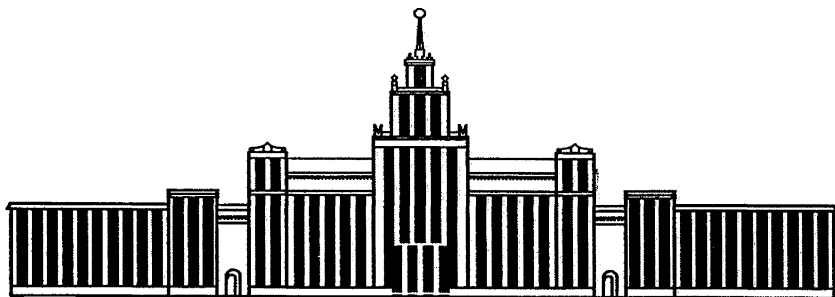


---

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---



---

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

656.13(07)  
Г716

**Н.К. Горяев, В.В. Вязовский**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
В ОРГАНИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО  
ПРОЦЕССА**

**Учебное пособие**

---

Челябинск  
2010

---

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра «Эксплуатация автомобильного транспорта»

656.13(07)  
Г716

Н.К. Горяев, В.В. Вязовский

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО ПРОЦЕССА**

Учебное пособие

Челябинск  
Издательский центр ЮУрГУ  
2010

УДК 656.13.07(075.8)  
Г716

*Одобрено*  
*учебно-методической комиссией автотракторного факультета*

*Рецензенты:*  
*Ю.И. Аверьянов, Е.А. Григорьев*

**Горяев, Н.К.**  
Г716 Математические методы в организации транспортного процесса:  
учебное пособие / Н.К. Горяев, В.В. Вязовский. – Челябинск:  
Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 77 с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 190701 и 190702 дневной и заочной форм обучения в качестве руководства при изучении курса «Математические методы в организации транспортного процесса». В нем содержатся основные сведения о математических методах, применяемых для организации транспортного процесса.

УДК 656.13.07(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2010

## ВВЕДЕНИЕ

В процессе развития человеческого общества количество и сложность проблем постоянно увеличиваются. В условиях усложнения технологий, дефицита ресурсов все труднее принять обоснованное решение. На помощь приходят математические методы, применяемые в экономике, в том числе и в сфере транспорта, которые позволяют выбрать наилучшую стратегию, как на ближайшее будущее, так и на дальнюю перспективу.

Чтобы оценить роль математических методов в экономике необходимо выявить, насколько полно они описывают все возможные решения, возможно ли с их помощью выбрать наилучшее, стоит ли их вообще использовать в конкретной ситуации?

Нельзя как полностью отрицать применимость математических методов, так и преувеличивать их роль. Насколько математические модели способны отражать реальные экономические ситуации? Это зависит от цели исследования. В ряде случаев достаточно минимального уровня соответствия, для других задач может потребоваться более детальное моделирование.

Хозяйственная деятельность всегда была связана с необходимостью проведения арифметических или геометрических расчетов. Математика возникла изначально для удовлетворения практических хозяйственных потребностей. Однако применение современных технологий и компьютерных моделей в расчетах позволило получить возможность оптимального выбора из нескольких стратегий, снизить трудоемкость расчетов и оперативно решать задачи такой сложности, которые еще 15–20 лет назад считались трудноразрешимыми.

Развитие математических методов происходит с развитием экономики. Усложнение, специализация производства, появление новых задач и технологий наряду с развитием экономической науки и человеческого мышления порождает постановку новых задач и поиск методов их решения. При этом новые методы не отбрасывают старые. Может происходить взаимопроникновение, включение старых теорий в новые (например, в качестве частного случая).

На развитие и применение математических методов огромное влияние оказывает развитие техники, в первую очередь вычислительной, интеграция ее с космическими, транспортными и общетехническими технологиями. Вычислительная техника последних поколений уже позволила на практике применить множество методов, описанных ранее лишь теоретически или на простейших примерах. Кроме всего прочего развитие систем компьютерной обработки, накопления и хранения информации создает новую, весьма обширную информационную базу, которая приведет к созданию новых, ранее неизвестных математических методов поиска и принятия решений.

## **1. ОСОБЕННОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

Экономическая наука изучает в основном процессы между субъектами связанными при обмене различными продуктами. На современном этапе экономические взаимоотношения между субъектами образуют экономические системы со сложной структурой, большим количеством элементов и связей между ними.

Если рассматривать экономическую систему как совокупность управляемой (например, организация перевозок) и управляющей систем, тогда можно выделить ряд особенностей [1]:

1) масштабы организации перевозок как управляемой системы несравненно больше чем любой технической управляемой системы;

2) организация перевозок, как система, постоянно совершенствуется, и управление ею включает управление процессами совершенствования;

3) в связи с научно-техническим прогрессом и развитием производительных сил изменяются параметры системы, что обуславливает необходимость исследования новых закономерностей и их использования в управлении;

4) с усложнением процесса организации перевозок повышаются требования к методам сбора, накопления, переработки информации; ее дифференциации по уровням иерархии с учетом степени значимости для принятия управленческих решений;

5) участие человека в процессе организации перевозок как неотъемлемой части производительных сил общества обуславливает необходимость учета комплекса социальных, экологических и других факторов;

6) существенная зависимость от случайных природных факторов обуславливают вероятностный характер многих транспортных процессов, что необходимо учитывать в управлении перевозками.

Но кроме производственных систем в состав экономических систем входит также сфера обращения и непроизводственная сфера, которые также имеют свою специфику. Она заключается в необходимости учета таких факторов как конкуренция, законы спроса и предложения, вероятностный характер большинства влияющих факторов.

Поэтому экономические задачи, это задачи с большим числом неизвестных, имеющих различные динамические связи и взаимоотношения. Экономические задачи многомерны, и даже будучи представлены в форме, системы неравенств и уравнений, не могут быть решены простыми математическими методами.

Еще одной характерной чертой экономических задач в сфере транспорта является множественность возможных решений: определенную транспортную работу можно выполнить различными способами, по-разному выбирая маршруты движения, применяемое оборудование, технологию и организацию производственного процесса. В то же время для управления требуется по возможности минимальное количество вариантов и желательно наилучшие.

Поэтому второй особенностью экономических задач является то, что это задачи экстремальные, что в свою очередь предполагает наличие целевой функции.

Говоря о критериях оптимальности, следует учитывать возникновение ситуаций, когда приходится принимать во внимание одновременно ряд показателей эффективности (например, максимум рентабельности и прибыли, минимум использованных ресурсов, транспортной работы и т.д.) [2]. Это связано не только с формальными трудностями выбора и обоснования единственного критерия, но и многоцелевым характером реальных задач. В этом случае потребуется несколько целевых функций и соответственно какой-то компромисс между ними.

Чтобы выбрать оптимальный вариант плана, необходимо определить такие значения искомым плановых величин (переменных), при которых наилучшим образом достигалась бы заранее заданная цель [3]. Такой целью могут быть, например, наименьшие транспортные издержки при доставке продукции потребителям от поставщиков или максимальная производительность подвижного состава при выполнении этих перевозок и т. п. Степень достижения цели решения плановой задачи определяется с помощью критерия – выбранного целевого показателя, который должен иметь количественный характер, т.е. быть выражен числом. План будет оптимальным в том случае, если численные значения переменных будут удовлетворять всем заданным условиям и при этом критерий оптимальности примет максимальное (при решении задачи на максимум) или минимальное (при решении задачи на минимум) значение.

В математической форме задача оптимального планирования может быть сформулирована следующим образом: существует система величин, которые могут принимать различные значения в заданных пределах; требуется найти такие значения этих величин, которые оптимизируют выбранный критерий, являющийся их функцией [2].

Принцип определения оптимума лучше всего проиллюстрировать следующей простейшей условной задачей: требуется определить оптимальное значение некоторой величины  $X$ , от которой зависит определенный хозяйственный результат. Причем известен характер этой зависимости. Например, пусть известно, что удельные затраты на обслуживание и ремонт автомобиля будут расти прямо пропорционально времени его эксплуатации, что отражает линия  $S_1$ , линия  $S_2$  показывает, что с увеличением времени эксплуатации автомобиля удельная стоимость этого автомобиля, отнесенная на каждый год эксплуатации, будет уменьшаться (рис. 1). Суммарные удельные затраты на эксплуатацию и приобретение автомобиля показаны линией  $S_1+S_2$ . Оптимальному значению величины срока эксплуатации автомобиля будет соответствовать точка на кривой суммарных издержек, где эти затраты будут минимальны [2].

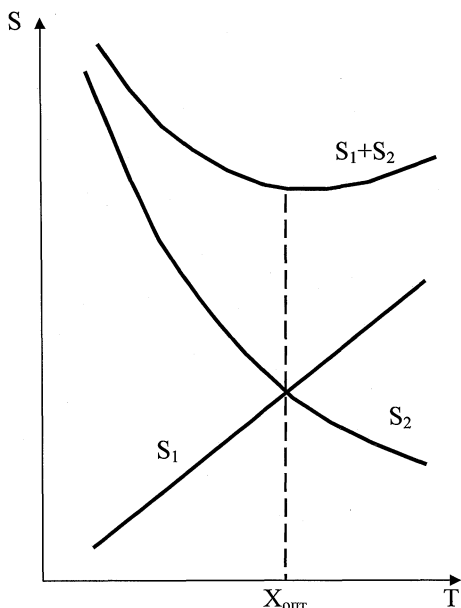


Рис. 1. Условное определение оптимального срока эксплуатации автомобиля:  $S$  – затраты,  $T$  – время эксплуатации,  $S_1$  – затраты на обслуживание и ремонт,  $S_2$  – удельная стоимость автомобиля, отнесенная на каждый год эксплуатации

В рассмотренной задаче определяли численное значение только одной переменной – срока эксплуатации автомобиля. Хотя такие задачи встречаются в практике планирования работы автотранспортных предприятий, однако значительно чаще необходимо решать задачи, где требуется определить оптимум в гораздо большем количестве переменных.

Рассмотрим, например поставку кирпича одной марки кирпичными заводами на строительные площадки. При наличии одного завода и одной стройки может быть только один вариант перевозок. Если есть два завода и две стройки, то и задаче имеются четыре переменных, т. е. кирпич можно возить по четырем маршрутам. Обозначим каждый из них буквой  $x$  с соответствующим индексом. Так, при перевозке кирпича от первого завода первой стройке маршрут обозначим  $x_1$ , а от этого же завода второй стройке –  $x_2$ ; от второго завода первой стройке маршрут обозначим  $x_3$ , а второй стройке –  $x_4$ .

При этом может быть шесть различных вариантов организации этих перевозок: I вариант – осуществлять перевозки по маршрутам  $x_1$  и  $x_2$ ; II вариант – по маршрутам  $x_3$  и  $x_4$ ; III вариант – по маршрутам  $x_1$  и  $x_4$ ; IV вариант – по маршрутам  $x_2$  и  $x_3$ ; V вариант – по маршрутам  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_4$ ; VI вариант – по

маршрутам  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$ . При увеличении числа заводов и строек количество переменных и возможных вариантов стремительно растет. При трех заводах и трех стройках будет соответственно девять переменных и 90 вариантов решения, при четырех заводах и четырех стройках – 16 переменных и 6256 вариантов, а при пяти заводах и восьми стройках число переменных составляет 40, а число возможных вариантов уже будет составлять около миллиона [2].

Так как на практике количество отправителей и потребителей бывает значительно большим, то и число переменных в каждой задаче планирования может быть велико, а количество вариантов решения будет выражаться огромным числом. Однако при планировании перевозок, так же как и при решении других плановых задач, надо среди этих вариантов выбрать оптимальный.

Обычными методами путем сравнения результатов расчета каждого варианта невозможно выбрать наилучший, так как это, даже при использовании быстродействующих электронных вычислительных машин, займет столь много времени, что использовать результаты этих расчетов будет уже невозможно.

Вместе с тем, в последние годы продолжают разрабатываться математические методы планирования, которые позволяют найти решение не путем перебора и сравнения на оптимальность всех возможных вариантов, а с помощью применения определенных математических действий, которые рядом последовательных приближений (итераций) приводят к окончательному оптимальному решению. Это значительно сокращает трудоемкость расчетов, и делает возможным использование их результатов для планирования. Таким образом, экономико-математические методы эффективно применяются там, где из многих возможных необходимо определить оптимальное плановое решение.

Близко к многоцелевым задачам лежат задачи с дробно-линейной функцией, когда целевая функция выражается относительными показателями эффективности производства (рентабельность, себестоимость продукции, производительность труда и т.д.).

Кроме того, необходимо учитывать, что входными величинами служат материальные ресурсы (природные, сырьевые, средства производства), трудовые ресурсы, капиталовложения, информационные ресурсы (сведения о ценах, технологии и др.). Из этого следует еще одна особенность экономических задач: наличие ограничений на ресурсы, т.е. это предполагает выражение экономической задачи в виде системы неравенств [4].

Случайный характер факторов, влияющих на экономическую систему, предполагает вероятностный (стохастический) характер технико-экономических коэффициентов, коэффициентов целевой функции, что также является особенностью экономических задач.

В то же время нередко встречаются условия, когда зависимости между различными факторами или в целевой функции нелинейны. Например, это имеет место в зависимостях между затратами ресурсов и выходом конечного продукта. Но основная часть таких задач встречается при моделировании рыночного поведения, когда следует учитывать факторы эластичности спроса и предложения, т.е. нелинейный характер изменений этих величин от уровня цен.



При моделировании рыночного поведения кроме нелинейности зависимостей, встречается такая особенность, как требование учитывать поведение конкурентов. В то же время, осуществление решения, принятого в одном из подразделений, может оказать значительное влияние на те или иные характеристики экономической ситуации, в которой принимают решения остальные подразделения (меняются подвижной состав, цены на транспортные услуги и др.). Возникает, следовательно, комплекс оптимизационных задач, в каждой из которых какие-то переменные величины зависят от выбранных управлений в других задачах.

Еще одной общей особенностью экономических задач является дискретность (либо объектов планирования, либо целевой функции) [5]. Эта целочисленность вытекает из самой природы вещей, предметов, которыми оперирует экономическая наука. Т.е. не может быть дробным число автомобилей, число рабочих и т.д. При этом дискретный характер имеют не только объекты планирования, но и временные промежутки, внутри которых осуществляется планирование. Это означает, что при планировании какого-либо действия всегда следует определить, на какой срок оно осуществляется, в какие сроки может быть осуществлено, и когда будут результаты. Таким образом, вводится еще одна дискретная переменная – временная.

Дискретность многих экономических показателей неотделима от неотрицательности значений (реальных предметов или отрезков времени не может быть меньше нуля).

Экономическая система – меняющийся под действием внешних и внутренних факторов механизм. При этом возникает ситуация, когда решения, принятые раньше, определяют частично или полностью решения, принятые позднее.

Поэтому экономические задачи, решаемые математическими методами, имеют специфику, определяемую особенностями экономических систем, как более высоких форм движения по сравнению с техническими или биологическими системами. Эти особенности экономических систем сделали недостаточными те математические методы, которые выросли из потребностей других наук. Т.е. потребовался новый математический аппарат, причем не столько более сложный, сколько просто учитывающий особенности экономических систем на базе уже существующих математических методов.

Кроме того, экономические системы развиваются и усложняются сами, изменяется их структура, а иногда и содержание, обусловленное научно-техническим прогрессом. Это делает устаревшими многие методы, применявшиеся ранее, или требует их корректировки. В то же время научно-технический прогресс влияет и на сами математические методы, поскольку совершенствование компьютеров сделало возможным широкое использование методов, ранее описанных лишь теоретически, или применявшихся лишь для небольших прикладных задач.

Первая практическая задача планирования автомобильных перевозок в нашей стране, где использовались математические методы, была решена в 1959 г. Л.П. Александровым, Ю.А. Олейником и А.Л. Лурье. Был рассчитан план

перевозок песка с восьми причалов Москвы 209 потребителям, который показал, что с помощью математических методов планирования можно получить вариант организации перевозок на 11,3% лучше, чем обычно предусматривалось [2].

В настоящее время разработаны методы получения оптимальных планов при решении следующих задач планирования грузовых автомобильных перевозок:

- закрепление потребителей за поставщиками однородной или взаимозаменяемой продукции с целью минимизации транспортных затрат;

- планирование нулевых пробегов, т.е. пробегов подвижного состава от автотранспортного предприятия к первому пункту погрузки и от последнего пункта разгрузки до автотранспортного предприятия. Разновидностью этой задачи является задача размещения различных типов и марок автомобилей по автотранспортным предприятиям. Целью решения таких задач является минимизация суммарных нулевых пробегов подвижного состава; маршрутизация перевозок массовых грузов (увязка ездки) для обеспечения минимального порожнего пробега автомобилей;

- планирование развозных и сборных маршрутов при перевозке мелких партий грузов, обеспечивающее минимальный пробег автомобилей при объезде пунктов получения (или отправления) груза;

- распределение подвижного состава и погрузочно-разгрузочных средств по маршрутам с целью максимального использования их рабочего времени.

Применяют методики и на пассажирском автомобильном транспорте. С их помощью производят закрепление перевозчиков пассажиров за маршрутами, разрабатывают оптимальные схемы автобусных маршрутов в городах, составляют расписания их движения [2].

Математические методы применяются и в планировании себестоимости автомобильных перевозок и накладных расходов автотранспортных предприятий. Таким образом, экономико-математические методы охватывают широкий круг вопросов планирования деятельности предприятий автомобильного транспорта.

## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Суть экономико-математического моделирования заключается в описании социально-экономических систем и процессов в виде экономико-математических моделей. Экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования [6].

Рассматривая вопросы классификации экономико-математических методов необходимо учитывать, что эти методы представляют собой комплекс экономико-математических дисциплин, являющихся сплавом экономики, математики и кибернетики.

В составе экономико-математических методов можно выделить следующие разделы:

- экономическая кибернетика;
- математическая статистика;
- методы принятия оптимальных решений;
- методы экспериментального изучения экономических явлений.

Экономическая кибернетика: системный анализ экономики, теория экономической информации и теория управляющих систем;

Классификацию кибернетических систем можно провести по двум критериям: степень сложности системы и ее детерминированность [5, 7].

По степени сложности системы бывают:

- простые,
- сложные,
- сверхсложные.

К простым относятся системы, имеющие простую структуру и легко поддающиеся математическому описанию, они могут быть реализованы без использования ЭВМ.

Сложными являются системы, имеющие много внутренних связей и сложное математическое описание, реализуемое на ЭВМ.

Сверхсложные системы не поддаются математическому описанию.

Границы между указанными классами размыты и могут со временем смещаться, например, совершенствование математического аппарата и вычислительной техники позволяет дать описание систем, для которых это раньше было невозможно, или сложное описание сделать простым.

По второму критерию системы делятся на детерминированные и вероятностные.

Все возможные случаи получаются комбинированием нескольких классов.

1. Простые детерминированные системы:

- автокондиционер с регулятором;
- система хранения автомобилей в гараже;
- система автобусных маршрутов;
- расписание занятий факультета.

