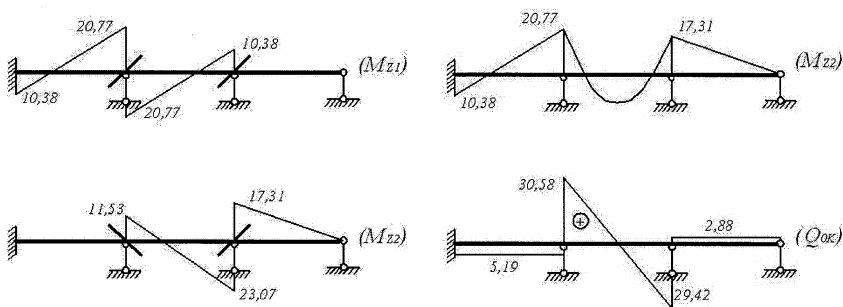


Рис. 6.10

Эпюра ( $M_0$ ) показывает, что узлы балки уравновешены. Сумма вертикальных сил, действующих на балку, равна  $60 - 30,58 - 29,42 = 0$ . Расчет выполнен верно.

## 6.5. Ферма

Требуется определить усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 6.11. На рисунке показаны:  $a$  – расчетная схема и нумерация узлов фермы,  $b$  – возможные глобальные перемещения узлов. Принято, что жесткость всех стержней одинакова  $EA$ , размеры в метрах, нагрузки в кН.

Вектор нагрузок  $\mathbf{F} = [0 \ -7 \ 3 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0]$ .

### Матрицы жесткости стержней

Матрицы жесткости всех стержней фермы могут быть построены, пользуясь выражением (3.5) и рис. 3.1 прил. 2.

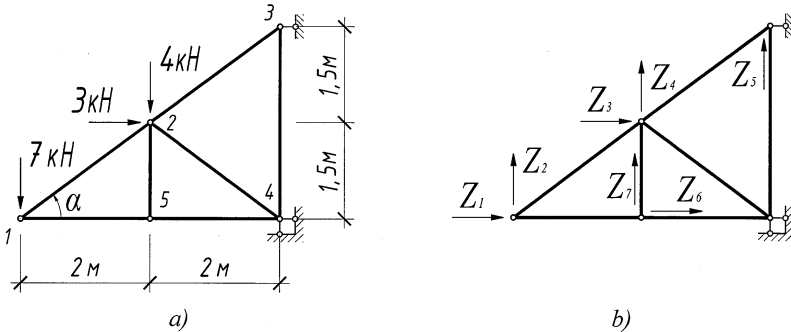


Рис. 6.11

В этой задаче семь неизвестных глобальных перемещений, поэтому матрицу жесткости каждого стержня надо вписать в матрицу  $7 \times 7$ , располагая элементы матрицы стержня соответственно нумерации глобальных перемещений.

Стержень 12.  $l = 2,5$  м, узел  $i$  расположим в узле 1, угол наклона к горизонтальной оси  $\alpha$ ,  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

Подставляя эти данные в (3.5) и учитывая, что  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ ,  $z_4 = Z_4$ , получаем матрицу жесткости стержня 12

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0,256 & 0,192 & -0,256 & -0,192 & 0 & 0 & 0 \\ 0,192 & 0,144 & -0,192 & -0,144 & 0 & 0 & 0 \\ -0,256 & -0,192 & 0,256 & 0,192 & 0 & 0 & 0 \\ -0,192 & -0,144 & 0,192 & 0,144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множитель  $EA$  здесь и далее в этом параграфе опущен.



*Стержень 23.*  $l = 2,5$  м, узел  $i$  расположим в узле 2, угол наклона к горизонтальной оси равен  $\alpha$ ,  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $\cos\alpha = 0,8$ . Подставим эти данные в (3.5), учтем, что  $z_3 = 0$  и отбросим в (3.5) соответствующие столбец и строку. Переходя к глобальным перемещениям  $z_1 = Z_3$ ,  $z_2 = Z_4$ ,  $z_4 = Z_5$ , получаем матрицу жесткости стержня 23

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,256 & 0,192 & -0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,192 & 0,144 & -0,144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,192 & -0,144 & 0,144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, действуя аналогично предыдущему, находим матрицы жесткости остальных стержней.

*Стержень 34.*  $l = 3$  м, узел  $i$  расположим в узле 3, угол наклона к горизонтальной оси равен  $270^\circ$ ,  $\sin\alpha = -1$ ;  $\cos\alpha = 0$ . Подставим эти данные в (3.5) и учтем, что  $z_1 = z_3 = z_4 = 0$ . Обозначив  $z_2 = Z_5$ , получим матрицу жесткости стержня 34

$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 45.*  $l = 2$  м, узел  $i$  расположим в узле 5, угол наклона к горизонтальной оси равен  $0$ ,  $\sin\alpha = 0$ ;  $\cos\alpha = 1$ . Подставляя эти данные в (3.5), учтем, что  $z_3 = z_4 = 0$ . В этом стержне вызывает реакции только одно перемещение  $z_1 = Z_6$ . Следовательно,

$$\mathbf{K}_{45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 15.*  $l=2$  м, узел  $i$  расположим в узле 1, угол наклона к горизонтальной оси равен  $0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ . После подстановки этих данных в (3.5), видим, что реакции в стержне вызываются только перемещениями  $z_1$  и  $z_3$ . Поскольку  $z_1=Z_1$ ,  $z_3=Z_6$  получаем матрицу стержня 15 в виде

$$K_{15} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 25.*  $l=1,5$  м, узел  $i$  расположим в узле 2, угол наклона стержня к горизонтальной оси  $\alpha_{25}=270^\circ$ ,  $\sin\alpha_{25}=-1$ ;  $\cos\alpha_{25}=0$ . При подстановке в (3.5) видим, что реакции возникают только от  $z_2=Z_4$ ,  $z_4=Z_7$ . Откуда

$$K_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,667 & 0 & 0 & -0,667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,667 & 0 & 0 & 0,667 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 24.*  $l=2,5$  м, узел  $i$  расположим в узле 2, угол наклона к горизонтальной оси  $\alpha_{24}=(270^\circ-\alpha)$ ,  $\sin\alpha_{24}=-0,6$ ;  $\cos\alpha_{24}=0,8$ . Здесь  $z_3=z_4=0$ , а, поскольку  $z_1=Z_3$ ,  $z_2=Z_4$ , получаем

$$K_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,256 & -0,192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,192 & 0,144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### **Матрица жесткости фермы. Уравнение равновесия узлов**

Эта матрица получается сложением матриц жесткости стержней

$$K = K_1 + \dots + K_7.$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,756 & 0,192 & -0,256 & -0,192 & 0 & -0,5 & 0 \\ * & 0,144 & -0,192 & -0,144 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0,768 & 0,192 & -0,192 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1,099 & -0,144 & 0 & -0,667 \\ * & * & * & * & 0,477 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0,667 \end{bmatrix}.$$

Матрица симметричная, ее нижняя часть не показана. Когда эта матрица построена, можно составить уравнения равновесия узлов фермы

$$\begin{bmatrix} 0,756 & 0,192 & -0,256 & -0,192 & 0 & -0,5 & 0 \\ * & 0,144 & -0,192 & -0,144 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0,768 & 0,192 & -0,192 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1,099 & -0,144 & 0 & -0,667 \\ * & * & * & * & 0,477 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0,667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем следующие значения перемещений узлов:  $Z_1 = 37,33$ ;  $Z_2 = -168,0$ ;  $Z_3 = -33,92$ ;  $Z_4 = -24,40$ ;  $Z_5 = -21,02$ ;  $Z_6 = 18,67$ ;  $Z_7 = -24,40$ . Множитель  $1/EA$  опущен.

### Определение усилий в стержнях

Эта операция выполняется для каждого стержня отдельно, используя выражение

$$s_1 = \left( \frac{EA}{l} \right) [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha] [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T. \quad (3.2)$$

Данные о стержнях, входящие в эту формулу, приведены выше.

#### Стержень 12

$$s_{12} = 0,4[-0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4]^T.$$

После подстановки перемещений концов стержня

$$s_{12} = 0,4[-0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [37,33 \quad -168,02 \quad -33,92 \quad -24,40]^T = 11,67.$$

#### Стержень 23

$$s_{23} = 0,4[-0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [Z_3 \quad Z_4 \quad 0 \quad Z_5]^T.$$

После подстановки перемещений концов стержня

$$s_{23} = 0,4[-0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [-33,92 \quad -24,40 \quad 0 \quad -21,02]^T = 11,67.$$

*Стержень 34*

$$s_{34} = 0,333[0 \ 1 \ 0 \ -1][0 \ Z_5 \ 0 \ 0]^T.$$

После подстановки перемещений концов стержня

$$s_{34} = 0,333[0 \ 1 \ 0 \ -1][0 \ -21,02 \ 0 \ 0]^T = -7,007.$$

*Стержень 45*

$$s_{45} = 0,5[-1 \ 0 \ 1 \ 0][Z_6 \ Z_7 \ 0 \ 0]^T.$$

После подстановки перемещений

$$s_{45} = 0,5[-1 \ 0 \ 1 \ 0][18,67 \ -24,40 \ 0 \ 0]^T = -9,33.$$

*Стержень 15*

$$s_{15} = 0,5[-1 \ 0 \ 1 \ 0][Z_1 \ Z_2 \ Z_6 \ Z_7]^T.$$

После подстановки перемещений

$$s_{15} = 0,5[-1 \ 0 \ 1 \ 0][37,33 \ -168,02 \ 18,67 \ -24,40]^T = -9,33.$$

*Стержень 25*

$$s_{25} = 0,667[0 \ 1 \ 0 \ -1][Z_3 \ Z_4 \ Z_6 \ Z_7]^T.$$

После подстановки перемещений

$$s_{25} = 0,667[0 \ 1 \ 0 \ -1][-33,92 \ -24,40 \ 18,67 \ -24,40]^T = 0.$$

*Стержень 24*

$$s_6 = 0,4[-0,8 \ 0,6 \ 0,8 \ -0,6][Z_3 \ Z_4 \ 0 \ 0]^T$$

После подстановки перемещений получаем

$$s_6 = 0,4[-0,8 \ 0,6 \ 0,8 \ -0,6][-33,92 \ -24,40 \ 0 \ 0]^T = 5.$$

Ферма является статически определимой, поэтому в правильности полученного решения можно легко убедиться.

## 6.6. Комбинированная стержневая система

Требуется определить усилия в стержневой системе, изображенной на рис. 6.12, где показаны: *a* – расчетная схема, на которой цифрами 1, 2, 3, 4 показаны номера узлов, приведены размеры и нагрузки; *b* – искомые перемещения узлов конструкции ( $Z_1 \dots Z_5$ ); *c* – узловые значения нагрузок; *d* – грузовая эпюра моментов  $s_0$ .

Заданы следующие величины. Площади поперечных сечений стержней:  $A_{21} = A_{23} = 40 \text{ см}^2$ ,  $A_{24} = 8 \text{ см}^2$ ; моменты инерции:  $I_{21} = I_{23} = 1000 \text{ см}^4$ . Модуль упругости  $E$  одинаков для всех стержней.

Вектор нагрузок (рис. 6.10с) имеет вид

$$\mathbf{F} = [-167 \ 0 \ -6,5 \ 0 \ -1,5]^T,$$

где момент 165 дан в кН·см, для приведения в соответствие с размерностью моментов инерции ( $\text{см}^4$ ).

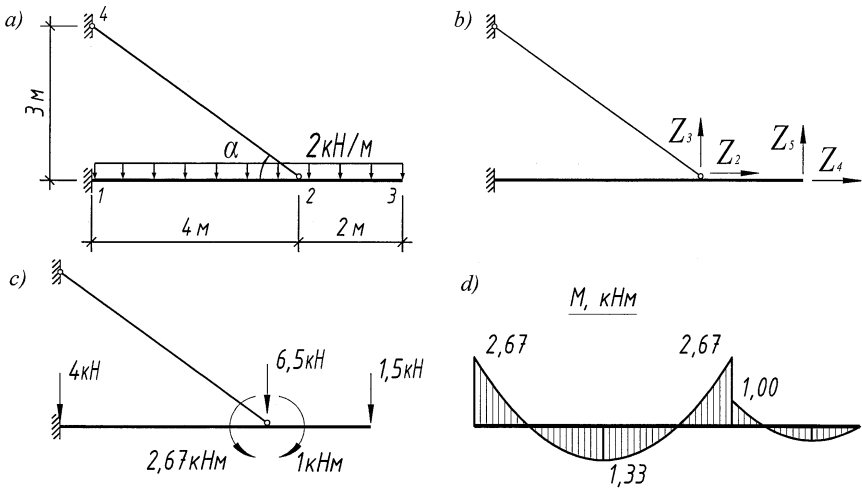


Рис. 6.12

### Матрицы жесткости стержней

**Стержень 12.** Это защемленный стержень, его длина 4 м, площадь поперечного сечения  $A = 40 \text{ см}^2$ , момент инерции  $I = 1000 \text{ см}^4$ , узел  $i$  помещен в узел 2 стержневой системы,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ .

Подставим значения  $l$ ,  $A$ ,  $I$ , учтем граничные условия  $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 0$  и перейдем от локальных перемещений к глобальным:  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ .

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0,0375 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0375 & 0 & 0,000187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости стержня не может быть выше пятого порядка, так как в этой задаче пять неизвестных. Следовательно, матрица стержня 12 есть

$$\mathbf{K}_{21} = E \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0,0375 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0375 & 0 & 0,000187 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Стержень 23.* Это комбинированный стержень, его длина 2 м, площадь поперечного сечения  $A = 40 \text{ см}^2$ , момент инерции  $I = 1000 \text{ см}^4$ , узел  $i$  помещен в узел 2 стержневой системы,  $\sin\alpha = 0$ ,  $\cos\alpha = 1$ . Подставляя эти значения в (3.9) и учитывая, что  $z_1 = Z_1$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $z_3 = Z_3$ ,  $z_4 = Z_4$ ,  $z_5 = Z_5$  получаем:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & 0 & -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 & -\frac{3i}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & \frac{3i}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}.$$

Далее, подставляя значения  $l$ ,  $A$ ,  $I$  и переходя к глобальным перемещениям, находим

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 15 & 0 & -0,075 & 0 & 0,075 \\ 0 & 0,2 & 0 & -0,2 & 0 \\ -0,075 & 0 & 0,000375 & 0 & -0,000375 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,075 & 0 & -0,000375 & 0 & 0,000375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица жесткости стержня 23 есть

$$\mathbf{K}_{23} = E \begin{bmatrix} 15 & 0 & -0,075 & 0 & 0,075 \\ 0 & 0,2 & 0 & -0,2 & 0 \\ -0,075 & 0 & 0,000375 & 0 & -0,000375 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,075 & 0 & -0,000375 & 0 & 0,000375 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 24.* Это шарнирный стержень, для построения его матрицы обратимся к выражению (3.5). Длина 5 м, площадь поперечного сечения  $A = 8 \text{ см}^2$ , узел  $i$  помещен в узел 2 стержневой системы,  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $\cos\alpha = -0,8$ .