2. Сложные детерминированные системы:
  - ЭВМ;
  - цветной телевизор;
  - сборочный автоконвейер.
3. Сверхсложные детерминированные системы – шахматы.
4. Простые вероятностные системы:
  - лотерея;
  - система статистического контроля запчастей на складе предприятия.
5. Сложные вероятностные системы:
  - система материально-технического снабжения на предприятии;
  - система диспетчерования движения самолетов вблизи крупного аэропорта;
  - система диспетчерования энергетической системы России.
6. Сверхсложные вероятностные системы:
  - предприятие в целом, включая все его технические, экономические, административные, социальные характеристики;
  - общество;
  - человеческий мозг.

На транспорте приходится сталкиваться, главным образом, простыми и сложными системами, вероятностными и детерминированными [6].

При использовании методов математической статистики можно выделить экономические приложения данной дисциплины – выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, теорию индексов и др.;

Достаточно интересных практических результатов позволяют добиться такие методы принятия оптимальных решений, как исследование операций в экономике [7]. Это наиболее объемный раздел, включающий в себя следующие дисциплины и методы: оптимальное (математическое) программирование, в том числе методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, программно-целевые методы планирования и управления, теорию и методы управления запасами, теорию массового обслуживания, теорию игр, теорию и методы принятия решений, теорию расписаний. В оптимальное (математическое) программирование входят в свою очередь линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, дискретное (целочисленное) программирование, дробно-линейное программирование, параметрическое программирование, стохастическое программирование, геометрическое программирование; методы и дисциплины, специфичные отдельно как для централизованно планируемой экономики, так и для рыночной (конкурентной) экономики. К первым можно отнести теорию оптимального функционирования экономики, оптимальное планирование, теорию оптимального ценообразования, модели материально-технического снабжения и др. Ко вторым – методы, позволяющие разработать модели свободной конкуренции, модели капиталистического цикла, модели монополии, модели индикативного планирования, модели теории фирмы и т.д. Многие из методов, разработанных

для централизованно планируемой экономики, могут оказаться полезными и при экономико-математическом моделировании в условиях рыночной экономики.

Методы экспериментального изучения экономических явлений. К ним относят, как правило, математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры. Сюда можно отнести также и методы экспертных оценок, разработанные для оценки явлений, не поддающихся непосредственному измерению [8].

### 3. КЛАССИФИКАЦИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Единой системы классификации таких моделей в настоящее время не существует. Выделяют более десяти основных признаков их классификации [6].

По общему целевому назначению экономико-математические модели делят на теоретико-аналитические, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач анализа, прогнозирования и управления [7].

По степени агрегирования объектов моделирования модели разделяют на макроэкономические и микроэкономические.

Хотя между ними и нет четкого разграничения, к первым из них относят модели, отражающие функционирование экономики как единого целого, в то время как микроэкономические модели связаны, как правило, с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы [5].

По конкретному назначению, т.е. по цели создания и применения, выделяют:

- балансовые модели, выражающие требование соответствия наличия ресурсов и их использования;
- трендовые модели, в которых развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей;
- оптимизационные модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления;
- имитационные модели, предназначенные для использования в процессе компьютерной имитации изучаемых систем или процессов и др.

По типу информации, используемой в модели, экономико-математические модели делятся на аналитические и идентифицируемые.

По учету фактора времени модели подразделяются на статические, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и динамические, описывающие экономические системы в развитии.

По учету фактора неопределенности модели распадаются на детерминированные, если в них результаты на выходе однозначно определяются управляющими воздействиями, и стохастические (вероятностные), если при задании на входе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты в зависимости от действия случайного фактора.

Экономико-математические модели могут классифицироваться также по характеристике математических объектов, включенных в модель, другими словами, по типу математического аппарата, используемого в модели. По этому признаку могут быть выделены матричные модели, модели линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессивные модели, модели

теории массового обслуживания, модели сетевого планирования и управления, модели теории игр и т.д. [3].

По типу подхода к изучаемым социально-экономическим системам выделяют дескриптивные и нормативные модели. При дескриптивном (описательном) подходе получаются модели, предназначенные для описания и объяснения фактически наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений; в качестве примера дескриптивных моделей можно привести балансовые и трендовые модели. При нормативном подходе интересуются не тем, каким образом устроена и развивается экономическая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать в смысле определенных критериев. В частности, все оптимизационные модели относятся к типу нормативных; другим примером могут служить нормативные модели уровня жизни.

#### 4. ЭТАПЫ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Состояние системы – это совокупность значений ее показателей [9].

Все возможные состояния системы образуют ее множество состояний. Если в этом множестве определено понятие близости элементов, то оно называется пространством состояний.

Движение (поведение) системы – это процесс перехода системы из одного состояния в другое, из него в третье и т.д.

Если переход системы из одного состояния в другое происходит без прохождения каких-либо промежуточных состояний, то система называется дискретной.

Если при переходе между любыми двумя состояниями система обязательно проходит через промежуточное состояние, то она называется динамической (непрерывной).

Возможны следующие режимы движения системы:

1) равновесный, когда система находится все время в одном и том же состоянии;

2) периодический, когда система через равные промежутки времени проходит одни и те же состояния;

3) переходный режим – движение системы между двумя периодами времени, в каждом из которых система находилась в стационарном режиме;

4) аperiodический режим – система проходит некоторое множество состояний, однако закономерность прохождения этих состояний является более сложной, чем периодические, например, переменный период;

5) эргодический режим – система проходит все пространство состояний таким образом, что с течением времени проходит сколько угодно близко к любому заданному состоянию.

Свойства объекта и его поведение зависят от того, каким образом мы его представляем в виде системы. Например, если воздух, находящийся в этой комнате, представить в виде системы молекул, каждая из которых характеризуется своими координатами и скоростью, то поведение такой системы будет эргодично, если же определить его как систему, состоящую из одного элемента, показателями которого являются давление и температура, то такая система находится в равновесном режиме [7].

Для всех практических задач второй способ определения системы предпочтительнее. Мы получаем простую детерминированную систему, а в первом случае – сверхсложную вероятностную, которую мы не сможем исследовать, а если бы даже смогли, то нигде бы не использовали полученные результаты. Необходимо правильное определение системы и при исследовании экономических объектов, которыми мы желаем управлять. Инструментом исследования объектов для целей выбора оптимальных способов управления является кибернетическое моделирование.



#### 4.1. Задачи моделирования

В процессе выбора решения из нескольких вариантов и у хозяйственника, и у исследователя возникает ряд вопросов. Анализируются ли наиболее оптимальные варианты решений? На какой основе оцениваются последствия возможных решений? Какие показатели характеризуют эффективность принимаемого решения? Как выбрать из множества вариантов наиболее подходящее решение?

Чтобы ответить на эти вопросы, анализируемую проблему необходимо описать точно. Языком, наиболее подходящим для этого, является язык математики. Описание изучаемой системы на языке математики – это и есть её математическая модель [2, 4]. Кроме средств описания, математика предоставляет средства анализа модели, которые позволяют исследовать её свойства и выбрать наиболее подходящее решение.

Таким образом, процесс внедрения в экономическую практику вычислительной техники как средства обработки информации неизбежно приводит к принципиально новому этапу – построению математических моделей экономических объектов и их анализу. Эти исследования принято называть экономико-математическим моделированием.

Модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте [9].

Метод моделирования основывается на принципе аналогии, т. е. возможности изучения реального объекта не непосредственно, а через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта, его модели. Аналогии бывают следующими:

- 1) внешняя аналогия (модель самолета, корабля, микрорайона, выкройка),
- 2) структурная аналогия (схема системы охлаждения или электросхема автомобиля моделируются с помощью графов, отражающих все связи и пересечения, но не длины отдельных трубопроводов);
- 3) динамическая аналогия (по поведению системы) – маятник моделирует электрический колебательный контур;

Кибернетические модели относятся ко второму и третьему типу. Для них свойственно то, что они реализуются с помощью ЭВМ. Смысл кибернетического моделирования заключается в том, что эксперименты проводятся не с реальной физической моделью объекта, а с его описанием, которое помещается в память ЭВМ вместе с программами, реализующими изменения показателей объекта, предусмотренные этим описанием [5].

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Но далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть рассмотрены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами.

Под социально-экономической системой понимают сложную вероятностную динамическую систему, охватывающую процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ. Она относится к классу кибернетических систем, т.е. систем управляемых [10].

С описанием производят машинные эксперименты: меняют те или иные показатели, т.е. изменяют состояние объекта и регистрируют его поведение в этих условиях. Часто поведение объекта имитируется во много раз быстрее, чем на самом деле, благодаря быстрдействию ЭВМ. Кибернетическую модель часто называют имитационной моделью [5].

Формирование описания объекта (его системный анализ) является важнейшим звеном кибернетического моделирования. Вначале исследуемый объект разбивается на отдельные части и элементы, определяются их показатели, связи между ними и взаимодействия (энергетические и информационные). В результате объект оказывается представленным в виде системы. При этом очень важно учесть все, что имеет значение для той практической задачи, в которой возникла потребность в кибернетическом моделировании, и вместе с тем не переусложнить систему.

Центральным понятием кибернетики является понятие «система». Системой называется комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями между элементами и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему, если выявлены следующие четыре признака:

- 1) целостность системы, т.е. принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов;
- 2) наличие цели и критерия исследования данного множества элементов;
- 3) наличие более крупной, внешней по отношению к данной, системы, называемой «средой»;
- 4) возможность выделения в данной системе взаимосвязанных частей (подсистем).

Важнейшим понятием при экономико-математическом моделировании, как и при всяком моделировании, является понятие адекватной модели, т.е. соответствия модели моделируемому объекту или процессу. При моделировании имеется в виду не просто адекватность, но соответствие по тем свойствам, которые считаются существенными для исследования. Без проверки на адекватность применение результатов моделирования в управленческих решениях может не только оказаться мало полезным, но и принести существенный вред.

Социально-экономические системы относятся, как правило, к так называемым сложным системам. Сложные системы в экономике обладают рядом свойств,

которые необходимо учитывать при их моделировании, иначе невозможно говорить об адекватности построенной экономической модели [10].

Важнейшие из этих свойств следующие.

1. Эмерджентность как проявление в наиболее яркой форме свойства целостности системы, т.е. наличие у экономической системы таких свойств, которые не присущи ни одному из составляющих систему элементов, взятому в отдельности, вне системы. Эмерджентность есть результат возникновения между элементами системы так называемых синергетических связей, которые обеспечивают увеличение общего эффекта до величины, большей, чем сумма эффектов элементов системы, действующих независимо. Поэтому социально-экономические системы необходимо исследовать и моделировать в целом.

2. Массовый характер экономических явлений и процессов. Закономерности экономических процессов не обнаруживаются на основании небольшого числа наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения.

3. Динамичность экономических процессов, заключающаяся в изменении параметров и структуры экономических систем под влиянием среды (внешних факторов).

4. Случайность и неопределенность в развитии экономических явлений.

5. Невозможность изолировать протекающие в экономических системах явления и процессы от окружающей среды, чтобы наблюдать и исследовать их в чистом виде.

6. Активная реакция на появляющиеся новые факторы, способность социально-экономических систем к активным, не всегда предсказуемым действиям в зависимости от отношения системы к этим факторам, способам и методам их воздействия.

#### **4.2. Этапы экономико-математического моделирования**

Процесс моделирования включает в себя три структурных элемента: объект исследования; субъект (исследователь); модель, опосредующую отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом. Схема процесса моделирования состоит из четырех этапов [8].

Первый этап. Имеется некоторый объект, который необходимо исследовать методом моделирования. На первом этапе конструируют (или находят в реальном мире) другой объект – модель исходного объекта-оригинала. Этап построения модели предполагает наличие определенных сведений об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели определяются тем, что модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, поэтому любая модель замещает оригиналы в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта или характеризующих его с разной степенью детализации.

Второй этап. Модель выступает как самостоятельный объект исследования. Например, одну из форм такого исследования составляет проведение модельных экспериментов, при которых целенаправленно изменяют условия функционирования модели и систематизируют данные об ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала, которые отражены в данной модели.

Третий этап. Перенос знаний с модели на оригинал, в результате чего формируют множество знаний об исходном объекте и при этом переходят с языка модели на язык оригинала. С достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригиналы можно лишь в том случае, если этот результат соответствует признакам сходства оригинала и модели (другими словами, признакам адекватности).

Четвертый этап. Осуществляется практическая проверка полученных с помощью модели знаний и их использование как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для его целенаправленного преобразования или управления им.

Моделирование представляет собой циклический процесс, т.е. за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а первоначально построенная модель постепенно совершенствуется.

Процесс экономико-математического моделирования обладает рядом существенных особенностей, связанных как с объектом моделирования, так и с применяемыми аппаратом и средствами моделирования [7].

Процесс решения экономических задач осуществляется в несколько этапов.

1. Содержательная (экономическая) постановка задачи. Вначале нужно осознать задачу, сформулировать сущность проблемы, принимаемые предпосылки и допущения. Необходимо выделить важнейшие черты и свойства моделируемого объекта, изучить его структуру и взаимосвязь его элементов, хотя бы предварительно сформулировать гипотезы, объясняющие поведение и развитие и объекта. При этом определяются также объекты, которые относятся к решаемой задаче, а также ситуация, которую нужно реализовать в результате ее решения. Это – этап содержательной постановки задачи.

2. Для того чтобы задачу можно было описать количественно и использовать при ее решении вычислительную технику, нужно произвести качественный и количественный анализ объектов и ситуаций, имеющих к ней отношение. При этом сложные объекты, разбиваются на части (элементы), определяются связи этих элементов, их свойства, количественные и качественные значения свойств, количественные и логические соотношения между ними, выражаемые в виде уравнений, неравенств и т.п. Это – этап системного анализа задачи, в результате которого объект оказывается представленным в виде системы. Это этап формализации экономической проблемы, т. е. выражения ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.). Построение модели подразделяется в свою очередь на несколько стадий. Сначала

определяется тип экономико-математической модели, изучаются возможности ее применения в данной задаче, уточняются конкретный перечень переменных и параметров и форма связей. Для некоторых сложных объектов целесообразно строить несколько разноаспектных моделей; при этом каждая модель выделяет лишь некоторые стороны объекта, а другие стороны учитываются приближенно [6].

3. Математический анализ модели, в процессе которого осуществляется уточнение математической модели объекта и определение методов (алгоритмов) решения задачи – это этап системного синтеза (математической постановки) задачи. На этом этапе может оказаться, что ранее проведенный системный анализ привел к такому набору элементов, свойств и соотношений, для которого нет приемлемого метода решения задачи. В результате приходится возвращаться к этапу системного анализа. Как правило, решаемые в экономической практике задачи стандартизованы, системный анализ производится в расчете на известную математическую модель и алгоритм ее решения, проблема состоит лишь в выборе подходящего метода. На этом этапе чисто математическими приемами исследования выявляются общие свойства модели и ее решений. В частности, важным моментом является определение существования решения сформулированной задачи. При аналитическом исследовании выясняется, единственно ли решение, какие переменные могут входить в решение, в каких пределах они изменяются, каковы тенденции их изменения и т.д. Однако модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию. В таких случаях переходят к численным методам исследования.

4. Следующим этапом является разработка программы решения задачи на ЭВМ и подготовка исходной информации. В экономических задачах это, как правило, наиболее трудоемкий этап моделирования, так как дело не сводится к пассивному сбору данных. Для сложных объектов, состоящих из большого числа элементов, обладающих большим числом свойств, может потребоваться составление базы данных и средств работы с ней, методов извлечения данных, нужных для расчетов. Для стандартных задач осуществляется не разработка, а выбор подходящего пакета прикладных программ и системы управления базами данных. В процессе подготовки информации используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т.д. При системном экономико-математическом моделировании результаты функционирования одних моделей служат исходной информацией для других.

5. На заключительном этапе производится эксплуатация модели, получение результатов, анализ численных результатов и их применение. Обычно расчеты на основе экономико-математической модели носят многовариантный характер. Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным. Прежде всего решается важнейший вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели. Поэтому в первую очередь должна быть

проведена проверка адекватности модели по тем свойствам, которые выбраны в качестве существенных. Верификация модели – проверка правильности структуры (логики) модели; валидация модели – проверка соответствия данных, полученных на основе модели, реальному процессу [5, 6].

Применение численных результатов моделирования в экономике направлено на решение практических задач (анализ экономических объектов, экономическое прогнозирование развития хозяйственных и социальных процессов, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии).

Таким образом, решение задачи включает следующие этапы.

1. Содержательная постановка задачи.
2. Системный анализ.
3. Системный синтез (математическая постановка задачи) подготовка исходной информации.
4. Разработка или выбор программного обеспечения.
5. Решение задачи и проверка адекватности.

Перечисленные этапы экономико-математического моделирования находятся в тесной связи, в частности, могут иметь место возвратные связи этапов. Так, на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи или противоречива, или приводит к слишком сложной математической модели; в этом случае исходная постановка задачи должна быть скорректирована. Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает на этапе подготовки исходной информации. Если необходимая информация отсутствует или затраты на ее подготовку слишком велики, приходится возвращаться к этапам постановки задачи и ее формализации, чтобы приспособиться к доступной исследователю информации.

Как уже отмечалось, процесс моделирования носит циклический характер. Недостатки, которые не удается исправить на тех или иных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах. Однако результаты каждого цикла имеют и вполне самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно получить полезные результаты, а затем перейти к более сложной и более совершенной модели, включающей в себя новые условия и более точные математические зависимости.

Последовательное использование методов исследования операций и их реализация на современной информационно-вычислительной технике позволяет преодолеть субъективизм, исключить волевые решения, основанные не на строгом и точном учете объективных обстоятельств, а на случайных эмоциях и личной заинтересованности руководителей различных уровней, которые к тому же не могут согласовать эти свои волевые решения.

Системный анализ позволяет учесть и использовать в управлении всю имеющуюся информацию об управляемом объекте, согласовать принимаемые решения с точки зрения объективного, а не субъективного, критерия эффективности.

ЭВМ не только позволяет учесть всю информацию, но и избавляет управленца от ненужной ему информации, а всю нужную пускает в обход человека,

представляя ему только выборочные данные, необходимые для принятия решения. Системный подход в экономике эффективен и сам по себе, без использования ЭВМ, как метод исследования, при этом он не изменяет ранее открытых экономических законов, а только позволяет их лучше использовать.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального распределения техники по участкам транспортных работ [2].

На каждую автоколонну из 100 автомобилей, направляемых для перевозки грузов из района А, выделяются 1 передвижная мастерская, 2 автомобиля технической помощи и 2 мотоцикла для разъездных механиков, а из района В на такую же автоколонну – 2 передвижные мастерские, 1 автомобиль технической помощи и не выделяются мотоциклы. Каждый день 1 автоколонна из района А вывозит 3 тыс. т груза, а из района В – 2,5 тыс. т. Необходимо определить, какое количество автоколонн следует направить в каждый район, если имеется 1000 автомобилей, 16 авторемонтных мастерских, 16 автомобилей технической помощи и 14 мотоциклов, чтобы обеспечить максимальный вывоз груза.