Подставляя в (3.5)  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $\cos\alpha = -0,8$ ;  $l = 5$  и учитывая граничные условия ( $z_3 = z_4 = 0$ ), получаем:

$$\mathbf{K}_{24} = E \begin{bmatrix} 0,01024 & -0,00768 & 0 & 0 \\ -0,00768 & 0,00576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы локальной матрицы стержня 24 разместим в глобальной матрице в соответствии с нумерацией глобальных перемещений. Поскольку глобальная матрица имеет пятый порядок, добавим в локальной матрице пятый (нулевой) столбец и пятую нулевую строку. Таким образом, матрица жесткости стержня 24 принимает вид

$$\mathbf{K}_{24} = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01024 & -0,00768 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00768 & 0,00576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### **Матрица жесткости конструкции. Уравнения равновесия узлов**

Эта матрица получается сложением матриц жесткости стержней  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{23} + \mathbf{K}_{24}$ . Складывая матрицы, получаем

$$\mathbf{K} = E \begin{bmatrix} 25,0000 & 0 & -0,0375 & 0 & 0,0750 \\ 0 & 0,3102 & -0,00768 & -0,2 & 0 \\ -0,0375 & -0,00768 & 0,006322 & 0 & -0,000375 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,0750 & 0 & -0,000375 & 0 & 0,000375 \end{bmatrix}.$$

Уравнение равновесия узлов

$$\begin{bmatrix} 25,0000 & 0 & -0,0375 & 0 & 0,0750 \\ 0 & 0,3102 & -0,00768 & -0,2 & 0 \\ -0,0375 & -0,00768 & 0,006322 & 0 & -0,000375 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,0750 & 0 & -0,000375 & 0 & 0,000375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -167 \\ 0 \\ -6,5 \\ 0 \\ -1,5 \end{bmatrix}.$$

Решив это уравнение, находим

$$Z_1 = 19,3/E, Z_2 = -112,3/E, Z_3 = -1612,3/E, Z_4 = -112,3/E, Z_5 = -9481,4/E.$$

### **Определение усилий**

*Стержень 21.* Это защемленный стержень, обозначения усилий в нем показаны на рис. 3.5с и определяются по формуле (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

Подставим в эту формулу данные стержня:  $l=400$  см,  $A=40$  см<sup>2</sup>,  $I=1000$  см<sup>4</sup>,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=-1$ ; перейдем к глобальным перемещениям и учтем граничные условия, получаем.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 & -0,1 & 0 \\ 10 & 0 & 0,0375 & 5 & 0 & -0,0375 \\ 5 & 0 & 0,0375 & 10 & 0 & -0,0375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19,3 \\ -112,3 \\ -1612,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы и принимая во внимание усилия  $s_0$  (рис. 5.5d), находим:  $s_1 = -11,2$  кН;  $s_2 = 132,6 + 267 = 399,6$  кНсм;  $s_3 = 36 - 267 = -231$  кНсм.

*Стержень 23.* Это комбинированный стержень, обозначения усилий в нем показаны на рис. 3.4с, определяются они по формуле (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha \\ 3i & \frac{3i}{l}\sin\alpha & -\frac{3i}{l}\cos\alpha & -\frac{3i}{l}\sin\alpha & \frac{3i}{l}\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}.$$

Подставим в эту формулу данные стержня 23:  $l=200$  см,  $A=40$  см<sup>2</sup>,  $I=1000$  см<sup>4</sup>,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$  и перейдем к глобальным перемещениям, получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,016 & 0 & 0,016 & 0 \\ 15 & 0 & -0,075 & 0 & 0,075 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19,3 \\ -112,3 \\ -1612,3 \\ -112,3 \\ -9481,4 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы и принимая во внимание усилия  $s_0$  (рис. 5.5d), находим:  $s_1 = 0$ ;  $s_2 = -300,7 - 100 = -400,7$  кНсм.

*Стержень 24.* Это шарнирный стержень, возникающее в нем усилие показано на рис. 3.1с, оно определяется по формуле (3.2)

$$s_1 = \left(\frac{EA}{l}\right) [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha] [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T. \text{ Следовательно,}$$

$$s_1 = \left(\frac{EA}{l}\right) [0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [z_2 \quad z_3 \quad 0 \quad 0]^T =$$

$$= \left(\frac{8}{500}\right) [0,8 \quad -0,6 \quad 0,8 \quad 0,6] [-112,3 \quad -1612,3 \quad 0 \quad 0]^T = 14,04 \text{ кН.}$$



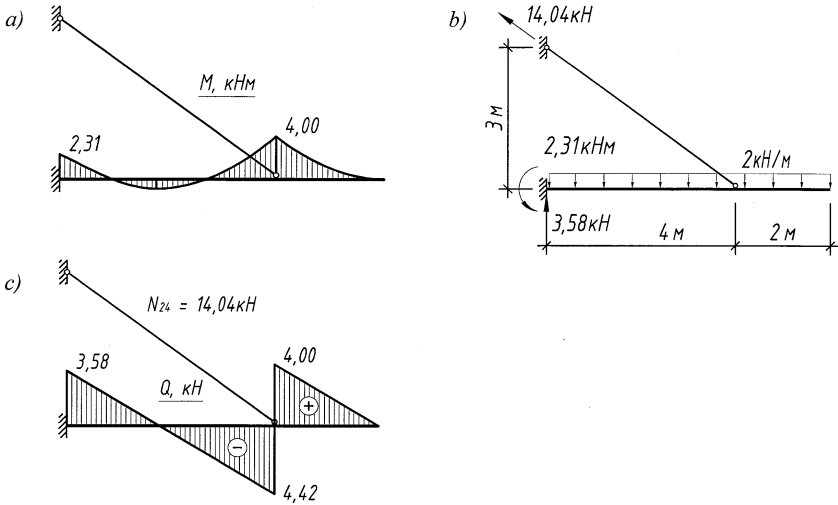


Рис. 6.13

Анализ результатов, показанных на эпюрах ( $M$ ) и ( $Q$ ), свидетельствует о том, что балка находится в равновесии.

### 6.7. Балка с податливой опорой

Требуется определить усилия в балке, изображенной на рис. 6.14, где показаны:  $a$  – расчетная схема, номера узлов, приведены размеры и нагрузки в метрах и кН,  $b$  – искомые перемещения узлов ( $Z_1$ ,  $Z_2$ ),  $c$  – грузовая эпюра моментов  $s_0$ .

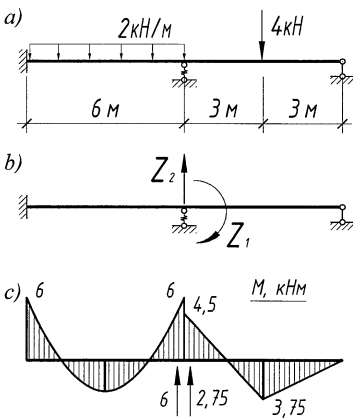


Рис. 6.14

Принято: изгибная жесткость балки –  $EI$ , продольные деформации балки отсутствуют, жесткость податливой опоры (пружины)

$$EA/l = 144i/l^2 = 4i.$$

Вектор нагрузок (рис. 6.14b) имеет вид  $F = [1,5 \ 8,75]^T$ .