Сформулируем эту задачу в математическом виде. Для этого обозначим количество автоколонн, направляемых в район А –  $X_1$  а в район В –  $X_2$ .

Тогда можно записать следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} 100X_1 + 100X_2 &\leq 1000 \\ 1X_1 + 2X_2 &\leq 16 \\ 2X_1 + 1X_2 &\leq 16 \\ 2X_1 &\leq 14 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти неравенства показывают ограничения по возможности использования имеющихся ресурсов. Этими ресурсами являются автомобили, которые можно использовать в количестве не более 1000, мастерские – 16, автомобили технической помощи – 16 и мотоциклы – 14. Каждое неравенство соответствует одному из используемых ресурсов. В этих неравенствах видна система взаимосвязанных факторов. Так, при решении необходимо выдержать определенные соотношения: на каждые 100 автомобилей, направляемых в район А, надо иметь одну передвижную мастерскую, два автомобиля технической помощи и два мотоцикла и т.д. Необходимо решить эту задачу таким образом, чтобы обеспечить максимальный вывоз груза, т.е., говоря математически, нужно максимизировать функцию

$$C_{\text{макс}} = 3X_1 + 2,5X_2, \quad (2)$$

Эта функция является критерием оптимальности.

Кроме того, значения  $X_1$  и  $X_2$  не могут быть отрицательными числами, так как это противоречило бы экономическому смыслу задачи.

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0, \quad (3)$$

Система (1) показывает условия (ограничения) использования имеющихся ресурсов – автомобилей, передвижных мастерских, автомобилей технической помощи, мотоциклов; функция (2) определяет цель (критерии) оптимального решения данной задачи, условие (3) необходимость получения неотрицательных значений переменных (неизвестных). Такая математическая запись рассматриваемой задачи и является ее экономико-математической моделью.



## 5. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методы оптимизации рассматривают как экономико-математические методы [2, 3, 5].

Академик Немчинов выделял пять базовых методов исследования при планировании:

- 1) балансовый метод;
- 2) метод математического моделирования;
- 3) векторно-матричный метод;
- 4) метод экономико-математических множителей (оптимальных общественных оценок);
- 5) метод последовательного приближения.

Академик Канторович выделял математические методы в четыре группы:

- 1) макроэкономические модели, куда относил балансовый метод и модели спроса;
- 2) модели взаимодействия экономических подразделений (на основе теории игр);
- 3) линейное моделирование, включая ряд задач, немного отличающихся от классического линейного программирования;
- 4) модели оптимизации, выходящие за пределы линейного моделирования (динамическое, нелинейное, целочисленное, и стохастическое программирование).

И с той, и с другой классификацией можно спорить, поскольку, например модели спроса можно по ряду особенностей отнести к нелинейному программированию, а стохастическое моделирование уходит корнями в теорию игр [1].

С точки же зрения роли математических методов стоит говорить лишь о широте применения различных методов в реальных процессах планирования.

Среди математических методов решения планово-экономических задач прежде всего следует назвать методы *математического программирования*, с помощью которых решаются задачи на экстремум (максимум или минимум) функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Из методов математического программирования при решении планово-экономических задач *Линейность* определяет математическую природу этих моделей, с помощью которых описываются эти задачи. Она состоит в том, что условия задач выражаются системой линейных уравнений или неравенств, содержащих неизвестные только первой степени. Именно к такому типу задач относится рассмотренный выше пример по определению количества автоколонн, которые следует направить в районы А и В для максимального вывоза груза. Таким образом, предметом линейного программирования являются анализ и решение экстремальных задач с линейными связями и ограничениями, что составляет его математическое содержание [2].

Для любых задач линейного программирования характерны три следующих условия (по акад. В.Л. Немчинову):

- 1) наличие системы взаимосвязанных факторов;
- 2) строгое определение критерия оценки оптимальности;
- 3) точная формулировка условий, ограничивающих использование наличных ресурсов.

С учетом этих условий экономическим содержанием задач линейного программирования является отыскание наилучших способов использования имеющихся ресурсов [2].

Многие задачи планирования на автомобильном транспорте имеют именно такое содержание. Например, при закреплении клиентуры за автотранспортными предприятиями взаимосвязанными факторами являются расстояния между ними, критерием оптимальности – достижение минимума нулевых пробегов, а ограничениями – количество автомобилей, выпускаемых на линию автотранспортными предприятиями, и количество автомобилей, необходимых для клиентов. Решение такой задачи сводится к определению количества автомобилей, которое следует направлять из каждого автотранспортного предприятия каждому клиенту с учетом ограничения выпускаемых автомобилей каждым автотранспортным предприятием; каждому клиенту требуется определенное их число, и при этом общий пулевой пробег всех автомобилей должен быть минимальным.

В линейном программировании имеются различные методы решения соответствующих планово-экономических задач. Если имеются всего две переменные, то может быть использован графический метод решения. Однако, как правило, в практике планирования задач с двумя переменными почти не бывает, и поэтому графический метод не получил заметного распространения. Для решения задач с большим числом переменных используется метод решения транспортных задач, в основе которого лежит определение оптимального плана закрепления потребителей однородного груза за поставщиками, хотя этот метод применяется и при решении других задач с однородными ресурсами. Когда нужно использовать разнородные ресурсы, например различные машины, материалы и т.п., для выполнения какой-либо работы, то для оптимального планирования применяется наиболее общий метод линейного программирования, который получил в соответствии со своей математической основой название симплексного метода.

Наиболее широко используется метод линейной оптимизации, который был разработан академиком Канторовичем в 30-е годы XX-го века. Чаще всего задача линейного программирования применяется при моделировании организации производства:

В производстве участвуют  $M$  различных производственных факторов – рабочая сила, сырье, материалы, оборудование, конечные и промежуточные продукты и др. Производство использует  $S$  технологических способов производства, причем для каждого из них заданы объемы производимых

ингредиентов, рассчитанные на реализацию этого способа с единичной эффективностью, т.е. задан вектор

$$a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}), k = 1, 2, \dots, S, \quad (4)$$

в котором каждая из компонент  $a_{ik}$  указывает объем производства соответствующего ( $i$ -го) элемента, если она положительна; и объем его расходования, если она отрицательна (в способе  $k$ ).

Выбор плана означает указание интенсивностей использования различных технологических способов, т.е. план определяется вектором

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_S), \quad (5)$$

с неотрицательными компонентами [4].

Обычно на количества выпускаемых и затрачиваемых ингредиентов накладываются ограничения: произвести нужно не менее, чем требуется, а затрачивать не больше, чем имеется. Такие ограничения записываются в виде

$$\sum_{k=1}^S a_{ik} x_k > b_i; i=1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

Если  $i > 0$ , то неравенство означает, что имеется потребность в ингредиенте в размере  $i$ ,

Общая задача линейного программирования может быть представлена в математической форме.

Для заданных чисел  $a_{ik}$ ,  $c_k$ , и  $b_i$  найти

$$\min \sum_{k=1}^S c_k x_k, \quad (7)$$

при условиях  $k > 0, k=1, 2, \dots, S$

$$\sum_{k=1}^S a_{ik} x_k > b_i, i=1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

при условиях  $k > 0, k=1, 2, \dots, S$

План, удовлетворяющий условиям (5.4) и (5.5) является допустимым, а если в нем, кроме того, достигается минимум целевой функции, то этот план оптимальный [4].

Задача линейного программирования двойственна, то есть, если прямая задача имеет решение, (вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ), то существует и имеет решение обратная задача основанная на транспонировании матрицы прямой задачи. Решением

обратной задачи является вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  компоненты которого можно рассматривать как объективно обусловленные оценки ресурсов, т.е. оценки, показывающие ценность ресурса и насколько полно он используется.

Нужды практики заставили разработать еще целый ряд приемов и методов для различных случаев описания реалий хозяйственной практики в виде ограничений. Это такие приемы, как запись ограничений по использованию производственных ресурсов, запись ограничений по гарантированному объему работ или производства продукции, приемы моделирования при неизвестных значениях показателей и многие другие, на которых здесь не стоит останавливаться.

Цель всех этих приемов – дать более развернутую модель какого-либо явления из хозяйственной практики, сэкономив при этом на количестве переменных и ограничений [5].

Несмотря на широту применения метода линейного программирования, он учитывает лишь три особенности экономических задач:

- 1) большое количество переменных,
- 2) ограниченность ресурсов и
- 3) необходимость целевой функции.

Конечно, многие задачи с другими особенностями можно свести к линейной оптимизации, но нецелесообразно упускать из виду другой хорошо разработанный метод математического моделирования – динамическое программирование. По сути, задача динамического программирования является описанием многошаговых процессов принятия решений. Задача динамического программирования можно сформулировать следующим образом: имеется некоторое количество ресурса  $x$ , которое можно использовать  $N$  различными способами. Если обозначить через  $x_i$  количество ресурса, используемое  $i_m$  способом, то каждому способу сопоставляется функция полезности  $(x^*)$ , выражающая доход от этого способа. Предполагается, что все доходы измеряются в одинаковых единицах и общий доход равен сумме доходов, полученных от использования каждого способа.

Тогда можно поставить задачу в математической форме.

Найти

$$\max y_1(x_1) + y_2(x_2) + \dots + y_n(x_n), \quad (9)$$

(общий доход от использования ресурсов всеми способами) при условиях:

- 1) выделяемые количества ресурсов неотрицательны

$$x_1 > 0, \dots, x_n > 0, \quad (10)$$

- 2) общее количество ресурсов равно  $x$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x. \quad (11)$$

Для этой общей задачи могут быть построены рекуррентные соотношения, с помощью которых находится ее решение.

$$f_1(x) = \max(\varphi_1(x_1)) \quad (12)$$
$$0 < x_1 \leq x,$$

$$f_k(x) = \max(\varphi_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)) \quad (13)$$
$$k = 2, 3, \dots, N,$$

При выводе этих рекуррентных соотношений, по сути, использовался следующий принцип: оптимальная стратегия обладает тем свойством, что по отношению к любому первоначальному состоянию после некоторого этапа решения совокупность последующих решений должна составлять оптимальную стратегию. Этот принцип оптимальности лежит в основе всей концепции динамического программирования. Именно благодаря ему удается при последующих переходах испытывать не все возможные варианты, а лишь оптимальные выходы. Рекуррентные соотношения позволяют заменить чрезвычайно-трудоемкие вычисления максимума по  $N$  переменным в исходной задаче решением  $N$  задач, в каждой из которых максимум находится лишь по одной переменной.

Таким образом, метод динамического программирования позволяет учесть такую важную особенность экономических задач, как детерминированность более поздних решений от более ранних.

Кроме этих двух, достаточно детально разработанных методов, в экономических исследованиях в последнее время стали применяться множество других методов.

Одним из подходов к решению экономических задач является подход, основанный на применении новой математической дисциплины – теории игр.

Суть этой теории заключается в том, что игрок (участник экономических взаимоотношений) должен выбрать оптимальную стратегию в зависимости от того, какими он представляет действия противников (конкурентов, факторов внешней среды и т.д.). В зависимости от того, насколько игрок осведомлен о возможных действиях противников, игры (а под игрой здесь понимается совокупность правил, тогда сам процесс игры это партия) бывают открытые и закрытые. При открытой игре оптимальной стратегией будет выбор максимального минимума выигрыша (в терминах Моргерштерна – "максимина") из всей совокупности решений, представленных в матричной форме. Соответственно противник будет стремиться проиграть лишь минимальный максимум ("минимакс") который в случае игр с нулевой суммой будет равен "максимину". В экономике же чаще встречаются игры с ненулевой суммой, когда выигрывают оба игрока.

Кроме этого в реальной жизни число игроков редко бывает равно всего двум. При большем же числе игроков появляются возможности для кооперативной

игры, когда игроки до начала игры могут образовывать коалиции и соответственно влиять на ход игры.

Стратегии игроков не обязательно должны содержать одно решение, может быть так, что для достижения максимального выигрыша потребуется применять смешанную стратегию (когда две или несколько стратегий применяются с какой-то вероятностью). Кроме того в закрытых играх тоже требуется учитывать вероятность того или иного решения противника. Таким образом, в теории игр стало необходимым применение аппарата теории вероятности, который впоследствии нашел свое применение в экономических исследованиях в виде отдельного метода – стохастического моделирования.

Содержание метода стохастического программирования состоит во введении в матрицу задачи или в целевую функцию элементов теории вероятности. В этом случае обычно берется просто среднее значение случайной величины, взятое относительно всех возможных состояний.

В случае не жесткой, или двухэтапной задачи стохастического моделирования появляется возможность корректировки полученного плана после того, как станет известным состояние случайной величины.

Кроме этих методов применяются методы нелинейного, целочисленного программирования и многие другие. Вкратце, сущность метода нелинейного программирования заключается в нахождении или седловинной точки, или общего максимума или минимума функции. Основная сложность здесь в трудности определения, является ли этот максимум общим или локальным. Для целочисленного моделирования основная трудность как раз и заключается в трудности подбора целого значения функции. Общим для применения этих методов на современном этапе является возможность частичного сведения их к задаче линейного моделирования. Возможно, в недалеком будущем будет найдено какое-то оригинальное решение таких задач специфическими методами, более удобными, чем современные методы решения подобных задач (для которых они есть), и более точные, нежели приближенные решения методами линейного программирования [3].

Перспективными методами исследования в экономике, несомненно, следует считать теорию игр и стохастическое моделирование. Их роль возрастает с совершенствованием электронно-вычислительных машин. Переработка все больших объемов статистической информации позволит выявлять более глубокие вероятностные закономерности экономических явлений. Развитие же такого специфического рода вычислительных систем, как самообучающиеся системы или так называемый "искусственный интеллект" возможно, позволит широко использовать моделирование экономических взаимоотношений с помощью деловых компьютерных игр. Играя, самообучающиеся системы будут приобретать опыт принятия оптимальных решений в самых сложных ситуациях, не теряя при этом преимущества вычислительной техники перед человеком – большой объем памяти, прямой доступ к ней, быстрое действие.

К математическому программированию относятся и методы решения задач *нелинейного программирования*. Слово нелинейное показывает, что

соответствующие задачи в этом случае описываются нелинейными уравнениями. Свойство нелинейности состоит в том, что результат взаимодействия нескольких фактором не равен простой алгебраической сумме их действия. Например, если планировать одновременную работу на посту технического обслуживания автомобилей двух рабочих, то их производительность будет одна, а если четырех – она может быть и меньше из-за недостаточности фронта работ.

Некоторые планово-экономические задачи связаны с принятием ряда последовательных и поэтапных решений. Например, при планировании строительства автотранспортных предприятий необходимо определить, объем годового плана. Для решения таких задач могут быть использованы методы *динамического программирования*, в основе которых лежит совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения, основанные на вычислении последствий каждого из них и выработке оптимальных стратегий для последующих решений. Известны и другие методы математического программирования. Однако они являются еще весьма сложными и пока не получили широкого практического применения.

Кроме методов математического программирования, для решения планово-экономических задач находят применение и методы, которые созданы в других прикладных направлениях математической науки. Примером этого могут служить методы комбинаторного анализа, которые используются при составлении развозочных и сборных маршрутов перевозок мелкопартионных грузов и при выборе схем автобусных маршрутов в городах. Большое значение приобретают теория вероятностей и математическая статистика, когда при планировании нужно учесть вероятностные факторы организации процессов массового обслуживания. Для планирования процессов материально-технического снабжения в настоящее время начинает широко применяться математическая теория управления запасами. Таким образом, в планировании работы автотранспортных предприятий может быть использован широкий набор экономико-математических методов.

## 6. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование это частный раздел оптимального программирования. В свою очередь оптимальное (математическое программирование) – раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении [1, 3, 4].

Необходимым условием использования оптимального подхода к планированию и управлению (принципа оптимальности) является гибкость, альтернативность производственно-хозяйственных ситуаций, в условиях которых приходится принимать плано-управленческие решения. Именно такие ситуации составляют повседневную практику хозяйствующего субъекта (выбор производственной программы, прикрепление к поставщикам, маршрутизация и.д.).

Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое плано-экономическое решение, которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (14)$$

где  $x_j$ , ( $j=1, n$ ) – его компоненты.

Слова «наилучшим образом» здесь означают выбор некоторого экономического показателя, позволяющего сравнивать эффективность тех или иных плано-управленческих решений. Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и др.

Слова «учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности» означают, что на выбор плано-управленческого решения (поведения) накладывается ряд условий, т.е. выбор  $X$  осуществляется из некоторой области возможных (допустимых) решений  $D$ ; эту область называют также областью определения задачи.

Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это значит решить экстремальную задачу вида:

$$\max(\min)f(\bar{X}), \quad (15)$$

$$\bar{X} \in D, \quad (16)$$

где  $f(\bar{X})$  – математическая запись критерия оптимальности – целевая функция. Задачу условной оптимизации (15), (16) обычно записывают в виде: Найти максимум или минимум функции

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (17)$$



при ограничениях

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_1, \quad (18)$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_2, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_m, \\ x_j \geq 0, j=1, n \end{aligned} \quad (20)$$

Условие (20) необязательно, но его всегда при необходимости можно добиться. Обозначение  $\{ \leq, =, \geq \}$  говорит о том, что в конкретном ограничении возможен один из знаков:  $\leq$ ,  $=$  или  $\geq$ .

Более компактная запись:

$$\max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (21)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i=\overline{1, m} \quad (22)$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1, n} \quad (23)$$

Задача (21)–(23) – общая задача оптимального (математического) программирования, в основе построения (разработки) которой лежат принципы оптимальности и системности.

Вектор  $\bar{X}$  (набор управляющих переменных  $x_j$ ,  $j=1, n$ ) называется допустимым решением, или планом задачи оптимального программирования, если он удовлетворяет системе ограничений, то план  $\bar{X}$  (допустимое решение), который доставляет максимум или минимум целевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называется оптимальным планом (оптимальным поведением, или просто решением) задачи оптимального программирования.

### 6.1. Пример задачи линейного программирования

Для улучшения понимания логично рассмотреть решение задачи по распределению ограниченного числа ресурсов [2].

Условие задачи: на участок строящейся дороги необходимо вывезти 20 000 м<sup>3</sup> каменных материалов. В районе строительства имеются три карьера с запасами 8000 м<sup>3</sup>, 9000 м<sup>3</sup> и 10 000 м<sup>3</sup>. Для погрузки материалов используются экскаваторы, имеющие производительность 250 м<sup>3</sup> в смену в карьерах 1 и 2 и 500 м<sup>3</sup> в смену в карьере 3.

Эти карьеры обеспечивают каменными материалами также ряд других строящихся объектов. На погрузку материалов для рассматриваемого участка выделен для экскаваторов общий лимит 60 машино-смен с правом использования его по усмотрению строителей.

Транспортные затраты на перевозку материалов характеризуются показателями: для перевозки  $10\ 000\ \text{м}^3$  материалов из карьера 1 требуется 1000 автомобиле-смен, из карьера 2 – 1350, из карьера 3 – 1700 автомобиле-смен.

Требуется найти: оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные затраты.

Решение. Сформулируем экономико-математическую модель задачи. Примем за единицу измерения количества материалов  $10\ 000\ \text{м}^3$ .

Обозначим через  $x_1$  объем добычи материалов в карьере 1,  $x_2$  – в карьере 2,  $x_3$  – в карьере 3. Необходимо минимизировать транспортные затраты:

$$\min f(X) = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3 \quad (24)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2,0, \quad (25)$$

$$40x_1 + 40x_2 + 20x_3 \leq 60, \quad (26)$$

$$0 \leq x_1 \leq 0,8, \quad (27)$$

$$0 \leq x_2 \leq 0,9, \quad (28)$$

$$0 \leq x_3 \leq 1,0. \quad (29)$$

Условие (25) отражает потребность в материалах, (26) – ограничение по наличию ресурса «фонд рабочего времени экскаваторов» (невозможно использовать больше того, что в наличии). Условия (27)–(29) отражают тот факт, что добыча материалов идет в условиях ограниченности запасов материалов в соответствующих карьерах. Полученная задача – задача линейного программирования; решив ее симплекс-методом найдем оптимальный план (решение):

$$\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*); \quad (30)$$

$$x_1^* = 0,8 \text{ (} 8000\ \text{м}^3\text{)}; \quad (31)$$

$$x_2^* = 0,2 \text{ (} 2000\ \text{м}^3\text{)}; \quad (32)$$

$$x_3^* = 1,0 \text{ (} 10\ 000\ \text{м}^3\text{)}. \quad (33)$$

Таким образом, из карьера 1 следует вывезти  $8000\ \text{м}^3$  материалов, из карьера 2 –  $2000\ \text{м}^3$ , из карьера 3 –  $10\ 000\ \text{м}^3$ .

Это управленческое решение будет связано с минимальными транспортными затратами

$$f(\bar{X}^*) = 1\,000 \times 0,8 + 1\,350 \times 0,2 + 1\,700 \times 1,0 = 2\,770 \text{ (автомобиле-смен)}.$$

Таким образом, выбор оптимального управленческого поведения в конкретной производственной ситуации связан с проведением с позиций системности и оптимальности экономико-математического моделирования и решением задачи оптимального программирования.

Изучение и понимание современных экономико-математических методов предполагает достаточно серьезную математическую подготовку специалистов.

## 6.2. Транспортная задача

«Транспортная задача» является основной математической задачей, решаемой при организации перевозок [10]. Она решается методами линейного программирования, и формулируется следующим образом. Имеется  $m$  пунктов отправления  $A_1, \dots, A_m$ , в которых сосредоточены запасы однородных продуктов в количестве  $a_1, \dots, a_m$ , единиц. Имеется  $n$  пунктов потребления  $B_1, \dots, B_n$ , потребность которых в указанных продуктах составляет  $b_1, \dots, b_n$  единиц. Известны также транспортные расходы  $C_{ij}$ , связанные с перевозкой единицы продукта из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ ,  $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ . В простейшем случае задача является сбалансированной, то есть общий объем поставок равен объему потребления.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (34)$$

Требуется составить такой план перевозок (закрепления грузоотправителей за грузополучателями), чтобы удовлетворить спрос всех пунктов потребления за счет реализации всего продукта, имеющегося в пунктах отправления, при котором суммарные затраты на перевозку грузов будут минимальными.

Для формализации этой задачи принимают, что  $x_{ij}$  – количество единиц продукта, поставляемого из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ . Подлежащие минимизации суммарные затраты на перевозку продукта из всех пунктов отправления во все пункты потребления выражают формулой:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} = \min. \quad (35)$$

Суммарное количество продукта, направляемого из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу продукта в данном пункте.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i=1, \dots, m. \quad (36)$$

Суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения из всех пунктов отправления, должно быть равно потребности. Это условие полного удовлетворения спроса.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j=1, \dots, n. \quad (37)$$

Объемы перевозок – неотрицательные числа, так как перевозки из пунктов потребления в пункты отправления исключены.

$$x_{ij} \geq 0, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n. \quad (38)$$

Для решения транспортной задачи используется метод потенциалов [1], для применения которого необходимо произвести первоначальное заполнение, то есть необходимо закрепить грузополучателей за грузоотправителями так, чтобы выполнялся план вывоза по грузоотправителям и план завоза по грузополучателям. Наиболее распространёнными методами первоначального заполнения являются метод «северо-западного угла» и «двойного предпочтения» [10]. Метод «северо-западного угла» заключается в том, что максимально заполняется верхняя левая ячейка плана перевозок. Метод «двойного предпочтения» заключается в определении минимальных издержек по строкам и столбцам плана перевозок и первоначальном заполнении ячеек, которые имеют минимальные издержки и по строке, и по столбцу, затем заполняются ячейки, имеющие минимальные издержки по столбцу или строке, а затем все остальные. Первоначальное заполнение с помощью этого метода на конкретном примере представлено в табл. 1. В правом верхнем углу каждой ячейки указаны издержки при доставке груза от данного отправителя (столбец) данному получателю (строка). Очень часто, в качестве показателя, характеризующего издержки, используется расстояние между грузоотправителем и грузополучателем, так как суммарные затраты на погрузку и выгрузку практически не зависят от направлений перевозки и поэтому их можно не учитывать при закреплении грузополучателей за грузоотправителями. Ячейки, имеющие минимальные издержки по строке или столбцу обозначены «\*», а количество доставляемого груза выделено жирным шрифтом. Из этих двух методов метод «двойного предпочтения» используется чаще, так как позволяет получить заполнение более близкое к оптимальному. Однако, этот метод имеет «ступенчатость» в порядке заполнения клеток матрицы перевозок, так как фактически все клетки матрицы делятся на три группы: имеющие минимальный элемент по строке и столбцу, имеющие минимальный элемент по строке или столбцу, остальные клетки. Для ухода от этой «ступенчатости» предлагается

следующий метод, который предлагается назвать методом «двойного ранжирования».

Таблица 1

Первоначальное заполнение по методу «двойного предпочтения»

Грузополучатели	Грузоотправители				Завоз						
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>							
V <sub>1</sub>	40 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>**</td></tr></table>	4	**	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>10</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	10	*	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>12</td></tr></table>	12	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr></table>	21	40
4											
**											
10											
*											
12											
21											
V <sub>2</sub>	62 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>6</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	6	*	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>17</td></tr></table>	17	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>14</td></tr></table>	14	12 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>8</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	8	*	74
6											
*											
17											
14											
8											
*											
V <sub>3</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>23</td></tr></table>	23	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>11</td></tr></table>	11	26 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>8</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	8	*	18 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>27</td></tr></table>	27	44	
23											
11											
8											
*											
27											
V <sub>4</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>18</td></tr></table>	18	48 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>14</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	14	*	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr></table>	21	16 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>16</td></tr></table>	16	64	
18											
14											
*											
21											
16											
V <sub>5</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>7</td></tr></table>	7	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>15</td></tr></table>	15	38 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>**</td></tr></table>	3	**	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>19</td></tr></table>	19	38	
7											
15											
3											
**											
19											
V <sub>6</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>19</td></tr></table>	19	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr></table>	21	36 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>5</td></tr><tr><td>*</td></tr></table>	5	*	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>17</td></tr></table>	17	36	
19											
21											
5											
*											
17											
Вывоз	102	48	100	46	296						

Целевая функция имеет следующее значение (сумма произведений объёмов перевозок на расстояние для заполненных клеток A1B1, A1B2, A2B4, A3B3, A3B5, A3B6, A4B2, A4B3, A4B4):

$$F=40 \times 4 + 62 \times 6 + 48 \times 14 + 26 \times 8 + 38 \times 3 + 36 \times 5 + 12 \times 8 + 18 \times 27 + 16 \times 16 = 2544.$$

Метод «двойного ранжирования» заключается в следующем: для каждой ячейки матрицы перевозок определяется ранг по строке и столбцу в порядке возрастания издержек по доставке 1 тонны груза, ранг каждой ячейки определяется сложением рангов данной ячейки по строке и столбцу, заполнение начинается с ячейки имеющей минимальный ранг [11]. Этот метод по первым заполненным ячейкам будет идентичен методу «двойного предпочтения», так как ячейки имеющие ранг 2 будут соответствовать ячейкам с двумя предпочтениями (минимальные издержки по строке и столбцу). Дальнейшее заполнение по методу «двойного ранжирования» будет иметь непрерывный характер в соответствии с возрастанием ранга, в то время, как по методу «двойного предпочтения» заполнение производится как бы по двум группам: первая группа – имеющим ячейки с минимальным элементом по строке или столбцу, вторая – остальные.

Сравним предлагаемый метод с методом «двойного предпочтения» на том же конкретном примере, представленном в таблице 2. Лучшим считается такой план

перевозок, который обеспечивает меньшие издержки по доставке всего заданного объёма груза. Математически ставится задача нахождения такого плана перевозок, который соответствует минимуму целевой функции, которая равняется сумме произведений объёмов перевозок по каждому направлению на издержки перевозок по каждому направлению. В качестве издержек принимается расстояние, поэтому функцией цели будет транспортная работа, выраженная в тонно-километрах и критерием оптимальности будет минимальная транспортная работа.

Таблица 2

Первоначальное заполнение по методу «двойного ранжирования»

Грузополучатели	Грузоотправители				Завоз								
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>									
B <sub>1</sub>	40 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	4	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>10</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	10	3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>12</td></tr><tr><td>7</td></tr></table>	12	7	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr><tr><td>9</td></tr></table>	21	9	40
4													
2													
10													
3													
12													
7													
21													
9													
B <sub>2</sub>	62 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>6</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	6	3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>17</td></tr><tr><td>9</td></tr></table>	17	9	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>14</td></tr><tr><td>8</td></tr></table>	14	8	12 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>8</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	8	3	74
6													
3													
17													
9													
14													
8													
8													
3													
B <sub>3</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>23</td></tr><tr><td>9</td></tr></table>	23	9	18 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>11</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	11	4	26 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>8</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	8	4	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>27</td></tr><tr><td>10</td></tr></table>	27	10	44
23													
9													
11													
4													
8													
4													
27													
10													
B <sub>4</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>18</td></tr><tr><td>7</td></tr></table>	18	7	30 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>14</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	14	4	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr><tr><td>10</td></tr></table>	21	10	34 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>16</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	16	4	64
18													
7													
14													
4													
21													
10													
16													
4													
B <sub>5</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>7</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	7	5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>15</td></tr><tr><td>7</td></tr></table>	15	7	38 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	3	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>19</td></tr><tr><td>8</td></tr></table>	19	8	38
7													
5													
15													
7													
3													
2													
19													
8													
B <sub>6</sub>	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>19</td></tr><tr><td>8</td></tr></table>	19	8	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>21</td></tr><tr><td>10</td></tr></table>	21	10	36 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>5</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	5	3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>17</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	17	5	36
19													
8													
21													
10													
5													
3													
17													
5													
Вывоз	102	48	100	46	296								

Целевая функция имеет следующее значение (сумма произведений объёмов перевозок на расстояние для заполненных клеток A1B1, A1B2, A2B3, A2B4, A3B3, A3B5, A3B6, A4B2, A4B4):

$$F=40 \times 4 + 62 \times 6 + 18 \times 11 + 30 \times 14 + 26 \times 8 + 38 \times 3 + 36 \times 5 + 12 \times 8 + 34 \times 16 = 2292.$$

Очевидно, что для данного примера первоначальное заполнение по методу «двойного ранжирования» дало снижение транспортной работы на 10% по сравнению с первоначальным заполнением по методу «двойного предпочтения».

Решение транспортных задач различной размерности показало, что для задач небольшой размерности рассмотренные методы дают одинаковое первоначальное заполнение, зачастую сразу получается оптимальный план. При увеличении

размерности задачи эффективность метода «двойного ранжирования» по сравнению с методом «двойного предпочтения» возрастает.

Существенно сократить затраты труда и времени при решении транспортной задачи позволяет использование компьютерных программ. Самая простая и доступная для всех – Excel.

Решение задачи рассмотрим на примере.

По условиям задачи имеются пять складов однородной продукции и четыре пункта, куда их необходимо доставить. Потребность каждого пункта в продукции различна, и запасы на каждом складе ограничены (табл. 3).

Таблица 3

Количество продукции и потребность в ней

Склады	Наличие продукции, т	Пункты доставки	Потребность в продукции, т
Склад № 1	200	Пункт № 1	200
Склад № 2	190	Пункт № 2	150
Склад № 3	220	Пункт № 3	220
Склад № 4	145	Пункт № 4	330
Склад № 5	280		

Известны также расстояния в км между складами и пунктами доставки (табл. 4).

Таблица 4

Расстояния между складами и пунктами доставки

	Пункт № 1	Пункт № 2	Пункт № 3	Пункт № 4
Склад № 1	6	4	5	11
Склад № 2	12	6	4	9
Склад № 3	15	7	10	4
Склад № 4	9	5	12	5
Склад № 5	3	7	12	11

Требуется определить, с какого склада, в какой пункт поставлять, сколько продукции для минимизации грузооборота перевозок.

В Excel готовится таблица с перечислением всех поставщиков и потребителей (табл. 5).

Таблица 5

## Изменяемые ячейки

	А	В	С	Д	Е	Ф
2		Потребители	Пункт №1	Пункт №2	Пункт №3	Пункт №4
3	Поставщики					
4	Склад № 1	4	1	1	1	1
5	Склад № 2	4	1	1	1	1
6	Склад № 3	4	1	1	1	1
7	Склад № 4	4	1	1	1	1
8	Склад № 5	4	1	1	1	1
9		Факт	5	5	5	5

В ячейках с адресами С4;F8 заносятся значения 1. Эти ячейки выполняют роль переменных и значения в них будут изменяться в процессе решения. В ячейках В4;В8 вычисляется количество продукции, вывезенной с соответствующего склада, а в ячейках С9;F9 суммируется фактическое количество продукции, доставленной на каждый из пунктов с разных складов.

Ниже, на том же листе Excel, вводят требуемые объемы поставок и расстояния между складами и пунктами доставки (табл. 6).

Таблица 6

## Исходный вид расчетных данных

	А	В	С	Д	Е	Ф
10		Запросы	200	150	220	330
11	Склад № 1	200	6	4	5	11
12	Склад № 2	190	12	6	4	9
13	Склад № 3	220	15	7	10	4
14	Склад № 4	145	9	5	12	5
15	Склад № 5	280	3	7	12	11
16	Всего	157	45	29	43	40

В строке 16 по столбцам С-Ф определяют грузооборот по каждому пункту доставки. Например, для 1 пункта (ячейка С16) это рассчитывается по формуле

$$C16=C4C11+C5C12+C6C13+C7C14+C8C15. \quad (39)$$

В ячейке С4 находится количество продукции, перевозимой со склада №1 в пункт доставки №1, а в ячейке С11 – расстояние от склада №1 до пункта доставки №1. Соответственно первое слагаемое в формуле означает полный грузооборот по данному маршруту. Вся же формула вычисляет полный грузооборот перевозок продукции в пункт доставки №1.



В ячейке B16 будет вычисляться общий объем грузооборота продукции по формуле

$$B16=СУММ(C16:F16). \quad (40)$$

Для решения транспортной задачи используют процедуру «Поиск решения», которая находится в меню «Сервис», активируемую из подменю «Настройки».

После выбора команды появится диалоговое окно (рис. 2). В качестве критерия оптимизации выбирают минимизация грузооборота, соответственно в поле «Установить целевую ячейку» вводят ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета общего объема грузооборота \$B\$16.

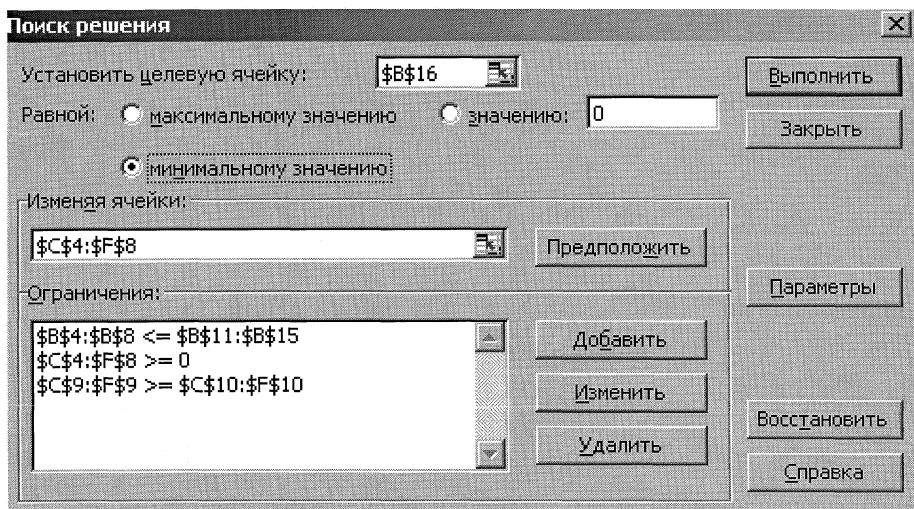


Рис. 2. Диалоговое окно «Поиск решения»

Чтобы минимизировать значение конечной ячейки за счет изменяемых ячеек (\$C\$4:\$F\$8), переключатель устанавливают в положение «минимальному значению». Для достижения минимального грузооборота перевозок программа будет изменять значения в ячейках с C4 по F8, то есть будут изменяться количество груза, перевезенного по конкретному маршруту.

Для корректного поиска решения учитывают ряд условий – ограничений.

Первое условие \$B\$4:\$B\$8 <= \$B\$11:\$B\$12. Оно означает, что значение в ячейке B4 должно быть меньше или равно значению в B11, в B5 меньше или равно, чем в B12, и так далее до B8 и B15.

В ячейках с B4 по B8 находятся объемы поставок с конкретных складов. В ячейках с B11 по B15 – запасы на этих же складах. Так как невозможно вывезти со склада больше, чем на нем есть, первое значение должно быть не больше второго.

Второе условие  $Q_4 - Q_8 \geq 0$ . Оно означает, что объем перевозок не может быть отрицательным, то есть, если на складе не хватает продукции, ее не везут с пункта доставки, на который она была завезена ранее. Грузопоток имеет только одно направление – от складов к пунктам доставки.

Третье условие  $Q_9 - Q_{10} \geq Q_{11} - Q_{12}$ . Оно означает, что запросы пунктов доставки должны быть выполнены полностью. Перевыполнение объема поставок допустимо, а невыполнение – нет.

Введенные условия позволяют найти наиболее оптимальный вариант решения задачи после нажатия кнопки «Выполнить» для подбора решения.

Окончательный вариант решения, показан в таблице 7.

Таблица 7

Оптимизированный вариант перевозок

	A	B	C	D	E	F
2		Потребители	Пункт № 1	Пункт № 2	Пункт № 3	Пункт № 4
3	Поставщики					
4	Склад № 1	180	0	150	30	0
5	Склад № 2	190	0	0	190	0
6	Склад № 3	220	0	0	0	220
7	Склад № 4	110	0	0	0	110
8	Склад № 5	200	200	0	0	0
9		Факт	200	150	220	330
10		Запросы	200	150	220	330
11	Склад № 1	200	6	4	5	11
12	Склад № 2	190	12	6	4	9
13	Склад № 3	220	15	7	10	4
14	Склад № 4	145	9	5	12	5
15	Склад № 5	280	3	7	12	11
16	Всего	3540	600	600	910	1430
17						
18		Грузооборот	<b>3540</b>	т.-км		

## 7. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Сетевое планирование и управление (СПУ) – форма научного анализа и контроля в управлении, получившая широкое распространение в экономических исследованиях [3, 6].