Имея в виду рис. 3.5c и 6.14c, напомним матрицы ( $s_0$ ):

Стержень 12

$$(s_0)_{12} = [0 \ -6 \ 6]^T.$$

Стержень 23

$$(s_0)_{23} = [0 \ -4,5]^T.$$

### Матрицы жесткости стержней

*Стержень 12.* Это защемленный стержень, его матрица жесткости получается по формуле (3.13). Узел  $i$  (рис. 3.5) поместим в узел 1 балки. Тогда:  $z_1=z_2=z_3$ . Считая, кроме того, что  $z_5=0$ , вычеркнем соответствующие строки и столбцы. Перейдем от локальных перемещений к глобальным:  $z_4=Z_1$ ,  $z_6=Z_2$  и, учитывая, что  $l=6$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ , получаем матрицу жесткости стержня 12

$$\mathbf{K}_{12} = i \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0,333 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 23.* Это комбинированный стержень. Его матрица жесткости находится по формуле (3.10). Узел  $i$  (рис. 3.4) поместим в узел 2 балки. Тогда:  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ ,  $z_2=z_5=0$ , примем, кроме того,  $z_4=0$ . Исключив из матрицы соответствующие строки и столбцы, при  $l=6$ , получаем:

Примем, что  $z_5=0$  и, учитывая, что  $z_2=z_4=0$ , вычеркнем соответствующие строки и столбцы. Перейдем от локальных перемещений к глобальным:  $z_1=Z_1$ ,  $z_3=Z_2$  и, поскольку  $l=6$ , получаем матрицу жесткости (3.10) стержня

$$\mathbf{K}_{23} = i \begin{bmatrix} 3 & -0,5 \\ -0,5 & 0,083 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 24.* Это пружина, которая представлена шарнирным стержнем с жесткостью  $EA/l=4i$ . Узел  $i$  помещен в узел 2 балки,  $\sin\alpha=-1$ ,  $\cos\alpha=0$ . Подставляя эти значения в (3.9), получаем

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $z_3=z_4=0$ . Удаляя соответствующие строки и столбцы и учитывая, что  $z_1=Z_1$ ,  $z_2=Z_2$ , напишем матрицу жесткости стержня  $\mathbf{K}_{24}=4i[1]$ . Эта матрица должна иметь второй порядок. Дополнив ее нулевой строкой и нулевым столбцом, получаем окончательно

$$\mathbf{K}_{24} = 4i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Матрица жесткости балки. Уравнения равновесия узлов

Складывая матрицы жесткости стержней, получаем матрицу жесткости балки

$$\mathbf{K} = i \begin{bmatrix} 7 & 0,5 \\ 0,5 & 4,417 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений равновесия узлов имеет вид

$$i \begin{bmatrix} 7 & 0,5 \\ 0,5 & 4,417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,75 \end{bmatrix} = 0.$$

Решением этой системы являются:  $Z_1 = -0,0734 / i$ ,  $Z_2 = -1,973 / i$ .

### Определение усилий

*Стержень 12.* Усилия в этом стержне определяются по формуле (3.11). Узел  $i$  (рис. 3.5) находится в узле 1 балки. По условиям задачи:  $z_1 = z_2 = z_3 = z_5 = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $l = 6$ . Кроме того, вспомним, что  $z_4$  есть  $Z_1$ , а  $z_6$  есть  $Z_2$ . Подставляем эти данные в (3.11) и находим

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 0 \ -0,073 \ 0 \ -1,973]^T = [0 \ -2,12 \ -2,27]^T \text{ кНм.}$$

Добавляя к этому результату  $(s_0)_{12}$  получаем окончательно усилия в стержне 12

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = [0 \ -2,12 \ -2,27]^T + [0 \ -6 \ 6]^T = [0 \ -8,12 \ 3,73]^T \text{ кНм.}$$

*Стержень 23.* В данном случае воспользуемся формулой (3.7) и рис. 3.4, помещая узел  $i$  в узел 1 балки. По условиям задачи:  $z_2 = z_4 = z_5 = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $l = 6$ . Кроме того, учтем, что  $z_1$  есть  $Z_1$ , а  $z_3$  есть  $Z_2$ . Подставляем эти данные в (3.7), получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot [-0,073 \ 0 \ -1,973 \ 0 \ 0]^T = [0 \ 0,766]^T \text{ кНм.}$$

Добавляя сюда  $(s_0)_{23} = [0 \ -4,5]^T$  получаем окончательно

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = [0 \ -3,73]^T \text{ кНм.}$$

*Стержень 24.* В этом стержне усилие определяется по формуле (3.2). Узел  $i$  (рис. 3.1) находится в узле 1 балки,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ ,  $z_1 = z_3 = z_4 = 0$ ,  $z_2 = Z_2$ ,  $EA/l = 4i$ . После подстановки этих данных в (3.2) получаем

$$s_1 = 4[0 \ 1 \ 1 \ -1] \cdot [0 \ -1,973 \ 0 \ 0]^T = -7,89 \text{ кН.}$$

Найденные значения усилий позволяют построить эпюры (рис. 6.13) внутренних сил, возникающих в балке.

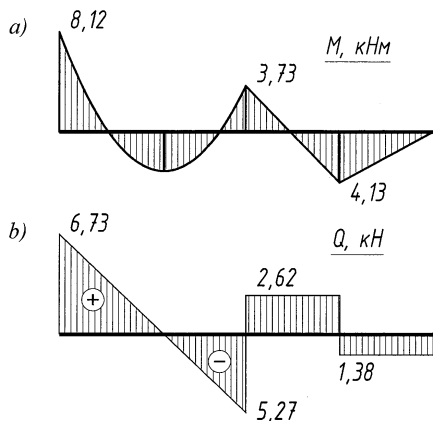


Рис. 6.15

Имея эти эпюры нетрудно увидеть, что балка находится в равновесии, и, следовательно, полученное решение является правильным.

### 6.8. Рама. Расчет на осадку опоры

Требуется определить усилия в стержневой системе, изображенной на рис. 6.16, где показаны:  $a$  – расчетная схема с номерами узлов и осадкой опоры  $\Delta$ ;  $b$  – искомые перемещения узлов ( $Z_1 \dots Z_4$ );  $c$  – эпюра продольной силы ( $s_0$ ) и нагрузка  $F$ , возникающие при осадке опоры.

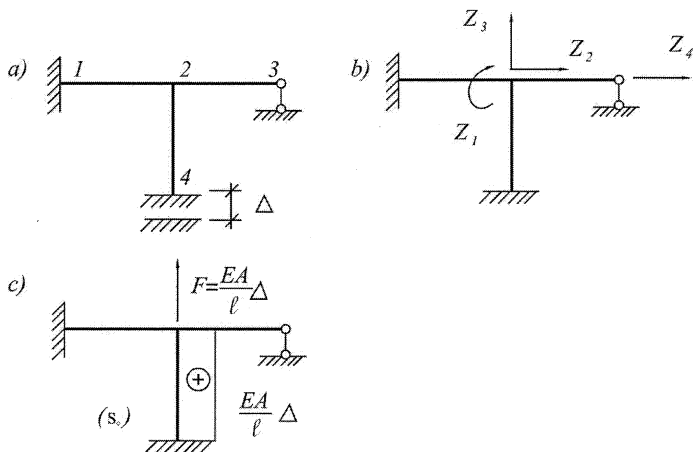


Рис. 6.16

Заданы следующие величины, одинаковые для всех стержней: длина  $l = 600$  см, площадь поперечного сечения  $A = 30 \cdot 20$  см<sup>2</sup>, момент инерции  $I = 45\,000$  см<sup>4</sup>, модуль упругости  $E$ . При этих данных имеют место следующие характеристики жесткости:  $i = \frac{EI}{l} = 75E$ ;  $\frac{12i}{l^2} = 0,0025E$ ;  $\frac{15i}{l^2} = 0,003125E$ ;  $\frac{EA}{l} = E$ .