СПУ представляет собой систему планирования и управления, которая является комплексом современных расчетных методов планирования, организационных мероприятий и средств контроля за выполнением плана. Она позволяет повысить по сравнению с традиционными методами эффективность управления за счет рациональной организации транспортных (производственных) процессов, а также выявления и мобилизации скрытых ресурсов времени и материальных средств.

СПУ используется на автомобильном транспорте при планировании сложных и трудоемких работ с большим числом исполнителей, например, при планировании и анализе работы автотранспортных и авторемонтных предприятий, в области перспективного и оперативного планирования автомобильных перевозок, для анализа транспортных сетей. Использование систем СПУ целесообразно также при составлении монтажно-транспортных графиков, устанавливающих взаимосвязь строительства и автомобильного транспорта в соответствии с принятым комплексным планом выполнения работ.

Работы по сетевому планированию ведутся в два этапа:

- 1) расчет и построение сетевого плана;
- 2) его анализ для выявления резервов времени и материальных ресурсов (выполняется последовательно с целью улучшения плана и доведения его до оптимального).

Задачи, решаемые в системе СПУ, можно условно разделить на два класса:

- 1) задачи минимизации времени выполнения комплекса работ при ограниченных или неограниченных ресурсах;
- 2) задачи определения минимальной стоимости или минимума ресурсов для осуществления данного комплекса работ.

Сетевое планирование как метод математического моделирования основан на использовании сетевых моделей, которые могут быть моделями различных процессов: производственных, научно-исследовательских, транспортных и т. д.

Сетевая модель представляет собой математический аппарат для изучения и управления сложными комплексами взаимосвязанных работ, направленных на достижение относительно небольшого числа четко определенных целей. Сетевая модель может быть изображена либо графически, либо в виде таблиц.

Графическое изображение модели – сетевой график, дает возможность, сохранив существующую на практике взаимосвязь составных частей исследуемого процесса, отобразить его во времени с необходимой степенью детализации. Однако сетевой график служит лишь инструментом управления и сетевые методы планирования не ограничиваются его использованием.

В состав системы СПУ входят:

1) технология применения специальной сетевой модели для описания управляемого процесса;

2) способы использования сетевых графиков как наглядное отображение данной модели;

3) методы расчета сетевой модели и комплекс специальных процедур, позволяющих рационально организовывать, планировать, оценивать и контролировать выполнение комплекса работ или данного производственного процесса.

Например, в строительстве сетевая модель, построенная по критерию "время", представляет собой технологию производства строительно-монтажных работ.

Процесс построения сетевой модели комплекса операций можно представить в виде следующих этапов:

1) изучение исходных данных и расчленение комплекса операций на отдельные работы;

2) построение исходного сетевого графика;

3) определение показателей работы исходного сетевого графика и их оценка;

4) расчет сетевой модели;

5) приведение параметров сетевой модели в соответствие с заданными ограничениями (оптимизация моделируемого процесса);

6) расчет показателей плана;

7) утверждение полученных показателей вышестоящими организациями и доведение их до ответственных исполнителей работ.

Таким образом, при построении сетевой модели составляется сетевой график транспортного (или производственного) процесса (комплекса работ), при котором выполняется конечное число операций и достигается поставленная цель, например, определяется минимально возможная продолжительность выполнения данного комплекса работ, то есть нахождение наиболее раннего из всех возможных сроков его завершения.

Сетевые модели составляются не только с целью минимизации времени выполнения комплекса работ, но и по другим критериям, например, для минимизации расходования ресурсов или конечной стоимости работ.

Существуют одноцелевые и многоцелевые сетевые графики. Многоцелевые графики основаны на тех же методах построения и расчета, что и одноцелевые, с той лишь разницей, что наиболее ранние сроки завершения событий должны вычисляться для каждой из поставленных целей. Наиболее поздний из этих сроков определяет время решения задачи, то есть время достижения конечной цели.

Сетевой график позволяет графическим способом (в виде сети) установить технологические взаимосвязи всех звеньев и определить возможную последовательность выполнения работ, которая приведет к получению оптимального конечного результата.

Для построения и расчетов сетевого графика необходимо:

1) установить желаемый срок завершения работ;

2) составить перечень действий и операций в соответствии с принятой технологией работ;

3) принять необходимую последовательность выполнения операций, то есть точно определить, какие операции должны быть закончены, чтобы могла начаться любая другая операция (при этом для задания такой последовательности необходимо определить лишь те операции, которые непосредственно предшествуют каждой рассматриваемой операции).

Сетевой график может быть выполнен с различной степенью детализации процесса. Это зависит от характера и назначения системы. Для разных уровней управления степень детализации или укрупнения сетевых графиков может быть различной.

На практике при исследовании крупных производственных процессов или выполнении больших комплексов работ составляются локальные сетевые графики на участки, или операции; затем происходит интеграция этих локальных графиков и составление общего сетевого графика для процесса в целом [1].

Выделяют два основных элемента сетевых графиков: событие и работа.

В любом комплексе работ или производственном процессе могут быть выделены важнейшие моменты, определяющие этапы выполнения комплекса или процесса. Например, моменты начала или окончания каких-либо транспортно-технологических операций, организационно-технических мероприятий, составления документации, поставок материалов; моменты начала или окончания элементов перевозочного процесса, погрузки-разгрузки и т. д.

Такие моменты в сетевом планировании называются событиями. Таким образом, событие рассматривают как начало или окончание какого-либо действия (операции).

Само действие (операция), которое необходимо выполнить для достижения поставленных целей, называется работой. В сетевом планировании работа понимается не как определенный результат, а как процесс, предшествующий свершению какого-либо события.

Начальное событие соответствует началу работ (нулевой момент времени), а конечное – их завершению (достижению поставленной цели). Остальные события называются промежуточными.

При сетевом планировании принимается условное допущение, что для совершения события не требуется затрат никаких ресурсов (временных, материальных и пр.),

В отличие от события работа, как процесс, не может произойти без затрат каких-либо ресурсов: времени, материалов, энергии, рабочей силы и т. д.

При построении и расчетах сетевых графиков по критерию "время" каждая работа, входящая в состав графика, характеризуется своей продолжительностью. Продолжительность работ измеряется в единицах времени, устанавливаемых для данного графика (часы, дни, месяцы и т. п.).

Оценка продолжительности работ, входящих в сетевой график, должна выполняться либо ответственными исполнителями работ, либо экспертами, имеющими большой практический опыт. Она проводится на основе сведений о

наличии ресурсов и ритмичности их использования. Кроме этого, в сетевом планировании могут применяться оценки по необходимому количеству исполнителей, трудоемкости, стоимости и другим параметрам.

Построение сетевого графика начинается с выделения событий или с составления полного перечня работ, которые необходимо выполнить, и определения их продолжительности.

Непрерывная последовательность взаимосвязанных работ и событий от начального до конечного события, которая имеет наибольшую продолжительность во времени, называется критическим путем.

Критический путь важнейшее понятие в сетевом планировании для оптимизации сетевых графиков. Продолжительность критического пути определяет длительность всего комплекса работ, так как изменение продолжительности любой операции, принадлежащей этому пути, приводит к такому же изменению продолжительности процесса.

Работы и события, через которые проходит критический путь, называются критическими. Как показывает практика, количество критических событий и работ не превышает обычно 10–15 % элементов сетевого графика. Однако именно эти работы определяют продолжительность выполнения всего комплекса работ в целом.

Другие работы, находящиеся на менее продолжительных по времени путях, не влияют на своевременное достижение цели и имеют некоторый резерв времени по сравнению с критическими работами. Это позволяет перераспределить ресурсы чтобы сократить критический путь и уменьшить общую продолжительность работ.

### 7.1. Принципы построения сетевых графиков

Одноцелевой сетевой график (рис. 3), упрощенно представляет собой процесс составления сменно-суточного плана перевозок грузов автомобильным транспортом [1, 12].

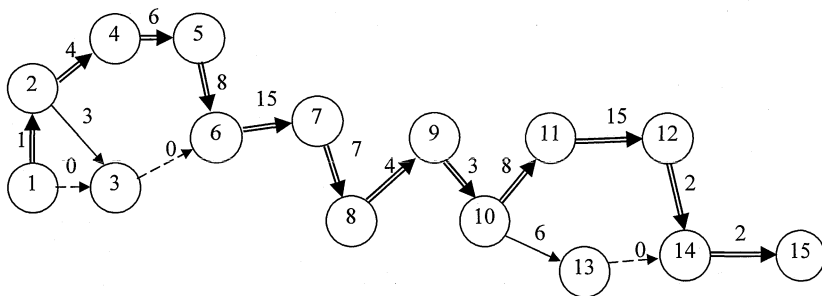


Рис. 3. Одноцелевой сетевой график

Составление плана перевозок грузов расчленено на пятнадцать событий, каждому из которых, кроме начального, предшествуют одна или несколько работ. Задана также продолжительность каждой работы.

На сетевом графике событие обозначают кружком, внутри которого указан номер события. Выделены начальное, конечное и промежуточное события. Каждое последующее и предшествующее события соединяют стрелкой, направленной от предшествующего события к последующему. Эта стрелка показывает на сетевом графике работу. Любые два события могут быть соединены не более чем одной стрелкой.

Событие является результатом одной или нескольких работ, которые необходимо выполнить, чтобы можно было начать одну или несколько следующих работ. Событие понимают как окончание всех входящих в него работ, причем момент свершения события является одновременно и моментом окончания последней из них.

Начальное событие не имеет никаких предшествующих работ и на графике характеризуется тем, что в него не входит ни одна стрелка.

Конечное событие не имеет никаких последующих работ, так как оно само является конечным результатом. На графике из него не выходит ни одна стрелка (событие 15).

События сетевого графика нумеруются так, чтобы для каждой работы номер начального события был меньше, чем номер конечного.

Каждая работа кодируется двумя цифрами. Первая цифра означает начало работы и соответствует номеру предшествующего события; вторая означает окончание работы и соответствует номеру последующего события.

Например, работа "Выписка путевых листов", выполняемая между событиями 9 и 10, имеет код (9–10).

На сетевых графиках продолжительность работы указана над стрелкой, соединяющей два события.

Часть работ графика выполняется последовательно, например работы 6–7 в 8–9 и т.д. Это означает, что начало каждой последующей работы, зависит от окончания предшествующей. Другие работы, например 10–11, 10–13, могут начинаться в один и тот же момент времени с наступлением события 10, поскольку этим двум работам предшествует одна и та же работа 9–10. Такие работы не зависят во времени одна от другой и могут выполняться параллельно. Комплекс работ завершится, как только окончится работа 14–15 и совершится событие 15. Составление сменно-суточного плана перевозок грузов на этом считается законченным [7].

Работы, на выполнение которых необходимо затратить только время и никакие другие ресурсы, называются ожиданиями. Они, так же как и остальные, отмечаются на сетевом графике сплошной стрелкой. Ожидания в ходе выполнения работ могут быть связаны с технологическими перерывами.

Однако между какими-либо двумя событиями может быть только логическая взаимосвязь, и в этом случае работа может быть как бы "выполнена" без затрат каких-либо ресурсов, в том числе и времени. Тогда считается, что между этими

событиями установлена зависимость, которая на графике обозначается пунктирной линией (между событиями 1 и 3; 3 и 6; 13 и 14), а такие работы, как 1–3, 3–6, 13–14, называются фиктивными. Продолжительность фиктивных работ равна нулю.

Таким образом, при построении сетевых графиков в кружках указывают номера событий; стрелки представляют собой работы; цифры над стрелками называются временными оценками, они показывают ориентировочную продолжительность работ. Кроме того, на графике должен быть выделен критический путь, как максимальный по продолжительности путь между начальным и конечным событиями. Минимизации критического пути при анализе сетевых графиков уделяется главное внимание.

Необходимо также при разработке и составлении сетевых графиков учитывать следующие важные их особенности:

- 1) ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;
- 2) ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока данное событие не произойдет;
- 3) ни одна последующая работа не может быть начата раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

## **7.2. Расчет параметров сетевой модели**

Расчет сетевой модели сводится к определению следующих данных; ожидаемых сроков выполнения комплекса работ в соответствии с сетевым графиком; состава работ критической зоны (критического и подкритического путей), т. е. определению тех работ, у которых резервы времени минимальны; сроков их начала и окончания; ранних и поздних сроков начала и окончания остальных работ сетевого графика с определением имеющихся резервов времени.

Для определения ожидаемых сроков выполнения комплекса работ ("ожидаемого времени") в сетевом планировании используются три временных оценки:

- 1) оптимистическая – время, необходимое для выполнения процесса при благоприятных условиях;
- 2) пессимистическая – время, необходимое для выполнения процесса при крайне неблагоприятных условиях;
- 3) наиболее вероятная – время, необходимое для выполнения процесса в реально сложившихся в данный момент обстоятельствах.

Временные оценки складываются из статистически ожидаемых продолжительностей работ, входящих в состав данного комплекса [1].

Оценки продолжительности работ – очень важные показатели в системе СПУ, поэтому необходимо, чтобы их давали либо ответственные исполнители, либо опытные эксперты.

Первой следует давать оценку наиболее вероятного времени, затем можно оценить оптимистическое время и последней дается оценка пессимистического



времени. Эти три оценки продолжительности работ определяют различные сроки наступления событий и являются исходными параметрами при анализе и расчете сетевой модели [3].

Вычислить продолжительность критического пути можно исходя из того, что длина пути на сетевом графике представляет собой сумму продолжительности пути и находящихся на данном пути работ, а критический путь по определению является максимальным из возможных путей графика между начальным и конечным событиями.

Видно, что критическим является путь 1 продолжительностью 37 ч. Этот путь выделен (см. рис. 3) более яркой сплошной стрелкой. Остальные пути графика меньше критического по продолжительности, следовательно, они имеют резерв времени. Пути 2 и 3 имеют продолжительность, близкую по значению к критической, т. е. они находятся в критической зоне. Такие пути называются подкритическими. Резервы времени у них минимальны.

### **7.3. Оптимизация сетевых моделей**

После того как построен исходный сетевой график и рассчитаны основные параметры сетевой модели, необходимо дать оценку полученным результатам, т. е. сравнить значение продолжительности критического пути с тем желательным сроком завершения работ, который был установлен руководством разрабатываемого комплекса. Если установленный срок оказался меньше расчетного срока выполнения комплекса работ (процесса), т.е. меньше полученной продолжительности критического пути, то необходимо перейти к следующему этапу сетевого планирования – анализу сетевого графика на основе полученных расчетов и его оптимизации по времени [3].

Оптимизация сетевого графика по времени заключается в сокращении критического пути по времени и проводится в следующем порядке:

- 1) проверяется правильность временных оценок работ критической зоны сетевого графика, т. е. таких работ, которые или уже находятся на критическом пути, или имеют минимальные резервы времени; необходимо стремиться к тому, чтобы продолжительность работ критической зоны была минимальной в допустимых пределах;
- 2) изучается возможность замены последовательного выполнения работ параллельными там, где это допускается технологией, с целью сокращения общей продолжительности работ;
- 3) проводится перераспределение ресурсов между работами сетевого графика, т. е. резервы времени, которыми располагают работы вне критической зоны, передаются работам критическим или близким к ним;
- 4) анализируется возможность максимального сокращения критических работ; сокращаются сроки выполнения комплекса работ за счет привлечения дополнительных ресурсов, а также изменения технологических условий производства комплекса работ.

После выполнения этих мероприятий вновь необходимо провести расчет сетевой модели с целью определения длины критического пути и соответствующих значений временных параметров.

Построение и расчеты различных вариантов одного и того же сетевого графика необходимы еще и потому, что работы, критические для одного варианта процесса, могут стать некритическими для другого варианта, и, наоборот, некритические работы могут стать критическими в зависимости от способа составления графика. При получении нового варианта сетевого графика определяется новое значение критического пути, которое должно уже в большей степени соответствовать установленному сроку выполнения работ. Затем изыскиваются новые возможности сокращения сроков, и так до тех пор, пока все варианты улучшения сетевого графика не будут опробованы.

Для решения подобных задач эффективно используются экономико-математические методы, позволяющие проводить расчеты как вручную, так и с использованием ЭВМ.

При построении соответствующих математических моделей переменными являются сроки начала и окончания операций (работ). Необходимо оптимизировать целевую экстремальную функцию по заданному критерию. Оптимизация сетевого графика проводится на основе изменения критического пути.

Сетевой график (см. рис. 3) представляет собой сеть, аналогичную транспортной сети, в которой заданы события (вершины), работы (звенья), определены некоторые неотрицательные величины, характеризующие продолжительность выполнения работы. Решением задачи является нахождение оптимального значения критического пути, т. е. определение на сети расстояния между двумя вершинами (начальным и конечным событиями), или пути, проходя по которому суммарная продолжительность работ сетевого графика достигает максимума.

Заменив расстояние между двумя вершинами на продолжительность выполнения работ в сетевом графике, можно получить задачу, аналогичную рассмотренной ранее, с той лишь разницей, что в данном случае целевая функция определение продолжительности критического пути максимизируется, а не минимизируется.

Те же экономико-математические методы, которые используются для определения кратчайших расстояний, могут быть использованы и для оптимизации сетевых моделей. Эту аналогию можно проследить на простом примере [2].

Чтобы определить наиболее ранний срок наступления какого-либо события необходимо просчитать суммарные затраты времени по всем путям, ведущим – данному событию, и выбрать из них максимальный. Затем, установив срок наступления для какого-либо определенного события, можно строить дальнейшие пути и находить их продолжительности, используя данное событие в качестве начального. Наиболее поздние сроки наступления событий рассчитывают

аналогично, но в обратном порядке, поэтому из нескольких возможных значений времени выбирают минимальное.

В сетевом планировании используются три экономико-математических метода исследования операций.

1) Сетевые модели, построенные на основе сетевых графиков, представляют собой объект математической теории графов – направленные графы. Сетевые графики позволили найти новые области применения этого математического метода исследований. С точки зрения теории графов, сетевые графики рассматриваются как детерминированные, т. е. имеющие фиксированное значение продолжительности каждой работы. Однако на практике продолжительность работ сетевого графика получает различные оценки: наиболее вероятную, оптимистическую и пессимистическую..

2) Определение и анализ временных оценок продолжительности работ позволяют представить сетевой график в виде вероятностной модели и использовать для расчетов параметров сетевого графика теорию вероятностей и математической статистики. В случае вероятностного анализа параметров (временных характеристик значений критического пути) получается очень большое количество реализаций данного сетевого графика. Расчеты в таком случае проводятся с использованием современных ЭВМ.

3) При оптимизации сетевых моделей используются принципы теории оптимальных задач линейного и нелинейного программирования.