Вектор нагрузок (рис. 6.16с) имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{EA}{l} \Delta [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T.$$

### Матрицы жесткости стержней

*Стержень 12.* Это защемленный стержень, формула (3.12), рис. 3.5. Узел  $i$  поместим в узел 2 рамы,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ . Матрица его жесткости  $\mathbf{K}_{12}$  равна

$$\begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Учитывая, что  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$  и что глобальная матрица имеет четвертый порядок, получаем

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Стержень 23.* Это комбинированный стержень, формула (3.10), рис. 3.4. Узел  $i$  в узле 2 рамы,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ . Матрица его жесткости  $\mathbf{K}_{23}$  равна

$$\begin{bmatrix} 3i & \frac{3i}{l}\sin\alpha & -\frac{3i}{l}\cos\alpha & -\frac{3i}{l}\sin\alpha & \frac{3i}{l}\cos\alpha \\ \frac{3i}{l}\sin\alpha & \frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{3i}{l^2}\sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & -\frac{EA}{l}\cos^2\alpha - \frac{3i}{l^2}\sin^2\alpha & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha \\ -\frac{3i}{l}\cos\alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & \frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{3i}{l^2}\cos^2\alpha & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & -\frac{EA}{l}\sin^2\alpha - \frac{3i}{l^2}\cos^2\alpha \\ -\frac{3i}{l}\sin\alpha & -\frac{EA}{l}\cos^2\alpha - \frac{3i}{l^2}\sin^2\alpha & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & \frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{3i}{l^2}\sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha \\ \frac{3i}{l}\cos\alpha & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & -\frac{EA}{l}\sin^2\alpha - \frac{3i}{l^2}\cos^2\alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2}\right)\cos\alpha\sin\alpha & \frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{3i}{l^2}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

Учитывая, что  $z_5 = z_6 = 0$ , получаем

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 3i & 0 & -\frac{3i}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

*Стержень 24.* Это защемленный стержень. Узел  $i$  в узле 2 рамы,  $\sin\alpha = -1$ ,  $\cos\alpha = 0$ . Здесь  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ , поэтому

$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} 4i & -\frac{6i}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### **Матрица жесткости рамы. Уравнение равновесия узла 2**

Матрица жесткости рамы (глобальная матрица), в данном примере есть сумма матриц стержней

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23} + \mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} 11i & -\frac{6i}{l} & \frac{3i}{l} & 0 \\ -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} + 2\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} \\ \frac{3i}{l} & 0 & \frac{15i}{l^2} + \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

В соответствие со значениями жесткостных характеристик, приведенными выше, получаем

$$\mathbf{K} = E \begin{bmatrix} 825 & -0,75 & 0,375 & 0 \\ -0,75 & 2,0025 & 0 & -1 \\ 0,375 & 0 & 1,003125 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение равновесия узла 2

$$E \begin{bmatrix} 825 & -0,75 & 0,375 & 0 \\ -0,75 & 2,0025 & 0 & -1 \\ 0,375 & 0 & 1,003125 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E\Delta \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Решением этой системы уравнений являются:

$$Z_1 = 4,535 \cdot 10^{-4} \Delta, \quad Z_2 = 3,939 \cdot 10^{-4} \Delta, \quad Z_3 = -9,971 \cdot 10^{-1} \Delta, \quad Z_4 = 3,939 \cdot 10^{-4} \Delta.$$

### Определение усилий

*Стержень 12.* Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Для определения усилий воспользуемся выражением (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти значения, а также характеристики стержня, приведенные выше, получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 300 & 0 & 0,75 \\ 150 & 0 & 0,75 \end{bmatrix} E\Delta \begin{bmatrix} 4,535 \\ 3,393 \\ -9971 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 3,393 \\ -6118 \\ -6798 \end{bmatrix} 10^{-4} E\Delta.$$

*Стержень 24.* Для определения усилий опять воспользуемся выражением (3.11). Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\sin \alpha = -1$ ,  $\cos \alpha = 0$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Подставляя эти значения и жесткостные характеристики, приведенные выше, получаем

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 300 & -0,75 & 0 \\ 150 & -0,75 & 0 \end{bmatrix} E\Delta \begin{bmatrix} 4,535 \\ 3,393 \\ -9971 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} -9971 \\ 1358 \\ 678 \end{bmatrix} 10^{-4} E\Delta.$$

Стержень 23. Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ . Для определения усилий воспользуемся выражением (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha \\ 3i & \frac{3i}{l}\sin\alpha & -\frac{3i}{l}\cos\alpha & -\frac{3i}{l}\sin\alpha & \frac{3i}{l}\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

Подставляя сюда числовые значения, находим

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 225 & 0 & -0,375 & 0 \end{bmatrix} E\Delta \begin{bmatrix} 4,535 \\ 3,939 \\ -9971 \\ 3,939 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4760 \end{bmatrix} 10^{-4} E\Delta.$$

Эти результаты позволяют построить эпюры внутренних сил, рис. 6.17.

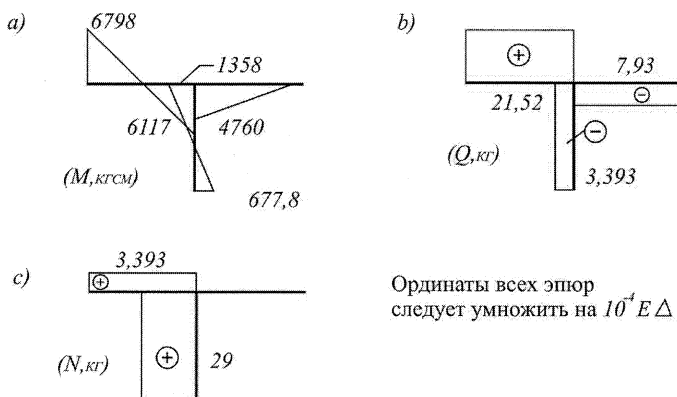


Рис. 6.17

Статическая проверка

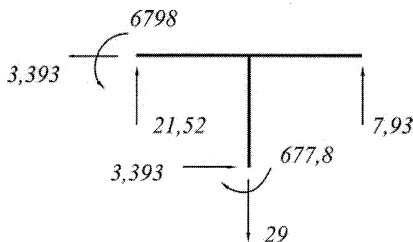


Рис. 6.18

$$\sum X = 3,393 - 3,393 = 0.$$

$$\sum Y = 21,52 + 7,93 - 29 = 0,45.$$

Погрешность 1,6 %.

$$\sum M_1 = 677,8 - 6798 + 600 \cdot (29 - 3,393 - 7,93 \cdot 2) = -272.$$

Погрешность 1,56 %.



### 6.9. Рама. Расчет на температурное воздействие

Требуется определить усилия, возникающие при изменении температуры в стержневой системе, изображенной на рис. 6.19, где показаны:  $a$  – поля приращений температур;  $b$  – искомые перемещения узлов ( $Z_1 \dots Z_4$ );  $c$  – эпюры изгибающих моментов и продольных сил ( $s_0$ );  $d$  – узловые реактивные силы. Как и в предыдущем примере заданы следующие величины, одинаковые для всех стержней: длина  $l=600$  см, площадь поперечного сечения  $A=30 \cdot 20$  см<sup>2</sup>, момент инерции  $I=45\,000$  см<sup>4</sup>, модуль упругости  $E$ .

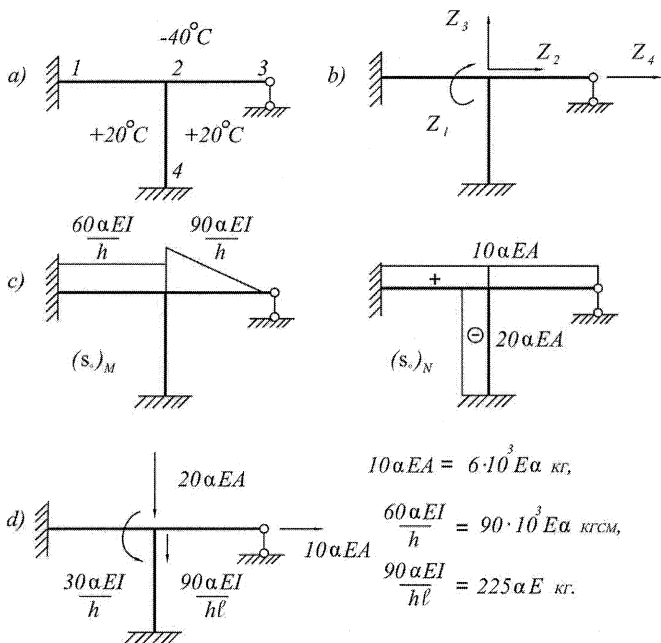


Рис. 6.19

Вектор нагрузок (рис. 6.19d) имеет вид

$$F = 1000\alpha E [-45 \ 0 \ -11,775 \ 6]^T.$$

Очевидно, что матрица жесткости та же, что в предыдущем примере

$$K = E \begin{bmatrix} 825 & -0,75 & 0,375 & 0 \\ -0,75 & 2,0025 & 0 & -1 \\ 0,375 & 0 & 1,003125 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

поэтому уравнение равновесия узла 2 принимает вид

$$E \begin{bmatrix} 825 & -0,75 & 0,375 & 0 \\ -0,75 & 2,0025 & 0 & -1 \\ 0,375 & 0 & 1,003125 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + 1000\alpha E \begin{bmatrix} -45 \\ 0 \\ -11,775 \\ 6 \end{bmatrix} = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получаем:

$$Z_1 = 43,81\alpha; Z_2 = -5952\alpha; Z_3 = 11722\alpha; Z_4 = -11952\alpha.$$

### Определение усилий

*Стержень 12.* Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\sin\alpha = 0$ ,  $\cos\alpha = -1$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Для определения усилий воспользуемся выражением (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & 0 & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha \\ 4i & \frac{6i}{l}\sin\alpha & -\frac{6i}{l}\cos\alpha & 2i & -\frac{6i}{l}\sin\alpha & \frac{6i}{l}\cos\alpha \\ 2i & \frac{6i}{l}\sin\alpha & -\frac{6i}{l}\cos\alpha & 4i & -\frac{6i}{l}\sin\alpha & \frac{6i}{l}\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти значения, а также характеристики жесткости, приведенные выше, находим

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 300 & 0 & 0,75 \\ 150 & 0 & 0,75 \end{bmatrix} E\alpha \begin{bmatrix} 43,81 \\ -5952 \\ 11722 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5952 \\ 21934 \\ 15363 \end{bmatrix} E\alpha.$$

*Стержень 24.* Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\sin\alpha = -1$ ,  $\cos\alpha = 0$ ,  $z_4 = z_5 = z_6 = 0$ . Для определения усилий опять воспользуемся выражением (3.11)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l}\cos\alpha & -\frac{EA}{l}\sin\alpha & 0 & \frac{EA}{l}\cos\alpha & \frac{EA}{l}\sin\alpha \\ 4i & \frac{6i}{l}\sin\alpha & -\frac{6i}{l}\cos\alpha & 2i & -\frac{6i}{l}\sin\alpha & \frac{6i}{l}\cos\alpha \\ 2i & \frac{6i}{l}\sin\alpha & -\frac{6i}{l}\cos\alpha & 4i & -\frac{6i}{l}\sin\alpha & \frac{6i}{l}\cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}.$$

Подставляя значения, приведенные для стержня 24 и жесткостные характеристики, получаем

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 300 & -0,75 & 0 \\ 150 & -0,75 & 0 \end{bmatrix} E\alpha \begin{bmatrix} 43,81 \\ -5952 \\ 11722 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11722 \\ 17607 \\ 11035 \end{bmatrix} E\alpha.$$

Стержень 23. Узел  $i$  стержня расположен в узле 2 рамы,  $\alpha=0$ ,  $\sin\alpha=0$ ,  $\cos\alpha=1$ . Для определения усилий воспользуемся выражением (3.7)

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{3i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

Подставляя сюда числовые значения, находим

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 225 & 0 & -0,375 & 0 \end{bmatrix} E\alpha \begin{bmatrix} 43,81 \\ -5952 \\ 11722 \\ -11952 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 5461 \end{bmatrix} E\alpha.$$

Эпюры внутренних сил приведены на рис. 6.20.

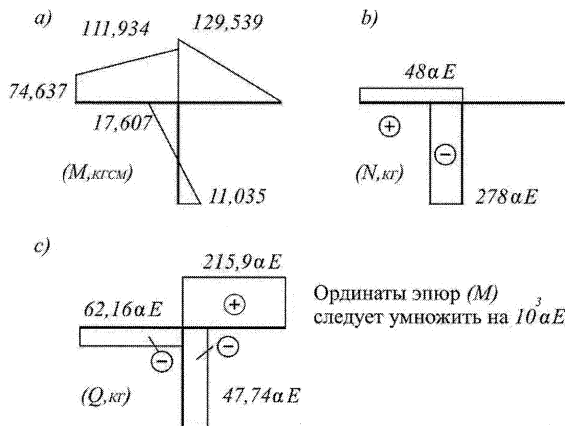


Рис. 6.20

Статическая проверка решения

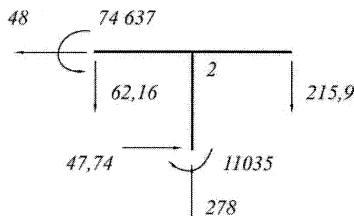


Рис. 6.21

Имея рис. 6.21, легко убедиться, что рама находится в равновесии. Составим следующие уравнения:

$$\sum X = 48 - 47,74 = 0,26. \text{ Погрешность } 0,54\%.$$

$$\sum Y = 278 - 62,16 - 215,9 = -0,06.$$

Погрешность 0,02 %.

$$\sum M_2 = 11\,035 - 74\,637 + 600 \cdot (215,9 - 47,74 - 62,16) = -2. \text{ Погрешность } 0,003\%.$$

## 7. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (МП) И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

Принципиального различия между ними нет. В том и другом методе в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов стержневой системы. Для их определения составляются уравнения равновесия узлов – канонические уравнения, причем матрица этих уравнений (глобальная матрица) не зависит от метода, которым она получена.

Однако процедуры определения элементов этой матрицы разные, и в этом, главным образом, проявляется различие между двумя методами.