Сетевые модели при проведении оптимизации обычно сводятся путем преобразований к частным случаям моделей линейного программирования и решаются с применением экономико-математических методов и ЭВМ методами линейного программирования. Оптимизация сетевых планов методами линейного программирования может проводиться по критериям "время", "стоимость" или "ресурсы". Алгоритм решения задачи представляет собой алгоритм определения наибольшего значения продолжительности критического пути.

Однако в общей постановке задачи нахождения оптимальных планов на основе сетевых моделей не могут быть решены методами линейного программирования, поскольку их решение связано с определением экстремальных значений целевой функции многих переменных, на которые наложена совокупность ограничений, при условии, что сама функция и некоторые ограничения нелинейные. В таком случае в сетевом планировании для решения данных задач используются методы нелинейного целочисленного программирования, в частности динамическое программирование (общий метод). Расчеты таких моделей достаточно сложны и трудоемки, поэтому на практике применяются упрощенные постановки подобных задач, а в результате решения достигается частичная, а не полная оптимизация.

#### **7.4. Преимущества и недостатки сетевого метода планирования**

Важным преимуществом сетевого планирования по сравнению с другими методами является то, что составление и использованием сетевых моделей

позволяют осуществлять на практике принцип выборочного управления, т. е. сосредоточить внимание только на тех моментах работы, которые являются решающими с точки зрения сроков. Такими моментами, очевидно, будут критические и подкритические работы, находящиеся в критической зоне, т. е. имеющие нулевые или минимальные резервы времени. Принцип выборочного управления в таком случае осуществляется, как правило, посредством перевода ресурсов с не критических работ на критические с целью оптимизации критического пути и сокращения сроков выполнения комплекса работ. Это делается либо на этапе планирования, либо уже при контроле за выполнением процесса при отставании выполнения работ от намеченного графика.

Кроме использования принципа выборочного управления, сетевые модели имеют и другие преимущества: анализ сетевых моделей позволяет составить план мероприятий по выполнению какого-либо комплекса или процесса, причем в план включаются работы, имеющие решающее значение для данного процесса

Использование систем СПУ с применением средств современной вычислительной техники повышает эффективность процессов планирования, организации и управления.

## 8. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Экономико-математические методы, в основе лежит так называемый «системный подход», в настоящее время широко используются в теоретических исследованиях и решении практических задач. Эти методы в значительной мере опираются на математическое моделирование производственно-экономических ситуаций, на количественные методы оценки альтернатив и отбора на основе этих оценок лучших решений [1, 3].

Использование математических моделей в управлении основывается на использовании таких специальных дисциплин, как «Исследование операций» и «Системный анализ».

Использование классического аппарата математики вызывает определенные трудности для решения многих задач оптимизации, включающих большое число переменных и ограничений в виде неравенств. Одним из путей решения является разбиение задачи большой размерности на подзадачи меньшей размерности, включающие всего по нескольким переменных, и последующее решение общей задачи по частям. Именно на этом основан метод динамического программирования.

В качестве типичных примеров применения моделей динамического программирования можно привести:

- 1) разработку правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа;
- 2) разработку принципов календарного планирования перевозок и в условиях колеблющегося спроса на продукцию;
- 3) определение необходимого объема запасных частей, гарантирующего эффективное использование дорогостоящего оборудования;
- 4) распределение дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования;
- 5) выбор методов проведения рекламной кампании, знакомящей покупателя с продукцией фирмы;
- 6) систематизацию методов поиска ценного вида ресурса;
- 7) составление календарных планов текущего и капитального ремонта автопарка;
- 8) разработку долгосрочных правил замены выбывающей из эксплуатации техники (основных фондов).

Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор вычислительных процедур связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Происхождение названия динамическое программирование, вероятно, связано с использованием этих методов в задачах принятия решений через фиксированные промежутки времени (например, в задачах управления запасами).

Однако методы динамического программирования успешно применяются и для решения задач, в которых фактор времени не учитывается [2].

Одним из основных принципов, лежащих в основе решения «динамических» задач, является принцип оптимальности. Именно с этой целью, а также чтобы облегчить решение комплексной проблемы, применяют декомпозицию задачи [4].

Динамическое программирование позволяет осуществлять оптимальное планирование управляемых процессов. Под «управляемыми» понимают процессы, на ход которых можно в той или иной степени влиять.

Ставя задачу выполнения серии мероприятий (операции) с наибольшей эффективностью необходимо выбрать и рассмотреть некоторый численный критерий  $W$ , с помощью которого определяют успешность, эффективность операции. Критерий эффективности в каждом конкретном случае выбирается исходя из целевой направленности операции и задачи исследования (какой элемент управления оптимизируется и для чего).

Метод динамического программирования опирается на условие отсутствия последействия и условие аддитивности целевой функции.

Условие отсутствия последействия. Состояние  $\bar{x}_k$ , в которое перешла система за один  $k$ -й шаг, зависит от состояния  $\bar{x}_{k-1}$  и выбранного управляющего воздействия  $u_k$  и не зависит от того, каким образом система пришла в состояние  $\bar{x}_{k-1}$ , то есть

$$\bar{x}_k = f_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k), \quad (41)$$

Аналогично, величина выигрыша зависит от состояния  $\bar{x}_{k-1}$ , и выбранного управляющего воздействия  $u_k$ , то есть

$$W_k = W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k), \quad (42)$$

Условие аддитивности целевой функции. Общий выигрыш за  $N$  шагов вычисляется по формуле

$$S = \sum_{k=1}^N W_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k), \quad (43)$$

Оптимальной стратегией управления называется совокупность управляющих воздействий, в результате реализации которых система за  $N$  шагов переходит из начального состояния в конечное и при этом общий выигрыш  $S$  принимает наибольшее значение.

Условие отсутствия последействия позволяет сформулировать принцип оптимальности.

Вентцель так формулирует принцип оптимальности: «Каково бы ни было состояние системы  $S$  в результате некоторого числа шагов, на текущем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный». Управление на каждом шаге не оказывает влияния на предшествующие шаги [6].

Динамическое программирование – это поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг. Управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

Планируя многошаговый процесс, необходимо выбирать управляющее воздействие на каждом шаге с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах.

Последний шаг планируют так, чтобы он принес наибольшую выгоду, так как после него последующих, зависимых от него шагов не предполагается. Спланировав оптимально этот последний шаг можно к нему пристраивать предпоследний, к предпоследнему – предпредпоследний и т.д.

Поэтому процесс динамического программирования на 1-м этапе разворачивается от конца к началу, то есть раньше всех планируется последний,  $N$ -й шаг. Чтобы спланировать  $N$ -й шаг необходимо предположить, чем кончился предпоследний ( $N-1$ )-й шаг и найти (предположить) для ( $N-1$ )-ого шага управление, при котором выигрыш (доход) на последнем шаге был бы максимален.

Таким образом, на каждом шаге последовательно ищется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение процесса относительно достигнутого к данному моменту состояния. Само управление, обеспечивающее оптимальное продолжение процесса относительно заданного состояния, называется УОУ на данном шаге.

После определения УОУ на каждом шаге переходят к поиску уже не "условного", а действительно оптимального управления на каждом шаге.

Известно начальное состояние процесса. После применения УОУ на первом шаге система перейдет в другое состояние; но для этого состояния заранее определено УОУ и т.д. Таким образом определяют оптимальное управление процессом, приводящее к максимально возможному выигрышу.

Итак, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс "проходится" дважды: первый раз – от конца к началу, в результате чего находят УОУ на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах; второй раз – от начала к концу, в результате чего находят оптимальные управления на всех шагах процесса.

Процедура построения оптимального управления методом динамического программирования распадается на две стадии: предварительную и окончательную. На предварительной стадии для каждого шага определяют УОУ, зависящее от состояния системы (достигнутого в результате предыдущих шагов), и условно оптимальный выигрыш на всех шагах, также зависящий от состояния.

На окончательной стадии определяют (безусловное) оптимальное управление для каждого шага. Предварительная (условная) оптимизация производится в обратном порядке: от последнего шага к первому; окончательная (безусловная) оптимизация – также по шагам, но в от первого шага к последнему.

При постановке задач динамического программирования выполняют следующие действия.

1. Выбирают параметры (фазовые координаты), характеризующие состояние  $S$  управляемой системы перед каждым шагом.

2. Расчленяют операцию на этапы (шаги).

3. Определяют набор шаговых управлений  $x_i$  для каждого шага и налагаемые на них ограничения.

4. Определяют выигрыш, который приносит на  $i$ -м шаге управление  $x_i$ , если перед этим система была в состоянии  $S$ , т.е. записывают «функцию выигрыша»:

$$W_i = f_i(S, x_i), \quad (44)$$

5. Определяют, изменение состояния  $S$  системы под влиянием управления  $x_i$  на  $i$ -ом шаге (когда система переходит в новое состояние).

$$S = \varphi_i(S, x_i), \quad (45)$$

6. Записывают основное уравнение динамического программирования, выражающее условный оптимальный выигрыш  $W_i(S)$  (начиная с  $i$ -го шага и до конца) через уже известную функцию  $W_{i+1}(S)$

$$W_i(S) = \max_{x_i} \{ f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i)) \}, \quad (46)$$

Этому выигрышу соответствует условное оптимальное управление на  $i$ -м шаге  $x_i(S)$  (причем в уже известную функцию  $W_{i+1}(S)$  надо вместо  $S$  подставить измененное состояние

$$S' = \varphi_i(S, x_i), \quad (47)$$

7. Выполняют условную оптимизацию последнего ( $m$ -го) шага, вычисляя для каждого из состояний системы условный оптимальный выигрыш

$$W_m(S) = \max_{x_{mi}} \{ f_m(S, x_m) \}, \quad (48)$$

8. Производят условную оптимизацию  $(m-1)$ -го,  $(m-2)$ -го и т.д. шагов по формуле (46), полагая в ней  $i=(m-1), (m-2), \dots$ , и для каждого из шагов выбирают условное оптимальное управление  $x_i(S)$ , при котором достигается максимум критерия  $W$ .



9. Выполняют безусловную оптимизацию управления, выбирая соответствующие воздействия на каждом шаге. Найденное оптимальное управление на первом шаге  $x_1 = x_1^*(S_0)$ ; изменить состояние системы по формуле (44); для вновь найденного состояния найти оптимальное управление на втором шаге  $x_2$  и т.д. до конца.

## 9. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Задача прогнозирования – предсказать пространственные (где), ассортиментные (сколько и чего) и временные (когда) параметры спроса для оптимального планирования. Перед тем, как приступить непосредственно к прогнозированию, необходимо рассмотреть характер спроса и разобраться в главных элементах прогноза [12, 13].

Один из основных вопросов – характер спроса.

Будущий спрос бывает зависимым или независимым. Пример зависимого спроса – вертикальная, то есть технологическая, потребность производственного процесса, например в шинах, которые требуются для обеспечения бесперебойной работы автопарка. Потребность в шинах зависит от календарного плана эксплуатации автомобилей. Вертикальная зависимость может охватывать несколько уровней логистической цепочки: поставщиков сырья, производителей узлов, производство на сборочных линиях и сбытовые организации.

Горизонтально зависимый спрос возникает в тех случаях, когда товар продается с приложением. Примером может служить прогноз потребностей в промывочной жидкости, когда в период рекламной кампании с целью стимулирования сбыта моторного масла каждому покупателю бесплатно выдают флакон с промывочной добавкой. Прогноз потребности во флаконах с промывочной жидкостью будет зависеть от прогноза сбыта канистр с моторным маслом. В условиях горизонтально зависимого спроса потребность в товаре диктуется не требованиями производства, а замыслом маркетологов [13].

Важно отметить, что спрос на основной продукт первоначально приходится определять на основании прогнозных данных, текущего состояния запасов и плановых потребностей. Но когда план производства или закупок определен, потребности в комплектующих или в сопутствующих товарах (в шинах или в промывочной жидкости) можно точно вычислить, не прибегая к методам прогнозирования. Так, прогноз потребности в шинах и моторном масле напрямую выводится из прогноза выполнения транспортной работы (планируемого километража). Если потребность в основном продукте (перевозки) изменится, тогда неизбежно изменится и потребность в комплектующих. Но при этом пропорции потребностей не изменятся и нет необходимости отдельно прогнозировать зависимый спрос, так как его уровень предопределяется основным продуктом: в конце концов – у автомобиля должно быть именно четыре колеса.

Спрос на какой-то продукт является независимым, когда он никак не связан со спросом на другой продукт. Например, скорее всего отсутствует зависимость между спросом на автомобили и спросом на обувь. В этом случае прогнозирование спроса на обувь мало поможет уточнению будущей потребности в автомобилях. Независимый спрос, характерный для большинства конечных товаров или услуг, приходится прогнозировать отдельно для каждого продукта

## 9.1. Элементы прогноза

Обычно, количественные прогнозы составляют на месяц или на неделю. Это более удобно для планирования и координации отдельных операций [14].

Хотя такой количественный прогноз сводится к единственному числовому значению, фактическая оценка складывается из шести элементов: базового спроса, сезонного фактора, тенденции изменений во времени, циклического фактора, эффекта стимулирования продаж и случайных колебаний.

Базовый спрос равен «среднему» объему продаж, остальные элементы представляют собой поправочные коэффициенты. Расчетная формула прогноза такова

$$F_t = (B_t S_t T C_t P_t) + L, \quad (49)$$

где  $F$  – прогноз величины спроса на период  $t$ ;

$B_t$  – величина базового спроса в период  $t$ ;

$S_t$  – коэффициент сезонных колебаний в период  $t$ ,

$T$  – коэффициент временной тенденции (прирост или сокращение спроса за период);

$C_t$  – коэффициент циклических колебаний в период  $t$ ;

$P_t$  – коэффициент поправок на стимулирование продаж в период  $t$ ,

$L$  – коэффициент случайных колебаний в период  $t$ .

Не каждый прогноз включает в себя поправки на все эти факторы, но умение их учитывать, следить за их динамикой позволяет при необходимости увеличить точность прогноза.

*Базовый спрос* – это величина спроса без учета всех других элементов формулы прогнозирования. Обычно для оценки базового спроса берут среднюю величину спроса за период.

Он дает хорошие прогнозные оценки для таких товаров, продажи которых не подвержены сезонным и циклическим колебаниям, устойчивым долгосрочным изменениям, а также воздействию стимулирующих кампаний и случайных факторов.

*Сезонный фактор* проявляется в периодическом увеличении и уменьшении спроса в течение года. Примером служит всплеск спроса на моторные масла с низкой зимней вязкостью в холодное время года при относительно низком спросе в остальные месяцы. Можно сказать, что спрос на эти масла стабилен с начала весны до середины осени, но испытывает сезонный подъем в зимний период. Важно, что это сезонное изменение спроса относится к розничной торговле. На уровне оптовой торговли сезонные колебания происходят с опережением примерно на квартал. Среднее значение сезонного коэффициента для всех периодов (месяцев) составляет 1,0, но в отдельные месяцы он может колебаться от 0 до 12. Если в конкретном месяце сезонный коэффициент равен 1,2 значит, ожидается, что объем продаж в этом месяце на 20% превысит среднее значение за год [12].

Временная тенденция определяется долгосрочной динамикой объема продаж. Динамика может быть положительной, отрицательной или нейтральной. Положительная тенденция указывает на то, что объем продаж с течением времени растет, и наоборот. Например, потребность в перевозках строительных грузов в 2009 году демонстрировала тенденцию к снижению, а потребность в перевозках пассажиров в пригородной зоне в летний период традиционно выше, чем зимой. Направленность динамики объема продаж может неоднократно меняться на протяжении жизненного цикла продукта. Например, в результате изменения потребительских предпочтений, вкусов и налоговой политики положительная тенденция в потреблении подержанных автомобилей европейского производства в начале 2000-х годов сменилась на нейтральную. Тенденции спроса зависят от численности и состава населения, а также от моделей потребления. При составлении прогнозов важно знать, какие из этих факторов влияют на изменение объема продаж. К примеру, кризис в экономике и сокращение доходов населения означает грядущее сокращение спроса на легковые автомобили. Но если в потреблении происходит вытеснение отечественных автомобилей импортными, спрос на последние может возрасти несмотря на сокращение рынка в целом.

Долгосрочные тенденции воздействуют на величину базового спроса на протяжении нескольких последовательных периодов времени. Эта взаимосвязь выражается следующим образом:

$$V_{t+1} = V_t T, \quad (50)$$

где  $V_{t+1}$  – базовый спрос в период  $(t+1)$ ;

$V_t$  – базовый спрос в период  $t$ ;

$T$  – коэффициент временной тенденции за период.

Если коэффициент долгосрочной тенденции больше 1,0, значит, объем продаж постоянно растет от периода к периоду, а если меньше 1,0 — сокращается.

*Циклический фактор* проявляется себя в изменении величины спроса с периодичностью, превышающей один год. Циклические колебания могут иметь разную направленность – как в сторону повышения, так и в сторону понижения. Примером является деловой цикл, в котором время от низшей точки спада до высшей точки подъема занимает обычно от трех до пяти лет. Спрос на перевозки, равно как и сопутствующий ему спрос на автомобильные запчасти, связан с деловым циклом [12].

*Эффект стимулирования продаж* отражает изменения спроса в ответ на маркетинговые мероприятия (рекламные презентации, распродажи со скидкой, бесплатное предложение пробных продуктов и т.д.). Такие изменения часто характеризуются возрастанием спроса непосредственно во время рекламной кампании и падением спроса после ее завершения, когда потребители уже разобрали запасы, выделенные на стимулирование продаж. Скидки и подарки, предназначенные для этой цели, иногда предоставляются напрямую потребителям, а иногда – только торговым предприятиям (оптовым и розничным).

Стимулирующие мероприятия могут носить регулярный характер; тогда они проводятся ежегодно в одно и то же время. Для прогнозирования регулярное стимулирование продаж играет роль сезонного фактора. Если мероприятия проводятся нерегулярно, их следует выявлять и учитывать отдельно.

Эффект стимулирования серьезно сказывается на объемах продаж. В некоторых отраслях на долю рекламных распродаж приходится от 60 до 80% годового объема сбыта. Из этого не следует, конечно, что без стимулирования объем продаж составил бы только 20% от его фактической величины. Стимулирование продаж делает спрос менее равномерным, чем он мог бы быть. Эффект стимулирования отличается от других элементов прогноза тем, что сроки и масштабы его проявления в значительной мере зависят от решения фирмы.

*Случайный фактор* – это те случайные или неожиданные изменения спроса, которые не могут быть объяснены другими факторами. Числовое значение этого коэффициента в силу его случайной природы невозможно предсказать.

Важно осознавать потенциальное влияние разных факторов и надлежащим образом их учитывать. Например, если сезонный фактор принять за долгосрочную тенденцию, точность прогноза со временем пострадает.

## 9.2. Подходы к прогнозированию

Есть два основных подхода к составлению прогнозов: «сверху вниз» и «снизу вверх» [13].

*Прогнозирование «сверху вниз».* Исходной базой для применения метода «сверху вниз», или декомпозиционного метода, служит прогноз общего спроса на отдельные продукты, который затем распределяется по географическим районам на основании данных о продажах за прошлые периоды. Представим себе, к примеру, что за месяц ожидается продажа 10 тыс. единиц продукта.