Чтобы найти коэффициенты канонических уравнений (МП) необходимо построить вручную и затем перемножить эпюры усилий, возникающих в основной системе от единичных перемещений узлов. Так получаются элементы матрицы канонических уравнений (МП). Это довольно трудоемкая процедура, но главный ее недостаток состоит в том, что она должна выполняться всякий раз, когда начинается решение новой задачи.

Поиски пути, инвариантного к конструкции стержневой системы, привели разработчиков к (МКЭ). Здесь глобальная матрица получается суммированием матриц жесткости типовых элементов, образующих стержневую систему. В нашем случае их три, и из них может быть сформирована глобальная матрица любой стержневой системы.

Определение усилий в стержнях также не требует единичных эпюр. Это делается путем перемножения матриц.

Таким образом, МКЭ позволяет решить задачу при минимуме исходных данных и полной автоматизации всех вычислений.

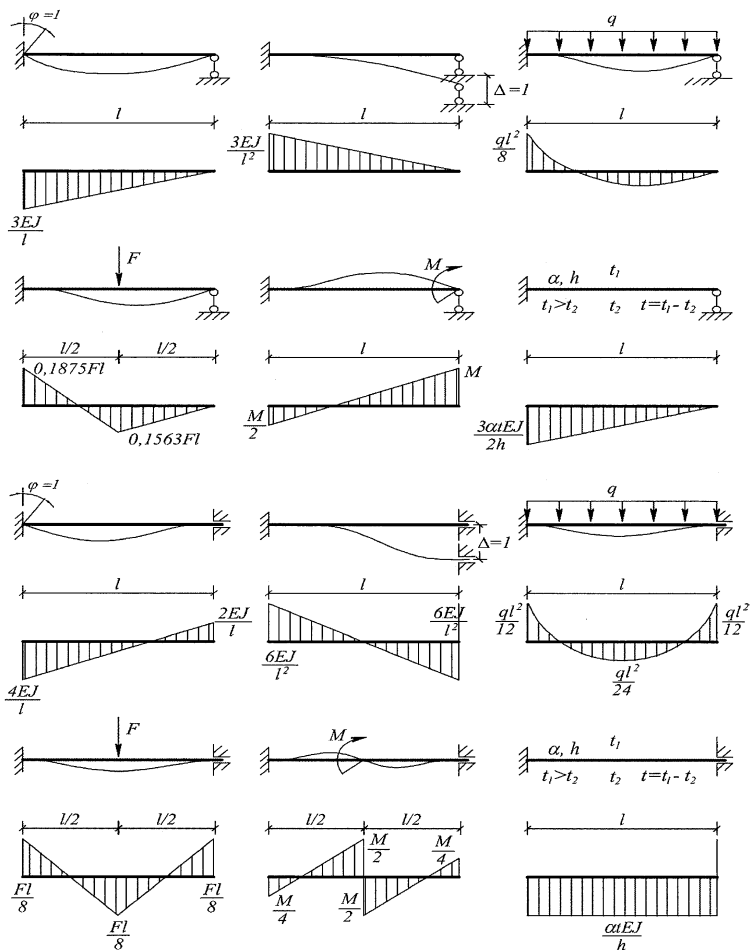
## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов / О. Зенкевич, И. Чанг; пер. с англ. О.П. Троицкого и С.В. Соловьева. – М.: Изд-во «Недра», 1974. – 239 с.
2. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 655 с.
3. Хечумов, Р.А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: учеб. пособие / Р.А. Хечумов, Х. Кеплер, В.И. Прокопьев. – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 350 с.
4. Сеницын, С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов: стержневых систем / С.Б. Сеницын. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – 319 с.
5. Сеницын, С.Б. Матричные методы и МКЭ решения задач строительной механики: учеб. пособие / С.Б. Сеницын, М.Г. Ванюшенков. – М.: Изд-во МИСИ, 1984. – 125 с.
6. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1982. – 400 с.
7. Фаддеев, Ф.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Ф.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.: Изд-во «Наука», 1983. – 975 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

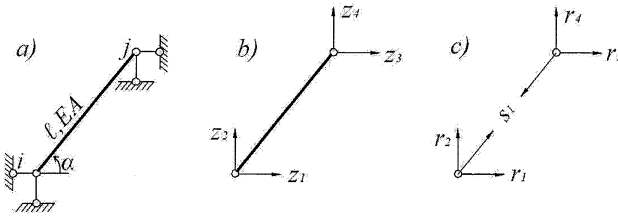
### УСИЛИЯ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ



МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЕЙ. ФОРМУЛЫ УСИЛИЙ

Шарнирный стержень

Узловые перемещения и реакции



Выражение узловых реакций через узловые перемещения

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрица жесткости шарнирного стержня

$$\mathbf{K}_{\text{ш}} = \left( \frac{EA}{l} \right) \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

или  $\mathbf{K}_{\text{ш}} = \mathbf{A}_{\text{ш}} \mathbf{k}_{\text{ш}} \mathbf{A}_{\text{ш}}^T$ .

Усилие в стержне

$$s_1 = \left( \frac{EA}{l} \right) [-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T.$$

Номера формул здесь и в основном тексте приняты одинаковыми.

### Комбинированный стержень

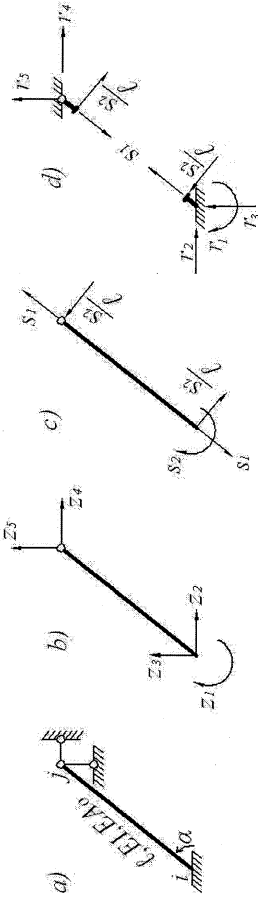


Рис. 3.4

Выражение узловых реакций через узловые перемещения

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha \\ \frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ \frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Номера формул здесь и в основном тексте приняты одинаковыми.



Матрица жесткости комбинированного элемента

$$\mathbf{K}_K = \begin{bmatrix}
 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{3i}{l} \cos \alpha \\
 \frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\
 -\frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha \\
 -\frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\
 \frac{3i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3i}{l^2} \cos^2 \alpha
 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ИЛИ

$$\mathbf{K}_K = \mathbf{A}_K \mathbf{k}_K \mathbf{A}_K^T$$

Условия в стержне

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 3i & \frac{3i}{l} \sin \alpha & -\frac{3i}{l} \cos \alpha & -\frac{3i}{l} \sin \alpha & \frac{3i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Номера формул здесь и в основном тексте приняты одинаковыми.

Зашемлённый стержень

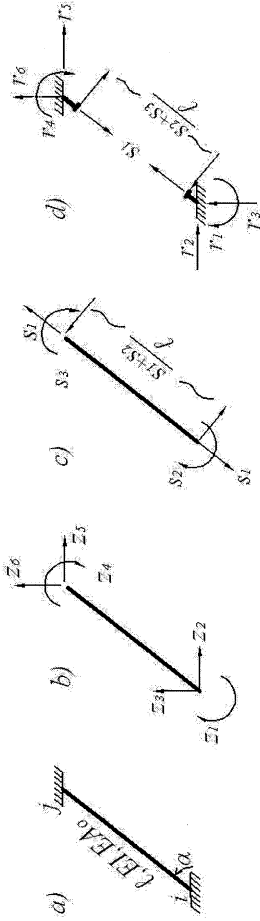


Рис. 3.5

Выражение узловых реакций через узловые перемещения

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Номера формул здесь и в основном тексте приняты одинаковыми.