Если для удовлетворения спроса фирма использует четыре распределительных центра, на долю которых прежде приходилось соответственно 40, 30, 20 и 10% общего объема продаж. В такой ситуации можно прогнозировать, что через эти центры будет продано 4000, 3000, 2000 и 1000 единиц продукта соответственно.

Централизованный подход «сверху вниз» пригоден тогда, когда спрос стабилен или когда объем спроса изменяется равномерно на всех географических рынках.

*Прогнозирование «снизу вверх».* Методу «снизу вверх» свойственна децентрализованность. Для каждого распределительного центра составляется независимый прогноз, поэтому удастся точнее оценить колебания спроса на местных рынках.

Это требует большой объем подробной информации и затрудняет учет систематических факторов спроса (воздействие масштабных кампаний по стимулированию продаж).

Оптимальным является комбинирование обоих методов.

### 9.3. Процесс прогнозирования

Планирование требует возможно более точной оценки потребности в отдельных продуктах. Хотя прогнозирование не является точной наукой, практика развития вынуждает предприятия внедрять интегрированный процесс прогнозирования, который строится, на использовании многообразных источников информации, математических и статистических методов, систем поддержки управленческих решений, а также квалифицированных специалистов.

Обычно прогнозирование выполняется не более чем на один год. В зависимости от ситуации может потребоваться прогноз на день, на неделю, месяц, квартал, полугодие или год. На практике чаще всего используют месячные прогнозы [14].

Эффективный процесс прогнозирования складывается из нескольких ключевых компонентов.

Во-первых, в основе составления прогноза лежит база данных, содержащая информацию о текущих заказах, о заказах за прошлые периоды и о приемах привлечения этих заказов (к которым относятся рекламные скидки, особые скидки или другие меры по стимулированию продаж). Необходимы и дополнительные данные о состоянии экономики и условиях конкуренции. Все эти данные должны своевременно пополняться и обновляться. Главные требования к информации, используемой для прогнозирования: гибкость, точность, непрерывность обновления и своевременность.

Во-вторых, эффективный процесс прогнозирования должен порождать интегрированные, внутренне согласованные прогнозы, отвечающие запросам пользователей (финансовых, маркетинговых, сбытовых, производственных и логистических служб). Пользователям нужна точная, полная, подробная и своевременная информация.

Для получения эффективных прогнозов необходимо выбирать верную процедуру прогнозирования, которая, состоит из трех компонентов: техника прогнозирования; системы информационного обеспечения и системы управления.

Техника прогнозирования – это тот математический или статистический аппарат, с помощью которого исходные данные преобразуются в прогнозные оценки. Основными инструментами прогнозирования являются динамическое моделирование, которое сводится к экстраполяции на будущее прошлых показателей и корреляционное моделирование, устанавливающее соотношения между независимыми переменными.

Точный и достоверный прогноз – это продукт интеграции техники прогнозирования, соответствующего информационного обеспечения и адекватного управления всем процессом.

Система информационного обеспечения прогнозирования представляет механизм сбора и анализа данных, составления прогноза и передачи пользователям результатов прогнозирования. Она дает возможность учитывать такие внешние *факторы*, как стимулирование продаж, изменение цен и

обновление ассортимента продукции, характер конкуренции и общие экономические условия.

Организация системы информационного обеспечения должна позволять не только выявлять эти изменения, но и реально использовать их. Например, изменение размера упаковки при крупном объеме перевозок может существенно повлиять на заполнение кузовов автомобилей. Отсутствие своевременной информации «снизу» приведет к значительному искажению прогноза и соответственно потерям. Так при планировании значительного объема перевозок бочек на паллетах следует учитывать, что в кузов ряда отечественных полуприцепов и грузовиков 2 паллеты в ряд по ширине не помещаются, а перепакровка приведет к значительным потерям времени и издержкам.

Если информационная система не предусматривает простых методов корректировки данных, на которых строится месячный прогноз, то никаких поправок в окончательном прогнозе может не оказаться. Способность вносить своевременные поправки, должна позволять, например при прогнозировании работы транспортной системы, реально осуществить корректировку состояния складских запасов во множестве накопительных центров, что зачастую бывает довольно трудно, так как требует регулярного эффективного контроля за многими тысячами единиц хранения. Для этого система информационного обеспечения прогнозирования должна быть в значительной мере автоматизирована, иметь отлаженный механизм выявления изменений.

В управлении процессом прогнозирования можно выделить организационные процедурные, мотивационные и личностные аспекты, которые объединяют функцию прогнозирования с остальными функциональными областями [12].

Организационные аспекты связаны с ролью и ответственностью отдельных служащих и учитывают следующие специфические вопросы:

- кто отвечает за выработку прогноза?
- как оценивают точность и эффективность прогноза?
- как влияет эффективность прогноза на оценку работы и вознаграждение его составителей?

Процедурные аспекты связаны с вопросами личного понимания сотрудниками относительной значимости прогнозирования информационной системы и техники:

- понимают ли составители и аналитики прогнозов, как их действия влияют на планирование и координацию работы?
- насколько прогнозисты осознают возможности системы прогнозирования и насколько эффективно они эти возможности используют?
- способны ли прогнозисты сознательно выбрать наиболее адекватную технику прогнозирования?

Без детального ответа на каждый из этих вопросов обязанности прогнозистов и критерии оценки их работы могут оказаться «размытыми», что приведет к безответственности. Например, если службы маркетинга, продаж, производства и логистики будут заниматься прогнозированием независимо друг от друга, не будет ни единого прогноза, ни ответственности за общий результат. Поскольку

единый прогноз необходим, нужно точно определить обязанности каждой группы прогнозистов и оценивать их работу по особым критериям.

Для эффективного управления процессом прогнозирования следует отчетливо сформулировать процедурные и организационные требования. Без этого даже самая совершенная техника прогнозирования и наилучшая система информационного обеспечения не дадут оптимальных результатов.

Динамическое моделирование показывает, что может произойти при плохой координации прогнозов, вырабатываемых в разных звеньях снабженческо-сбытовой цепочки [13]. Издержки из-за неверного понимания ситуации могут быть очень велики. Поскольку многие логистические действия предпринимаются в ожидании будущих сделок, чрезмерный оптимизм прогнозов может спровоцировать массу бесполезной работы. Анализ сигналов, которыми обмениваются участники логистической цепочки, свидетельствует, что их ожидания по мере продвижения от звена к звену склонны усиливаться. Каждая ошибка в истолковании реальных потребностей порождает нарушение на всем протяжении логистического канала. Джей Форрестер в своей классической работе построил модель взаимосвязей в логистическом канале и показал, как цепная реакция разнонаправленных корректировок, охватив весь канал, может повлечь за собой серию пере- или недооценок реальных требований рынка.

В силу самой природы своих задач канал распределения должен отличаться чувствительностью к рыночным запросам. Нужно со всей тщательностью относиться к организации надежной системы информационного обмена, сохраняя при этом ее гибкость, необходимую для успешной адаптации к переменам.

#### **9.4. Техника прогнозирования**

Для получения периодических прогнозов следует выбрать подходящий математический или статистический аппарат. Техника прогнозирования работает эффективно только тогда, когда ее возможности соответствуют особенностям ситуации [14]. Спирос Макридакис и Стивен Уилрайт предлагают следующие критерии оценки применимости той или иной техники прогнозирования:

- требуемая точность;
- временной горизонт прогноза,
- ценность прогноза;
- доступность данных;
- тип вводных данных;
- квалификация и опыт составителя прогноза.

На основании этих критериев нужно дать количественную и качественную оценку каждого из имеющихся методов прогнозирования.

Усложнение методов не всегда себя оправдывает, простые методы порой дают лучшие результаты.

На практике следует выбирать метод или методы, дающие лучшие результаты [13]. Примером такого подхода, нацеленного на результат, служит концепция фокусировки прогнозирования. Она предполагает использование



многих методов – от самых простых, до самых сложных. При этом подходе на каждый период времени составляют ряд прогнозов. Затем выбирают метод прогнозирования, который оказался бы самым точным применительно к последнему прошедшему периоду.

Существуют три основные категории методов прогнозирования:

- 1) качественные методы,
- 2) методы динамических рядов,
- 3) причинно-следственные методы.

Качественные методы выводят прогнозы на будущее из экспертных оценок и специальной информации. При этом можно учитывать результаты прошлых периодов, а можно ими пренебречь.

Методы динамических рядов при построении прогнозов оперируют исключительно данными прошлых периодов и их динамикой.

Причинно-следственные методы, такие как регрессия, нацелены на выявление взаимосвязей между изменением независимых переменных и прогнозируемыми событиями [12].

*Качественные методы* ориентируются на суждения экспертов, требуют довольно много времени и являются относительно дорогостоящими. Они идеальны в ситуациях, где не нужно много статистики, а главное – это опыт и суждения менеджеров. Примером может служить использование мнения инженеров сервисных центров о перспективах сбыта нового автомобиля или о перспективах торговли в новом районе. Эти методы отнимают слишком много времени и поэтому мало применяются. Качественные методы прогнозирования опираются на результаты опросов, анкетирования и конференций.

*Методы динамических рядов* – это методы статистического анализа данных за прошлые периоды, для которых характерны относительно ясные и стабильные тенденции и взаимосвязи. Динамический анализ используют для выявления:

- систематических колебаний под влиянием сезонных факторов,
- циклических колебаний,
- выраженных тенденций,
- темпов роста в рамках этих тенденций

Методы динамических рядов опираются на предпосылку, что будущее похоже на прошлое, существующая структура спроса сохранится в будущем. В краткосрочной перспективе такое предположение часто оказывается верным. Поэтому для краткосрочных прогнозов именно эта техника является наиболее подходящей. Но точность результатов здесь напрямую зависит от стабильности модели спроса.

Когда темпы роста или устойчивая тенденция резко меняются, в модели спроса возникает точка перелома. Поскольку методы динамических рядов оперируют данными за прошлые периоды и средневзвешенными величинами, они обычно непригодны для выявления точек перелома. Поэтому, когда есть основания ожидать возникновения точки перелома, нужно применять и другие методы прогнозирования [15].

Техника динамических рядов включает в себя несколько методов разной степени сложности, такие как метод скользящей средней, метод экспоненциального сглаживания, метод расширенного сглаживания и метод адаптивного сглаживания.

В прогнозировании по методу *скользящей средней* используются средние показатели продаж за последние периоды. Можно рассчитать средние величины за любое число периодов, но обычно берут средние за один, три, четыре или двенадцать периодов. Когда используют среднюю за один период то именно ее значение и служит прогнозной оценкой объема продаж на будущий период. Если нужна скользящая средняя за двенадцать периодов — ее вычисляют на основе средних каждого из двенадцати последних месяцев. Когда оканчивается очередной месяц, мы берем среднюю за этот месяц и отбрасываем среднюю за первый. Так что данные все время обновляются, а количество учитываемых периодов остается постоянным.

Скользящую среднюю легко вычислить, но у этого показателя есть ряд ограничений. Он нечувствителен к изменениям, для составления прогнозов на его основе нужно хранить и постоянно обновлять крупные массивы данных. Если в прошлом объем продаж испытывал значительные колебания, средняя величина не может служить надежной основой для прогноза. Скользящая средняя учитывает только базовый элемент прогноза (базовый спрос) и оставляет в стороне остальные элементы [16].

Для преодоления этих недостатков был разработан модифицированный *метод скользящей средневзвешенной*, в котором больший вес присваивается данным за более поздние периоды. Одна из разновидностей метода скользящей средневзвешенной – экспоненциальное сглаживание.

Скользящая средняя рассчитывается по следующей формуле

$$F_t = \sum_{i=1}^n \frac{S_{i-1}}{n}, \quad (51)$$

где  $F_t$  – прогнозная скользящая средняя на период  $t$ ;

$S_{i-1}$  – объем продаж за период  $(i-1)$ ;

$n$  – число периодов.

Например, прогноз на апрель по методу скользящей средней при объеме продаж за предыдущие три месяца 120, 150 и 90 единиц вычисляют следующим образом

$$F_{\text{апр}} = \frac{120 + 150 + 190}{3} = 120$$

При использовании метода *экспоненциального сглаживания* оценка будущего объема продаж основывается на средневзвешенной величине продаж за предыдущий период и на прогнозных значениях спроса. Величину изменения между значением старого прогноза и фактическим объемом продаж за последний

прошедший период называют альфа-фактором. Новый прогноз равен старому прогнозу с учетом альфа-фактора.

$$F_t = \alpha D_{t-1} + (1 - \alpha)F_{t-1}, \quad (52)$$

где  $F_t$  – объема продаж на период  $t$ ;

$F_{t-1}$  – прогноз объема продаж на период  $(t-1)$ ;

$D_{t-1}$  – фактический спрос в период  $(t-1)$ ;

$\alpha$  – альфа-фактор, или постоянный коэффициент сглаживания ( $0 \leq \alpha \leq 1,0$ ).

Например, если прогноз на последний период равен 100, а фактический объем продаж – 110. Примем значение альфа-фактора 0,2.

$$F_t = \alpha D_{t-1} + (1 - \alpha)F_{t-1} = 0,2 \times 110 + (1 - 0,2) \times 100 = 22 + 80 = 102$$

Новое прогнозное значение объема продаж равно 102 единицам.

Главное преимущество метода экспоненциального сглаживания в том, что он позволяет быстро рассчитывать новые значения прогнозов, не требуя для этого больших массивов данных за прошлые периоды и обновления информации. Благодаря этому свойству метод экспоненциального сглаживания очень подходит для программирования с применением компьютерных средств. Изменяя значение коэффициента сглаживания можно изучать и изменять чувствительность метода к изменениям [15].

При использовании метода экспоненциального сглаживания самым ответственным решением является выбор значения альфа-фактора. Если он равен 1,0 тогда объем продаж за последний прошедший период и есть прогноз на ближайший будущий период. При очень малом значении альфа-фактора (0,01) метод становится почти идентичным методу скользящей средней. Когда значение альфа-фактора велико, прогноз оказывается очень чувствительным к изменениям. При низком значении альфа-фактора метод слабо реагирует на изменения, а значит, и на случайные колебания спроса. В то же время этот метод не делает различий между сезонными и случайными колебаниями, а в силу этого не устраняет потребности в экспертных оценках.

*Расширенное сглаживание.* Базовую модель можно расширить так, чтобы она учитывала долгосрочные тенденции и сезонный фактор. Соответствующие разновидности метода называют экспоненциальным сглаживанием с учетом тенденций и экспоненциальным сглаживанием с учетом сезонного фактора.

Расширенное экспоненциальное сглаживание включает в расчет тенденции и сезонный фактор, когда конкретное значение этих элементов поддается четкому определению. Формула расширенного экспоненциального сглаживания содержит три элемента и три константы, представляющие базовый спрос, временную тенденцию и сезонный фактор.

Этот метод тоже позволяет быстро рассчитать прогнозные значения при минимальном запасе данных. Чувствительность метода зависит от значения констант.

Метод *адаптивного сглаживания* предполагает постоянный пересмотр выбранных значений альфа-фактора. Коэффициент пересматривают по завершении каждого прогнозного периода и определяют то его значение, при котором прогноз был бы безошибочным. Таким образом, субъективная оценка менеджеров отчасти заменяется систематической и последовательной корректировкой альфа-фактора.

Метод адаптивного сглаживания обладает свойством самокоррекции, то есть подстраивания собственной чувствительности под текущую ситуацию. Хотя этот метод был специально разработан для систематического преодоления ошибок, его слабость – в склонности к чрезмерным реакциям, когда случайная погрешность воспринимается как проявление тенденции или сезонного фактора. Такое ошибочное истолкование может стать причиной роста величины погрешностей в будущем [14].

*Причинно-следственные методы прогнозирования.* Эти методы прогнозирования основаны на регрессионной оценке объема продаж по каждой единице хранения с учетом влияния независимых факторов. Например, продажа кофе на стадионе во время футбольных матчей обычно есть функция температуры воздуха [15]. Чем холоднее, тем больше кофе выпивают болельщики. В таблице 8 приведены соответствующие данные за два сезона.

Таблица 8

Потребление кофе во время футбольных матчей и температура воздуха

Дата	01.09	24.09	01.10	15.10	29.10	12.11	16.09	30.09	14.10	21.10	11.11	18.11
Температура воздуха, F <sup>0</sup>	65	42	58	32	28	20	71	62	40	56	25	30
Потребление кофе, тыс. чашек	21	32	19	29	40	43	18	24	33	24	36	38

Из уравнения линейной регрессии следует что с повышением температуры воздуха на каждый градус (значение  $x$  увеличивается на  $1,0^0$  по шкале Фаренгейта) потребление кофе сокращается на 450 чашек. Коэффициент корреляции ( $r^2$ ), обычно используемый в регрессионном анализе, определяет пропорциональное соотношение между изменениями (вариациями) зависимой (потребление кофе) и независимой (температура воздуха) переменных. В данном примере ожидаемый спрос на кофе, чашки, сахар и сливки можно рассчитать заранее, исходя из прогноза погоды. Когда удастся найти независимую переменную (факторный признак), причинно-следственные, или регрессионные, методы прогнозирования работают очень хорошо. Но в логистике такие ситуации

встречаются не особенно часто. Если прогнозирование спроса на какой-либо продукт базируется на единственном независимом факторе, мы говорим о простом регрессионном анализе. Если же факторных признаков два или больше, применяется так называемая множественная регрессия. Этот метод прогнозирования опирается на корреляционную связь между факторным, или предсказуемым, событием и зависящим от него объемом продаж конкретного продукта (результатирующим событием). Если существует тесная и стабильная корреляция между независимым фактором и объемом продаж, нет необходимости в причинно-следственной связи между ними. Наличие корреляции означает, что прогнозируемым продажам предшествует некое предопределяющее их независимое событие — продажа сопутствующего товара. Более надежные результаты прогнозирования дает регрессия на основе причинно-следственных связей. Поскольку регрессионный анализ позволяет эффективно учитывать влияние внешних факторов и событий, причинно-следственные методы больше подходят для составления долгосрочных или интегрированных прогнозов [17].

### 9.5. Погрешности прогноза

Точность прогноза определяется разницей между фактическими и прогнозными продажами. Повышение точности прогнозов требует измерения и анализа погрешностей [17].

Существует несколько методов измерения погрешностей прогнозирования в абсолютных или относительных величинах. Погрешность прогноза равна разнице между фактическим спросом и его прогнозным значением [14].

Среднюю арифметическую погрешностей вычисляют следующим образом: суммируют погрешности за все периоды. Вычислив сумму погрешностей за год, делят ее на 12. Простая средняя погрешность довольно близка к нулю, хотя в отдельные месяцы погрешности прогноза могут быть весьма велики. Недостаток этого метода в том, что завышенные и заниженные прогнозные оценки взаимно погашаются, и это маскирует существенную неточность прогнозирования в отдельные месяцы. Еще один путь – вычислить среднюю квадратическую погрешность, и использовать этот показатель для сопоставления разных прогнозов. Преимущество средней квадратической погрешности состоит в том, что крупные погрешности получают в ней больший вес, чем малые. Этот метод придает намного большее значение нескольким крупным погрешностям в прогнозах, нежели множеству мелких промахов.

Показатели средней, средней квадратической погрешности хороши для оценки точности прогнозов по отдельным единицам хранения и отдельным распределительным центрам, но не слишком подходят для оценки агрегированных прогнозов. Например, при отклонении прогноза от фактического объема продаж на 40 единиц все эти показатели придадут одинаковое значение погрешности независимо от того, чему равен месячный спрос – 40 единицам или 4 тыс. единицам. Между тем в первом случае прогноз ошибочен на 100%, во втором – только на 1 %. Первый прогноз очень плох, второй, наоборот, весьма то-

чен. Для сопоставления точности прогнозов по разным единицам хранения и рынкам с неодинаковым средним спросом принято исчислять относительную величину погрешности в процентном выражении, для этого среднюю погрешность прогноза надо разделить на среднюю величину спроса.

*Уровень оценки.* Вторая задача заключается в выборе уровня оценки или агрегирования. Имея все данные прогнозов по отдельным единицам хранения, погрешность прогноза можно вычислять для сочетаний «единица хранения – распределительный центр», для групп единиц хранения или распределительных центров либо для национального рынка в целом. В общем случае, чем выше уровень агрегирования, тем меньше относительная величина погрешности прогноза.

*Обратная связь.* Третий этап в обеспечении точности прогнозов предполагает создание механизма обратной связи, помогающего совершенствовать процесс прогнозирования. Для этого нужно, чтобы служащие были заинтересованы выявлении проблем и в поиске путей совершенствования и чтобы они хорошо представляли себе, какое вознаграждение их за это ждет. При наличии должной мотивации прогнозисты в состоянии выявить главные источники ошибок и разработать способы, позволяющие их избегать. В некоторых случаях развитие методов прогнозирования, примером чему может служить упомянутая выше концепция фокусировки, дает поразительное повышение точности прогнозов. В других случаях удастся существенно снизить ошибочность прогнозов за счет улучшения обмена информацией, относящейся, в частности, к таким маркетинговым мероприятиям как изменение цен, внедрение новой упаковки или стимулирование продаж. В любом случае при оценке качества прогнозирования важно отдавать себе отчет в том что прогноз в принципе не может быть абсолютно точным, а значит, связанные с этим ожидания не должны быть чересчур завышенными [18].

С помощью прогнозов компании устанавливают для себя общие количественные цели, служащие рабочими ориентирами для всей логистической системы. Эти цели определяют, «что, где и когда» делать в сфере сбыта продукции. Важная задача состоит в том, чтобы собирать как можно больше информации, анализировать ее и своевременно строить на ее основе прогнозы с желательной степенью точности. Поскольку операции по сбору и обработке информации становятся все более дешевыми, руководители фирм просто обязаны оценивать качество используемых прогнозов. Совершенствование процесса прогнозирования – в результате более полного обмена информацией, повышения качества анализа или накопления опыта – ведет к значительному сокращению уровня запасов.

## **10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ**

В современном обществе рост количества транспортных единиц и потребность в увеличении объема перевозок сопровождаются необходимостью повышения его надежности, безопасности и качества [19, 20].

Недостаточный учет закономерностей развития транспортной сети, распределения загрузки ее участков приводит к частому образованию транспортных пробок, перегрузке/недогрузке отдельных линий и узлов сети, повышению уровня аварийности, экологическому ущербу.

Для поиска эффективных стратегий управления транспортными потоками в мегаполисе, оптимальных решений по проектированию улично-дорожной сети и организации дорожного движения необходимо учитывать влияние внешних и внутренних факторов на характеристики транспортного потока [20].

Теория транспортных потоков развивалась исследователями различных областей знаний – физиков, математиков, специалистов по исследованию операций, транспортников, экономистов.

Дорожное движение тесно связано с благосостоянием и жизнью людей. Дорожно-транспортные происшествия (ДТП) обходятся экономике в среднем 2-3% ВВП. Ежегодно на российских дорогах гибнут 35 000 человек, 200 000 получают увечья. По масштабу потерь это больше, чем локальный вооруженный конфликт средней интенсивности. Размер ежегодного ущерба в России превышает 1 млрд. долларов [19].

Проблемы дорожного движения в мегаполисах европейских стран, по сути, не отличаются от российских. Общепризнанными критериями качества дорожного движения являются уменьшение загрязнения окружающей среды и чрезмерного уровня шумов, минимизация расхода топлива, предупреждение образования и распространения транспортных заторов, применимы и к западным и к российским магистралям.

Ученье множество факторов в современном мире позволяет применение методов математической статистики и математического моделирования.

### **10.1. Понятие транспортного потока**

Изучение транспортных систем с помощью математического моделирования ведется уже более 100 лет [18, 19, 20].

На транспортные потоки как на объект исследования впервые в России в 1912 году обратил внимание русский профессор Г.Д. Дубелир. Он начал изучение пропускной способности магистралей и их пересечений. Под пропускной способностью понимают максимально возможное число автомобилей, которое может пройти через сечение дороги за единицу времени [21].

Одним из первых пришлось рассмотреть вопрос: с какого расстояния между транспортными единицами начинается транспортный поток (ТП)? Или – начиная с какого расстояния, между транспортными единицами начинается

взаимодействие? Если расстояние между автомобилями километр, «измеримое» взаимодействие отсутствует. Если же два метра – взаимодействие неизбежно. Взаимодействие заключается во взаимном маневрировании» [21].

Необходимость введения термина «транспортный поток» возникла с появлением таких проблем на дороге, как заторы.

Термин «транспортный поток» (в англ. – Traffic Flow) используется западными учеными и исследователями по аналогии с «потоками» в сплошных средах (а позднее и дискретных – Granular Flow). Термин «Теория транспортных потоков» в англоязычной литературе – Traffic Flow Theory.

Отправной точкой исследований в теории транспортных потоков на западе считается гидродинамическая модель Лайтхилла-Уизема, которая была шагом от статических функциональных зависимостей параметров транспортного потока к описанию их динамической связи по времени и координате. Этот переход был достигнут фактически формальным применением представлений гидродинамики.

Сам по себе транспортный поток всегда характеризуется средними (макроскопическими) параметрами: средняя скорость, плотность (число автомобилей на единицу длины), интенсивность (число автомобилей, проходящих через любую данную точку дороги в единицу времени). Два параметра (интенсивность и скорость или плотность и скорость) изображаются в виде графика и называются фундаментальной диаграммой (Fundamental Diagram) [20].

У нас в стране термин «транспортный поток» используется в «Организации дорожного движения» (ОДД), но не определяется. Определяются только «необходимые данные, характеризующие транспортный поток» [20].

Транспортные потоки классифицируют в зависимости от степени заполненности полосы движения транспортными единицами по отношению суммарной занимаемой автомобилями площади полосы к общей ее площади на произвольном участке дороги (табл. 9).

Таблица 9

Классификация транспортных потоков

35 % и более	22 % – 35 %	15 % – 22 %	0 – 15 %
Старт-стоп движение («stop-and-go»)	Затрудненное движение	Умеренное движение	Свободное движение

Ученые Национального исследовательского центра Лос-Аламоса выделяют следующие стадии транспортных потоков.

Стадия 1. Пока дорога не загружена, автомобилисты движутся на удобной им скорости, свободно переходя на соседние полосы движения. На этой стадии автомобили сопоставимы с потоком частиц, имеющих большую свободу в своем перемещении.

Стадия 2. Как только дорога становится переполненной, автомобилисты внезапно теряют большую часть свободы перемещения и вынуждены двигаться уже как часть всеобщего транспортного потока, согласовывая с ним свою



скорость. При этом они уже не имеют возможности свободно менять полосу движения. Эта стадия, подобная потоку воды, называется «синхронизированным» потоком.

Стадия 3. При очень большом числе автомобилей в потоке движение приобретает прерывистый характер (режим «stop-and-go»). На этой стадии транспортный поток можно уподобить потоку замерзающей воды, автомобили становятся на какой-то промежуток времени как бы «приклеенными» к одному месту дороги.

В теории транспортный поток принято рассматривать аналогично потоку жидкости или газа. Поэтому понятие «фазового перехода» в транспортном потоке введено по аналогии с фазовыми переходами в жидкостях – превращение пара в воду или воды в лед [18].

Фазовые переходы – качественные скачкообразные изменения в скорости и плотности транспортных единиц в потоке. Эти изменения возникают локально и распространяются волнообразно по потоку.

## **10.2. Математическое моделирование транспортных потоков**

В моделировании дорожного движения исторически сложилось два подхода – детерминистический и вероятностный (стохастический).

В основе детерминированных моделей лежит функциональная зависимость между отдельными показателями, например, скоростью и дистанцией автомобилей в потоке. В стохастических моделях транспортный поток рассматривается как вероятностный процесс [19].

Все модели транспортных потоков можно разбить на три класса:

- 1) модели-аналоги – движение транспортных средств уподобляется какому-либо физическому потоку (макроскопические);
- 2) модели следования за лидером – связь между перемещением ведомого и головного автомобиля (учитывается время реакции водителя, исследование движение и т.д.) (микроскопические);
- 3) вероятностные модели – транспортный поток рассматривается как результат взаимодействия транспортных средств на элементах транспортной сети – закономерности формирования очередей, интервалов, загрузок по полосам (стохастический характер).

В последнее время в исследованиях транспортных потоков стали применять междисциплинарные математические идеи, методы и алгоритмы нелинейной динамики. Их целесообразность обоснована наличием в транспортном потоке устойчивых и неустойчивых режимов движения, потерь устойчивости при изменении условий движения, нелинейных обратных связей, необходимости в большом числе переменных для адекватного описания системы.

Транспортный поток можно рассматривать как поток одномерной сжимаемой жидкости, допуская, что поток сохраняется и существует взаимнооднозначная зависимость между скоростью и плотностью транспортного потока [19].

Первое допущение выражается уравнением неразрывности. Второе – функциональной зависимостью между скоростью и плотностью для учета уменьшения скорости движения автомобилей с ростом плотности потока.

Одному значению плотности может соответствовать несколько значений скорости. Поэтому средняя скорость потока в каждый момент времени должна соответствовать равновесному значению при данной плотности автомобилей на дороге. Это может наблюдаться только на участках дорог без пересечений. В этом недостаток и ограниченность применения непрерывных моделей.

Среди гидродинамических моделей различают модели с учетом и без учета эффекта инерции. Последние могут быть получены из уравнения неразрывности, если скорость рассматривать как функцию плотности. Модели, учитывающие инерцию, представляются уравнениями Навье-Стокса со специфическим членом, описывающим стремление водителей ехать с комфортной скоростью.

### 10.3. Транспортные заторы

На сегодняшний день не существует общепринятого определения затора (пробки). Карлос Даганзо полагает, что на свободной дороге транспортный поток не образует очередей, если малое возмущение скоростей, возникшее в некоторой точке дороги, не распространяется вверх по потоку. И наоборот, если возмущение скоростей, возникшее на некотором участке, распространяется за его пределы, то в транспортном потоке образуются скопления и возникают заторы. Обычно описываются одиночные пробки и серия пробок [20].

Одиночные заторы могут быть вызваны условиями дорожного движения, например, красным светом светофора, аварией, сужением и т.п. В такой ситуации условие превышения притока в пробку над оттоком выполнить легко: например, если сужение имеет пропускную способность  $q_{bn}$ , а приток  $q_{in}$ , то если  $q_{in} > q_{bn}$ , пробка будет расти. Теоретически такое поведение схоже с поведением очереди, описываемой теорией массового обслуживания, за исключением наличия пространственного измерения – пробка растет с хвоста. Такой пространственный рост хорошо описывается теорией кинематических волн.

Эмпирические данные показывают, что пробки часто возникают на однородном участке дороги, и выглядят как бы "вставленными" в свободный поток. Пусть, к примеру, причиной такой пробки стала авария, которая самоликвидировалась через некоторое время. Рассмотрим  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  транспортных средств, стоящих друг за другом на однополосной дороге. В первый момент времени может поехать первая машина, затем вторая и т. п. За это время в хвост пробки может пристроиться еще некоторое количество машин. Задав симметричные условия оттока и притока автомобилей в пробку, получим область машин на дороге, имеющих нулевую скорость, смещающуюся навстречу потоку. С точки зрения водителя, пристроившегося в хвост – пробка "проходит через него". Он сначала останавливается, а через некоторое время может снова продолжить движение. Это стандартное волновое явление, хорошо описываемое теорией кинематических волн.

Наблюдения показывают, что отток транспортных средств из пробки составляет в среднем одно транспортное средство за две секунды для одной полосы движения. Обозначим его через  $q^*$ . Тогда пробка будет расти, если  $q_{in} > q^*$ . Например, если вдали случится авария, то при условиях однородности на выходе из этой аварии значительной пробки не образуется. Действительно, если на выходе из первой пробки появится поток  $q^*$ , то из второй пробки поток составит ту же величину  $q^*$ . Таким образом, возникает вопрос: может ли поток поддерживать значения выше  $q^*$  (т.н. суперкритический поток), и если да, то как? Ответ на вопрос пока не найден [19].

#### 10.4. Классификация фаз потока

Борис Кернер [18] предложил следующую классификацию фаз движения транспортного потока (рис. 4):

- свободный поток (дорога не загружена, водители придерживаются желаемой скорости, свободно переходя на соседние полосы – на этой стадии автомобили сопоставимы с потоком свободных частиц);
- синхронизированный поток (дорога становится переполненной, водители теряют возможность свободно маневрировать и вынуждены согласовывать свою скорость со скоростью потока – эта стадия подобна потоку воды);
- широкие перемещающиеся пробки (автомобили или группы автомобилей подобны кусочкам льда, движущимся в потоке жидкости);
- старт-стоп движение (при большом скоплении автомобилей движение потока приобретает прерывистый характер).

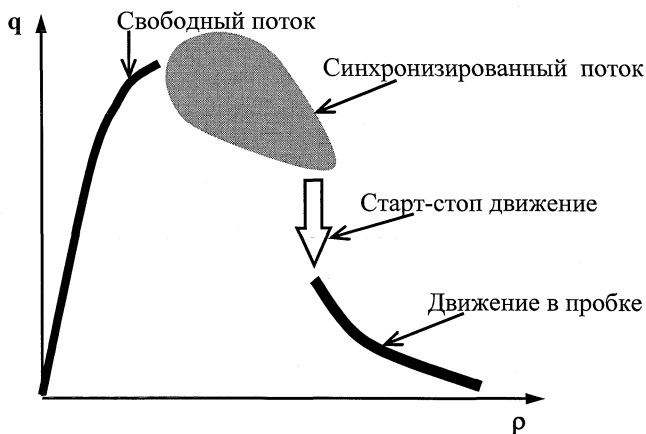


Рис. 4. Фазовые состояния потока на многорядных магистралях

Проблема образования предзаторных и заторных ситуаций нуждается в дальнейшем изучении.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие для вузов / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 430 с.
2. Геронимус, Б.Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте / Б.Л. Геронимус. – 2-е изд. – М.: Транспорт, 1982. – 192 с.
3. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 480 с.
4. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2005. – 478 с.
5. Заляпина, Н.Н. Теория вероятностей и математическая статистика на транспорте: учебное пособие / Н.Н. Заляпина. – Челябинск: ЧПИ, 1986. – 50 с.
6. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 550 с.
7. Маркин, Ю.П. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие для вузов / Ю.П. Маркин. – М.: Высшая школа, 2007. – 422 с.
8. Методы математической статистики в обработке экономической информации: учеб. пособие для вузов / Т.Т. Цымбаленко, А.Н. Байдаков, О.С. Цымбаленко, А.В. Гладилин; под ред. Т.Т. Цымбаленко. – М.; Ставрополь: Финансы и статистика, 2007. – 198 с.
9. Фомин, Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности: учеб. пособие для вузов / Г.П. Фомин. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 142 с.
10. Воркут, А.И. Грузовые автомобильные перевозки / А.И. Воркут. – Киев: Высшая школа, 1986. – 422 с.
11. Горяев, Н.К. Разработка метода «двойного ранжирования» для первоначального заполнения матрицы при решении «транспортной задачи» / Н.К. Горяев, С.О. Бандурко // Сборник трудов «Конструирование и эксплуатация наземных транспортных машин». Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – С. 31–34.
12. Бауэрсокс, Д. Логистика: интегрированная цепь поставок / Д. Бауэрсокс, Д. Клосс. – М.: Транспорт, 2005. – 238 с.
13. Грачева, М.В. Анализ проектных рисков / М.В. Грачева. – СПб.: ООО «Издательство ДНК», 2000. – 208 с.
14. Ширяев, В.И. Экономико-математическое моделирование управления фирмой / В.И. Ширяев, И.А. Баев, Е.В. Ширяев. – М.: Наука-Пресс, 2002. – 120 с.
15. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник / Г.П. Фомин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
16. Литвак, Б.Г. Управленческие решения. учебное пособие / Б.Г. Литвак. – М.: ЭКМОС, 2001. – 232 с.

17. Математические методы в экономике / И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, В.Д. Скарин, М.Ю. Хачай; под ред. И.И. Еремина и В.Д. Мазурова. – Екатеринбург: Изд-во «У-Фактория», 2000. – 280 с.

18. Брайловский, Н.О. Математическое моделирование транспортных систем / Н.О. Брайловский, Б.И. Грановский. – М.: Транспорт, 1978. – 125 с.

19. Швецов, В.И. Математическое моделирование транспортных потоков / В.И. Швецов. – М.: Автоматика и телемеханика, 2003. – 11 с.

20. Семенов, В.В. Математическое моделирование транспортных потоков мегаполиса: доклад / В.В. Семенов. – М., 2007. – 47 с.

21. Семенов, В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. – <http://spkurdyumov.narod.ru/Mat100.htm>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОСОБЕННОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ.....	4
2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ.....	10
3. КЛАССИФИКАЦИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	13
4. ЭТАПЫ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	15
4.1. Задачи моделирования.....	16
4.2. Этапы экономико-математического моделирования.....	18
5. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	24
6. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	31
6.1. Пример задачи линейного программирования.....	32
6.2. Транспортная задача.....	34
7. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ.....	42
7.1. Принципы построения сетевых графиков.....	45
7.2. Расчет параметров сетевой модели.....	47
7.3. Оптимизация сетевых моделей.....	48
7.4. Преимущества и недостатки сетевого метода планирования.....	50
8. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	52
9. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.....	57
9.1. Элементы прогноза.....	58
9.2. Подходы к прогнозированию.....	60
9.3. Процесс прогнозирования.....	61
9.4. Техника прогнозирования.....	63
9.5. Погрешности прогноза.....	68
10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ.....	70
10.1. Понятие транспортного потока.....	70
10.2. Математическое моделирование транспортных потоков.....	72
10.3. Транспортные заторы.....	73
10.4. Классификация фаз потока.....	74
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	75

Николай Константинович Горяев,  
Валерий Владимирович Вязовский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИИ  
ТРАНСПОРТНОГО ПРОЦЕССА

Учебное пособие

Техн. редактор А.В. Миних

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

---

Подписано в печать 31.12.2010. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 4,65. Тираж 100 экз. Заказ 635/647 . Цена С.

---

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.  
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.