Матрица жесткости защемленного элемента

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix}
 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6}{l} \sin \alpha & \frac{6}{l} \cos \alpha \\
 \frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\
 -\frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha \\
 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\
 -\frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \sin^2 \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\
 \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12i}{l^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12i}{l^2} \cos^2 \alpha
 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{A}_3^T$$

ИЛИ

Усилия в стержне

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 4i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 2i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \\ 2i & \frac{6i}{l} \sin \alpha & -\frac{6i}{l} \cos \alpha & 4i & -\frac{6i}{l} \sin \alpha & \frac{6i}{l} \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}$$

Номера формул здесь и в основном тексте приняты одинаковыми.

## НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Матрицей  $\mathbf{A}$  называется прямоугольная таблица элементов (в частности, чисел),  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Величины  $m$  и  $n$  характеризуют размеры матрицы.

### П3.1. Виды матриц

#### Матрица-столбец и матрица-строка

Если в  $\mathbf{A}$  число столбцов  $n = 1$ , получим матрицу столбец. Для компактности матрицу-столбец можно записать так  $\mathbf{A} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m\}$ . При  $m = 1$  получаем матрицу-строку  $\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ . В первой записи опущены вторые индексы, а второй – первые.

#### Нулевая матрица

Это матрица, все элементы которой равны нулю. Она обозначается символом  $\mathbf{0}$  и может иметь размеры  $m \times n$ .

#### Квадратная матрица

Если в  $\mathbf{A}$   $m = n$ , матрица называется квадратной. Вместо термина «размеры» в ней применяется термин «порядок». В дальнейшем будем обозначать порядок квадратной матрицы буквой  $m$ .

Квадратная матрица имеет главную диагональ, которую образуют элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ .

#### Диагональная матрица

Это квадратная матрица, у которой элементы с неодинаковыми индексами равны нулю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Если  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm} = a$ , диагональная матрица называется скалярной.

### Единичная матрица $\mathbf{E}$

Если в скалярной матрице элемент  $a = 1$ , получаем единичную матрицу

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица в матричном исчислении играет роль, аналогичную единице в арифметических операциях.

### Ленточная матрица

Это квадратная матрица порядка  $m$ , у которой отличны от нуля лишь элементы, расположенные на главной диагонали и на примыкающих к ней сверху и снизу параллельных линиях, количество которых  $< m$ . В качестве иллюстрации приведем «трехленточную» матрицу пятого порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

### Скаляр

Любое число можно рассматривать как квадратную матрицу первого порядка. Такая матрица называется *скаляром*.

### Симметричная матрица

Это квадратная матрица, элементы которой, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, то есть имеет место равенство  $a_{ij} = a_{ji}$ .

### Блочная матрица

Если в матрице  $\mathbf{A}$  провести горизонтальные и вертикальные «перегородки», то матрица разбивается на некоторое количество прямоугольных ячеек или блоков

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} & \vdots & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} & \vdots & a_{25} & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} & \vdots & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \vdots & a_{44} & \vdots & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \vdots & a_{54} & \vdots & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}.$$

Элементы в пределах каждого блока сами образуют матрицы или «подматрицы»:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}.$$

Поэтому, в данном случае, блочную матрицу  $\mathbf{A}$  можно представить так:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

#### *Квазидиагональная матрица*

Это блочная матрица, составленная из квадратных матриц  $A_{ij}$ , расположенных на одной диагонали

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}.$$

### **П3.2. Алгебраические операции над матрицами**

#### *Определитель матрицы*

Он составляется из элементов квадратной матрицы без изменения их расположения. Определитель матрицы обозначается символами:

$$|\mathbf{A}| \text{ или } \mathbf{D}(\mathbf{A}).$$

Если элементы матрицы – числа, определитель ее также число.

Правила вычисления определителя можно найти, например, в [7, с.157].

#### *Равенство матриц*

Если матрицы имеют одинаковые размеры и все их одинаково расположенные элементы равны между собой, такие матрицы равны, то есть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

если  $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ .

### Транспонированная матрица $\mathbf{A}^T$

Если в

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

поменять местами строки и столбцы, получим матрицу  $\mathbf{A}^T$ , которая называется матрицей, транспонированной относительно  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

### П3.3. Примеры

#### Сложение (вычитание) матриц

Складывать и вычитать можно лишь матрицы, имеющие одинаковое число строк и одинаковое число столбцов

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & (a_{13} + b_{13}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & (a_{23} + b_{23}) \end{bmatrix} = \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с размерами  $m \times n$  дает матрицу  $\mathbf{C}$  того же порядка с элементами  $c_{ik} = a_{ij} + b_{ij}$ . Если  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , то  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

Сложение матриц подчиняется следующим законам:

1.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  ;
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ ;
3.  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ .

#### Умножение матриц

Умножение матрицы на число (скаляр)  $\beta$  дает матрицу, все элементы которой увеличены в  $\beta$  раз:

$$\beta \mathbf{A} = \beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \beta a_{13} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \end{bmatrix}.$$

Произведение  $\beta \mathbf{A}$  подчиняется следующим законам:

1.  $(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$ ;
2.  $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$ ;
3.  $(\alpha\beta) \mathbf{A} = \alpha(\beta \mathbf{A}) = \beta(\alpha \mathbf{A})$ .

Умножать можно лишь матрицы, называемые *соответственными*, в которых число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})(a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})(a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}) \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})(a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= [(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}) \dots (a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np})].$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot [b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1n}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1n} \end{bmatrix}.$$

Матричные произведения подчиняются следующим законам:

1.  $(\mathbf{AB})\mathbf{D} = \mathbf{A}(\mathbf{BD})$ ;
2.  $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$ ;
3.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ ;
4.  $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ .



Подчеркнем, что  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  даже для квадратных матриц.  
*Обращение матриц*

Если систему уравнений (матричное уравнение  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ )

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

решить относительно  $x_1, \dots, x_n$ , получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \dots + \alpha_{1n}b_n; \\ x_2 &= \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{2n}b_n; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ x_n &= \alpha_{n1}b_1 + \alpha_{n2}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n, \end{aligned}$$

где  $\alpha_{ij}$  выражаются через  $a_{ij}$  и образуют матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется обратной по отношению к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

При этом имеет место  $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ .

Решение матричного уравнения  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  относительно  $\mathbf{x}$  можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

Разумеется, решение системы уравнений возможно и без отыскания обратной матрицы. Использование последней целесообразно в случае, когда приходится решать систему несколько раз, изменяя лишь свободные члены. Этот случай имеет место, например, при расчете конструкций на несколько видов загрузений. Чтобы показать, как может быть получена обратная матрица, рассмотрим следующую систему уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Решим эту систему, пользуясь, например, формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \Delta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} b_1 - \frac{a_{12}}{\Delta} b_2; \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta} b_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} b_2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Проверим правильность решения

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) & (-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}) \\ (a_{22}a_{21} - a_{22}a_{21}) & (-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Решение выполнено правильно.

Виталий Иванович Соломин

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.  
ПЛОСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

Техн. редактор А.В. Миних

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

---

Подписано в печать 09.06.2010. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 4,42. Тираж 70 экз. Заказ 198/448. Цена С.

---

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.